



# 行政院國家科學委員會專題研究計畫成果報告

## 一種新的遞迴連結拓樸之研究

### A Study of a New Recursive Interconnection Topology

計畫編號：NSC 89-2213-E-002-012

執行期限：88年8月1日至89年7月31日

主持人：陳健輝 國立台灣大學資訊工程學系教授

計畫參與人員：陳健輝 國立台灣大學資訊工程學系教授

黃賢卿 國立台灣大學資訊工程學系博士班研究生

羅瑞翔 國立台灣大學資訊工程學系博士班研究生

周信宏 國立台灣大學資訊工程學系博士班研究生

陳維美 國立台灣大學資訊工程學系博士班研究生

邱俊淵 國立台灣大學資訊工程學系碩士班研究生

胡俊光 國立台灣大學資訊工程學系碩士班研究生

洪浩舜 國立台灣大學資訊工程學系碩士班研究生

#### 一、中文摘要

最近在文獻中有許多應用於大型分散式多處理機系統(distributed multi-computer systems)的連結拓樸(interconnection topologies)(簡稱拓樸)被提出。在這此拓樸中，有些是可以透過遞迴的方式來展開或分解，我們稱為遞迴拓樸(recursive topologies)。遞迴拓樸有許多優點。首先，它們很容易擴展，其次，它們具有較高的容錯(fault tolerance)能力；第三，它們的遞迴性質可以使得它們比較容易被嵌入(embedding)在其他的結構中。最後，遞迴結構有助於在其上設計演算法。

在此計畫中，我們研究一個叫做超完全圖(hypercomplete)的新遞迴拓樸之演算法和拓樸性質。我們計算出此拓樸之直徑並且探討了其嵌入和容錯的能力。我們證明了超完全圖超完全圖具有漢彌頓連接(Hamiltonian-connected)與泛迴路(pancyclic)之良好性質。

此外，我們在超完全圖上設計一些有效率的通訊演算法(communication algorithms)和應用演算法(application algorithms)例如，最短路徑繞路(shortest-path routing)演算法與下降/上

升(descend/ascend)演算法之設計。

最後，我們比較了超完全圖與其它現存遞迴拓樸之拓樸性質和演算法複雜度。證明了其存在之價值。

**關鍵詞：**廣播，上升/下降演算法，直徑，嵌入，容錯，漢彌頓連接，漢彌頓性質，超完全圖，連結網路，泛迴路，最短路徑繞路。

#### Abstract

Many interconnection topologies (topologies for short) for building distributed multicomputer systems have been proposed in the literature. Among them, some can be expanded or decomposed in a recursive manner, and hence are referred to as *recursive topologies*. There are some advantages for recursive topologies. First, they are easy to be expanded. Second, they are robust in fault tolerance. Third, recursiveness can help the embeddings of recursive topologies onto others. Fourth, recursive topologies can help the derivation of useful combinatorial properties and the design of efficient algorithms.

In this project, we have studied the topological and algorithmic properties of a new

recursive topology, named the hypercomplete. We have computed the diameter of the hypercomplete, meanwhile, we have explored the embedding and fault-tolerant capabilities of the hypercomplete. Furthermore, we have showed that hypercomplete is pancyclic and Hamiltonian-connected.

Besides, we have designed some efficient communication algorithms and some application algorithms on the hypercomplete. For example, we have designed a shortest-path routing algorithm and implemented the class of descend/ascend algorithms on the hypercomplete.

Finally, we have compared the hypercomplete with the other existing recursive topologies in both topological and algorithmic properties.

**Keywords:** Broadcasting, descend/ascend algorithm, diameter, embedding, fault-tolerance, Hamiltonian-connected, Hamiltonicity, hypercomplete, interconnection networks, pancyclic, and shortest-path routing.

## 二、緣由與目的

近幾年來由於 VLSI 技術的進步，有許多多處理機系統(multiprocessor systems)被提出來用以解決科學上繁複巨量的計算。其中 NCUBE/ten[10]，Intel iPSC 系列的超立方體(hypercube)[11]與 Connection Machine[11]是較具代表性且已製造出來作為商業用途的多處理機系統。這些系統可連結多達數百或數千個處理機。

一個多處理機系統是由許多處理機所組成。這些處理機透過一個連結網路(interconnection network)(以下簡稱網路)互相連接。不同之處理機彼此以訊息傳送(message passing)之方式來達到溝通的目的。如何設計處理機之間的連結網路拓樸(interconnection network topology)(以下簡稱拓樸)使得這些處理機能發揮最大功能決定該多處理機工作效率之一項重要因素。

近年來有許多不同之拓樸被提出[1, 5, 10-15, 17-19]。在這些拓樸中有些可以用遞迴的方式去擴展或分解，因此被稱之為遞迴拓樸(recursive topology)。許多具有良好效能的拓樸，如超立方體(hypercube)，星狀圖(star graph)[1]，重排圖(arrangement graphs)[5]，費伯納希立方體(Fibonacci cubes)[11]，超網路(hypernets)[12]，和 WK 遞迴網路(WK-recursive network)[19]等，皆屬此類。

遞迴拓樸具有以下的優點：首先，它們可以很容易地被擴展。其次，它們具有強健的容錯性能。例如，我們可以在壞掉任意  $n-1$  個節點的  $n$  維星狀圖(star graph)中，找到一個完好的  $n-1$  維星狀圖。第三，它們可以很容易地被嵌入到另一個遞迴拓樸。例如，有很多種類的樹(trees)可用遞迴的方式嵌入到超立方體。最後，遞迴拓樸的遞迴結構有助於導出一些有用的拓樸性質與有效率的演算法。

本計劃研究一個叫做超完全圖(hypercomplete)的新遞迴拓樸之拓樸性質與設計可在其上執行之演算法。

為了便於表示，我們往往將拓樸視為一個圖形結構，以節點(vertex)來代表處理機，而以邊(edge)來代表處理機之間的連結線。

在多處理機系統中，處理機之間的通訊效能是影響系統整體工作效率的重要因素之一。一個圖形的直徑表示了此圖形傳遞訊息的最大延遲，故較小之直徑表示此圖形有較佳之通訊能力。此外，通訊的另一主要課題是如何找到適當的路徑(path)把訊息快速地送達目的地，這也就是所謂的繞路(routing)問題。故決定二個處理機之間的最短路徑(shortest path)變成相當地重要，因為它可降低處理機之間的傳輸延遲(transmission delay)。另外，有許多應用需要執行由一節點傳送訊息到其它所有節點的演算法，我們稱之為廣播(broadcasting)演算法。在此計畫中，我們將計算超完全圖之直徑，並在其上設計最短路徑和廣播演算法。

相對於拓樸之直徑是用來測量該拓樸的最大傳輸延遲，連結度(connectivity)則是用來評估拓樸的強健度(robustness)和容錯(fault tolerance)能力的一個重要參考數據。圖形的連結度為使圖形變成不連接(disconnected)的最少節點損壞個數。如果一個圖形的連結度等於其最小度數則此圖形有較佳的容錯能力，我們稱之為最大容錯(maximally fault tolerant)。我們求出了超完全圖的連結度，並求解其是否具有最大容錯之性質。

將一個客圖(guest graph)嵌入(embed)到另一個主圖(host graph)是一個相當重要之課題。在嵌入後，客圖上的演算法可以在主圖上模擬(emulation)。我們嵌入若干重要的拓樸如樹(tree)、環(ring)、二維圓環體(torus)等等到超完全圖中，使得在超完全圖上可以模擬所有在這些拓樸上執行之演算法。

下降/上升演算法(descend/ascend)[14]是平行處理中兩大類型的演算法。如果有某個平行演算法執行二元運算(binary operation)，而且其運算元(operands)之距離依序為 $2^{n-1}, 2^{n-2}, \dots, 2^0$  (或 $2^0, 2^1, \dots, 2^{n-1}$ )，則此演算法屬於下降(或上升)演算法。許多已知的演算法皆屬於此二類演算法。例如箱型排序(bitonic sort)，奇偶排序(odd-even sort)，週期更換(cyclic shift)，位元反轉(bit reverse)，洗牌(shuffle)，反洗牌(unshuffle)，排列(permutation)，快傅立葉轉換(fast Fourier transformation)，迴旋(convolution)，矩陣轉置(matrix transposition)，以及某些對稱函數(symmetric function)之計算，都是屬於這兩類的演算法。我們在超完全圖上實現了下降/上升演算法。

漢彌頓性質是圖形理論上廣受注意的一個性質。在圖形上的一個迴路(或路徑)若包含所有的節點，且每一節點只走過一次，則被稱之為漢彌頓迴路(或路徑)(Hamilton cycle (or path))。若一圖形之任兩點都有一漢彌頓路徑，則此圖形具有漢彌頓連接之性質[3]。若一圖形包含所有可能長度之迴路，則此圖形具有泛

迴路(pancyclic)之性質[3]。漢彌頓連接和泛迴路二者都是圖學上相當重要的性質，我們已證出超完全圖具有此二種性質。

最後，我們比較超完全圖與其它現存遞迴拓樸之拓樸性質(如直徑與最大度數等)與演算法複雜度，進而了解超完全圖之應用價值。

### 三、結果與討論

在本計畫中，我們完成了下列結果：

1. 定義一個新的遞迴拓樸，稱之為超完全圖。
2. 設計出超完全圖上的最短路徑演算法，並求出其直徑。
3. 設計出超完全圖上的傳播演算法。
4. 證明超完全圖具有最大容錯之性質。
5. 實現超完全圖上的下降/上升演算法。
6. 嵌入樹，環，二維圓環體等重要拓樸到超完全圖。
7. 證明超完全圖具有漢彌頓連接和泛迴路之性質。
8. 比較超完全圖與其它現存遞迴拓樸之拓樸性質和演算法複雜度，證明超完全圖有一具有相當價值之拓樸結構。

### 四、計劃成果自評

本計畫中，我們成功的發展出連結網路之新拓樸，與原先之計畫相去不遠，且已達成預期目標情況。此種拓樸有其相當不錯的性質，適合在國外學術期刊上發表。

後。列在文中者，一般置於欄位頂端或底端，並儘可能靠近正文中第一次提及的地方。比較大的圖表，可以包括兩個欄。各圖表請備說明內容，圖的說明應置於圖的下方，而表的說明則應置於表的上方。

### 五、參考文獻

- [1] S. B. Akers, D. Harel, and B. Krishnamurthy, "The star graph: an attractive alternative to the  $n$ -cube," *Proceedings*

- of International Conference on Parallel Processing*, 1987, pp. 393-400.
- [2] V. Auletta, A. A. Rescigno, and V. Scarano, "Embedding graphs onto the supercube," *IEEE Transactions on Computers*, vol. 44, no. 4, pp. 593-597, 1995.
- [3] F. Buckley and F. Harary, *Distance in Graphs*, Addison-Wesley, 1990.
- [4] G. H. Chen and D. R. Duh, "Topological properties, communication, and computation on WK-recursive networks," *Networks*, vol. 24, no. 6, pp. 303-317, 1994.
- [5] K. Day and A. Tripathi, "Arrangement graphs: a class of generalized star graphs," *Information Processing Letters*, vol. 42, no. 5, pp. 235-241, 1992.
- [6] K. Day and A. Tripathi, "Embedding of cycles in arrangement graphs," *IEEE Transactions on Computers*, vol. 42, no. 8, pp. 1002-1006, 1993.
- [7] N. Deo and C. Pang, "Shortest-path algorithms: taxonomy and annotation," *Networks*, vol. 14, pp. 275-323, 1984.
- [8] D. R. Duh and G. H. Chen, "Topological properties of WK-recursive networks," *Journal of Parallel and Distributed Computing*, vol. 23, no. 3, pp. 468-474, 1994.
- [9] K. Efe, "Embedding mesh of trees in the hypercube," *Journal of Parallel and Distributed Computing*, vol. 11, no. 3, pp. 222-230, 1991.
- [10] K. Ghose and K. R. Desai, "Hierarchical cubic networks," *IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems*, vol. 6, no. 4, pp. 427-435, 1995.
- [11] W. J. Hsu, "Fibonacci cubes: a new interconnection topology," *IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems*, vol. 4, no. 1, pp. 3-12, 1993.
- [12] K. Hwang and J. Ghosh, "Hypernet: a communication-efficient architecture for constructing massively parallel computers," *IEEE Transactions on Computers*, vol. C-36, no. 12, pp. 1450-1466, 1987.
- [13] Q. M. Malluhi and M. A. Bayoumi, "The hierarchical hypercube: a new interconnection topology for massively parallel systems," *IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems*, vol. 5, no. 1, pp. 17-30, 1994.
- [14] F. P. Preparata and J. Vuillemin, "The cube-connected cycles: a versatile network for parallel computation," *Communications of the ACM*, vol. 24, no. 5, pp. 300-309, 1981.
- [15] M. R. Samatham and D. K. Pradhan, "The de Bruijn multiprocessor network: a versatile parallel processing and sorting network for VLSI," *IEEE Transactions on Computers*, vol. C-38, no. 4, pp. 567-581, 1989.
- [16] X. Shen, Q. Hu, and W. Liang, "Embedding  $k$ -ary complete trees into hypercubes," *Journal of Parallel and Distributed Computing*, vol. 24, pp. 100-106, 1995.
- [17] H. S. Stone, "Parallel processing with the perfect shuffle," *IEEE Transactions on Computers*, vol. C-20, no. 2, pp. 153-161, 1971.
- [18] P. Vadapalli and P. K. Srimani, "A new family of Cayley graph interconnection networks of constant degree four," *IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems*, vol. 7, no. 1, pp. 26-32, 1996.
- [19] G. D. Vecchia and C. Sanges, "A recursively scalable network VLSI implementation," *Future Generation Computer Systems*, vol. 4, no. 3, pp. 235-243, 1988.
- [20] A. Y. Wu, "Embedding of tree networks into hypercubes," *Journal of Parallel and Distributed Computing*, vol. 2, pp. 238-249, 1985.