

行政院國家科學委員會專題研究計畫成果報告

適用於重覆性解碼的二元碼 (II)

Binary Codes for Iterative Decoding (II)

計畫編號：NSC 90-2213-E-002-066

執行期間：90年8月01日至91年7月31日

主持人：林茂昭 國立臺灣大學電信所

一、中文摘要

在本研究中，我們使用一種非災難性 (noncatastrophic) 之籬柵碼 (trellis code)。基本上，建構的方法是從給定的區塊碼中，選出兩組互斥的碼字 (codeword) 子集合，使其滿足我們希望的集合內距和集合間距，並作為籬柵狀態改變時其相對應輸出之碼字，進而設計出具大自由距離之籬柵碼。我們將所設計出之籬柵碼來裝置在渦輪碼 (turbo code) 上，並使用重覆性解碼 (iterative decoding) 技巧來解碼。

由研究成果顯示，我們所提出之編碼架構和傳統渦輪碼在相同錯開器長度、相同編碼率及相同複雜度下，我們的編碼架構在中高訊雜比時有較優越的除錯性能。

英文摘要

In this research, we consider a class of noncatastrophic trellis codes. The constructing method is basically to select two disjoint subsets from a given block code with desired intra-sets and inter-set distances. Based on the selected two disjoint subsets, we construct trellis codes which the edges leaving a given state are labeled with the codeword coming from the two disjoint subsets. We then apply the proposed trellis codes to turbo codes by using the proposed trellis codes as the component codes and use iterative decoding technique.

Simulation results show that the proposed coding schemes have some attractive performances. At the same decoding complexity, same coding rate and same interleaver length, the proposed codes outperform conventional turbo codes at

moderate-to-high signal-to-noise ratios.

二、計畫的緣由與目的 (Goals)

傳統渦輪碼 (Turbo code) 是由兩個遞迴性系統式迴旋碼 (recursive systematic convolutional code) 編碼器夾著一個錯開器 (interleaver) 並聯而成 (圖 1 所示的是碼率 1/3 的渦輪碼)，其解碼器是由兩個軟式輸入/軟式輸出解碼器 (soft in/soft out decoder) 中間夾著錯開器所構成，並使用重覆性解碼的技巧來解碼 [1]。我們可使用 Log-MAP [2,3] 來做為軟式輸入/軟式輸出解碼器。渦輪碼的特性是錯誤係數 (error coefficient) 很低，自由距離 (free distance) 不大。由於錯誤係數非常小，因此在訊雜比 (signal-to-noise ratio) 不大的時候，渦輪碼的除錯性能表現非常突出，當訊雜比變大的時候，自由距離的因素會變的更為重要，因此，渦輪碼除錯性能的改善也就漸趨緩慢。

在 [4,5] 中曾提出一種從特定的區塊碼中，再設計出具 2^m 個籬柵狀態點之籬柵碼的方法，其中 m 為一個區塊碼所含的訊息位元個數。基本上，設計的方法是使用一種選擇技巧，從選定的區塊碼中，選出兩組互斥的碼字 (codeword) 子集合，使其滿足期望的集合內距和集合間距，進而設計出具大自由距離或低錯誤係數之籬柵碼。其設計步驟如下：

1. 從給定的區塊碼中，選出兩組互斥的碼字子集合，分別以 C_o 及 C_e 表示，其中碼字子集合 C_o 及 C_e 中碼字的個數需大於 2^m 個，亦即

$$|C_o| \geq 2^m, |C_e| \geq 2^m.$$

2. 從碼字子集合 C_o 中選出 2^m 個相異的碼字，並且對所選出來的每一個碼字依序分別標示為 $\{0, 2, 4, \dots, 2^{m+1} - 2\}$ 。
3. 從碼字子集合 C_e 中選出 2^m 個相異的碼字，並且對所選出來的每一個碼字依序分別標示為

$$\{1,3,5,\dots,2^{m+1}-1\}。$$

4. 將籬柵碼之 2^m 個籬柵狀態點依序分別標示為 $\{0,1,2,\dots,2^m-1\}$ ，當籬柵碼之啟始籬柵狀態 x 跳至籬柵狀態 y 時，其標明在相對應碼枝 (Code Branch) 上之數值標示規則為 $L(x, y)$ ，而其標示數值 $L(x, y)$ 所相對應之碼字，即為編碼器因狀態改變所輸出之編碼位元 (Encoded Bits)，其中碼枝上之數值標示規則如下：

$$L(x, y) = y - 2x \pmod{2^{m+1}}。$$

經由上述編碼器的籬柵表示原則，我們可以發現對任何啟始籬柵狀態 x 跳至奇數籬柵狀態 y 時，其相對應輸出之編碼位元全部屬於子集合 Co 內之碼字；同理，若籬柵狀態 y 為偶數時，則全部屬於子集合 Ce 內之碼字。因此，藉由仔細選擇碼字子集合 Co 及 Ce ，使其滿足期望的集合內距和集合間距，我們即可設計出非災難性及大自由距離之具 2^m 個籬柵狀態點之籬柵碼。

在本研究中，我們利用上述籬柵碼架構之設計概念，從適當的區塊碼中，選出兩組互斥的碼字子集合，並滿足我們希望的集合內距和集合間距，建構出具有大自由距離之籬柵碼。我們並將所設計之具大自由距離之籬柵碼裝置在傳統的渦輪碼上，藉由其具較大自由距離的特性，來改善渦輪碼在中高訊雜比的表現。

三、研究方法與成果 (Methods and Results)

A、具大自由距離之 16 個籬柵狀態點之籬柵碼的設計

首先，我們所選定的碼字子集合 Co 為 (8,4,4) 里德穆勒碼 (Reed-Muller Codes) 之所有碼字之集合，碼字子集合 Co 共有 16 個碼字，而其集合內碼字間之最小距離為 4，該里德穆勒碼之生成矩陣 (Generator Matrix) 可表示如下：

$$G_{(8,4,4)} = \begin{pmatrix} 11111111 \\ 00001111 \\ 00110011 \\ 01010101 \end{pmatrix}$$

由於重覆性解碼技術都是應用在系統性編碼

(Systematic Encoder) 架構上。所以要使非系統性碼能採用重覆性解碼方式來進行解碼，就必須把它轉變為系統性碼，也就是能把訊息位元和檢查位元分別獨立出來。因此，為了使里德穆勒碼系統化，我們用列運算 (Row Operation) 來把它的生成矩陣系統化。

另外，在另一組碼字子集合 Ce 的選擇上，我們則選定一個適當的共用共通集代表元素 (Coset Leader) y ，並將子集合 Co 中之每一個碼字分別與 y 進行邏輯中的互斥或開運算 (Exclusive OR)，來產生與子集合 Co 互斥的另一組子集合 Ce 。其表示法如下：

$$Ce = \{y \oplus u \mid u \in Co\}$$

，其中 y 等於 $(0,0,0,0,0,0,1,1)$ 。

由於利用 Coset Leader 觀念所產生的子集合 Ce ，其集合內距會與子集合 Co 之集合內距相同，所以子集合 Ce 仍保持集合內碼字間之最小距離為 4。且由於子集合 Co 中之碼字與 y 進行互斥或開運算結果，並沒有改變 Co 中碼字內之訊息位元部分，所以所產生之碼字子集合 Ce 仍將維持系統性碼的特性，而兩組子集合 Ce 與 Co 之集合間之最小距離則為 2。我們再使用前章所提及之編碼器的籬柵表示原則，建構出具有十六個籬柵狀態點之籬柵碼，所得的編碼率 (coding rate) 為 1/2。

最後，我們注意到當籬柵碼由籬柵狀態 x 跳至籬柵狀態 y 時，依前章所提籬柵表示原則，當籬柵狀態 y 為奇數時，其相對應之輸出碼字來自子集合 Co 中之碼字，當籬柵狀態 y 為偶數時，其相對應之輸出碼字來自子集合 Ce 中之碼字。因此，我們必須防止這些分別來自 Ce 及 Co 之輸出碼字其訊息位元部分不可相同，否則當我們收到訊息位元時，將無法判斷籬柵狀態 x 應該跳至那個籬柵狀態。因此，如何對碼字子集合 Ce 及 Co 中 2^m 個碼字進行編號必須審慎規劃。在本研究中，我們所使用之編號規則如下：

| Co 碼字標示規則 | | | |
|-----------|----|----|----|
| L | C | L | C |
| 0 | 0 | 16 | 1 |
| 2 | 2 | 18 | 3 |
| 4 | 4 | 20 | 5 |
| 6 | 6 | 22 | 7 |
| 8 | 8 | 24 | 9 |
| 10 | 10 | 26 | 11 |
| 12 | 12 | 28 | 13 |
| 14 | 14 | 30 | 15 |

| Ce 碼字標示規則 | | | |
|-----------|----|----|----|
| L | C | L | C |
| 1 | 1 | 17 | 0 |
| 3 | 3 | 19 | 2 |
| 5 | 5 | 21 | 4 |
| 7 | 7 | 23 | 6 |
| 9 | 9 | 25 | 8 |
| 11 | 11 | 27 | 10 |
| 13 | 13 | 29 | 12 |
| 15 | 15 | 31 | 14 |

L：碼字之編號

C：碼字中訊息位元之十進位表示值為 C 之碼字

B、設計具有大自由距離的渦輪碼

我們將所建構出具十六個籬柵狀點的籬柵碼裝置在傳統渦輪碼上，另為提高編碼率，我們將成份碼所產生之檢查位元經過剷除器矩陣(Puncturing Matrix)，將某些檢查位元去除，使整體編碼率保持在 1/2。在本研究中，我們所使用之剷除器矩陣如下：

$$P = \begin{bmatrix} 0101 \\ 0101 \end{bmatrix}$$

C、模擬結果

我們用所建構之具十六個籬柵狀點的籬柵碼做為渦輪碼之成份碼，所用的錯開器為隨機(pseudo random)錯開器。我們將第一個成份碼的籬柵(trellis)尾端歸到零狀態(zero state)，而第二個成份碼的籬柵(trellis)尾端不歸到零狀態，在解碼上我們使用 Log-MAP 演算法來解碼，我們模擬的通道為加性白色高斯雜訊通道。圖 2 到圖 4 為我們所提出之編碼架構其除錯性能對疊代次數(iteration number)做圖，所使用的編碼長度(Block Length)分別為 512、1024 及 2048 code bits，由模擬結果顯示，我們發現 5 次疊代就已經足夠。圖 5 是比較所提出之編碼架構和傳統渦輪碼在相同錯開器長度、相同編碼率及相同複雜度下的除錯性能，圖 5 所參考比較

之傳統渦輪碼使用具十六個籬柵狀態點的遞迴式系統性二元迴旋碼做為成份碼，其成份碼生成矩陣(generator matrix)以八進位表示如下：

$$\left(1, \frac{37}{21}\right)$$

由模擬結果，我們發現在相同錯開器長度、相同編碼率及相同複雜度下，我們所設計的編碼架構在中高訊雜比時比傳統的二位元渦輪碼具有更佳除錯性能表現。

四、結論與討論(Concluding Remarks)

在本研究中，我們利用上述之設計概念，從選定的區塊碼中，設計出具大自由距離之籬柵碼架構。並將所建構出之籬柵碼裝置在渦輪碼上，來改善渦輪碼在中高訊雜比的表現。模擬結果發現，在中高訊雜比條件下，我們的碼比傳統的渦輪碼有優越的除錯性能，這是由於我們設計出之成份碼有較大之自由距離所造成。

五、參考資料(References)

- [1] C. Berrou, A. Glavieux, and P. Thitimajshima, "Near Shannon limit error-correcting coding and decoding: Turbo-Code(1)," *IEEE Int. Conf. On Communications*, 1993.
- [2] J. Hangenauer, E. Offer, and L. Papke, "Iterative Decoding of Binary Block and Convolutional Codes," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 42, pp. 429-445, Mar. 1996.
- [3] P. Robertson, E. Villebrun, and P. Hoeher, "A comparison of optimal and suboptimal MAP decoding algorithms operating in the log domain," in *Proc. ICC '95*, pp. 1009-1013.
- [4] F. Pollara, R. J. McEliece, and K. Abdel-Ghaffar, "Finite state Codes," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 34, no.5, pp.1083-1089, Sept. 1988.
- [5] P. Lee and J.K. Wolf, "A General Error-Correcting Code Construction for Run-Length Limited Binary Channels," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 35, no.6, pp.1330-1335, Nov. 1989.

六、圖表 (Figures and Tables)

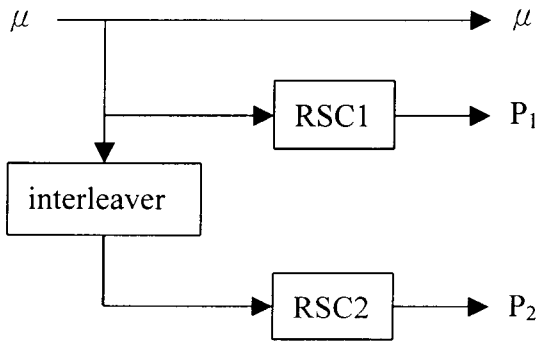


Figure 1: Turbo encoder structure

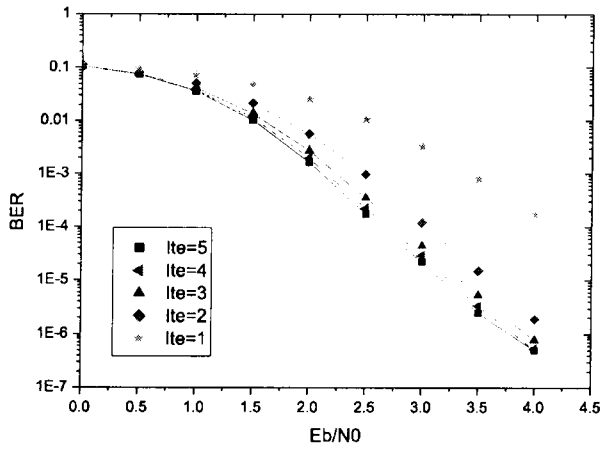


Figure 2: The BER versus the number of decoding iterations for the proposed codes, (Code Rate=0.5, block length=512, Ite:iteration number).

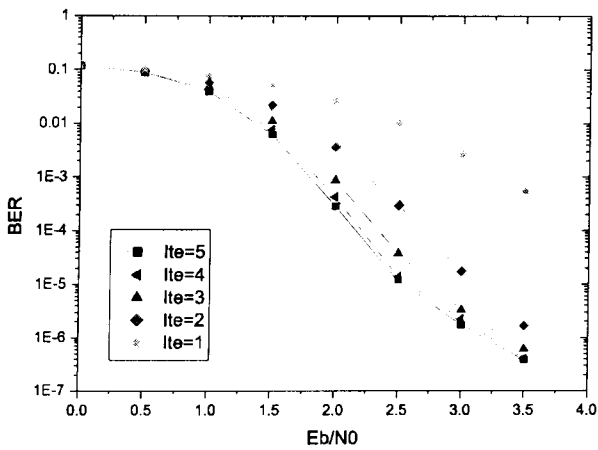


Figure 3: The BER versus the number of decoding iterations for the proposed codes, (Code Rate=0.5,

block length=1024, Ite:iteration number).

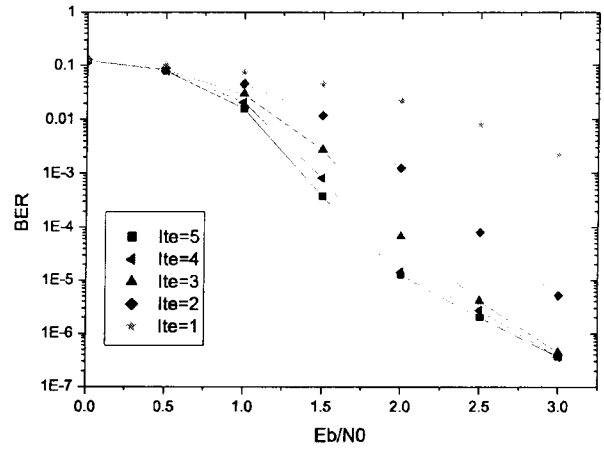


Figure 4: The BER versus the number of decoding iterations for the proposed codes, (Code Rate=0.5, block length=2048, Ite:iteration number).

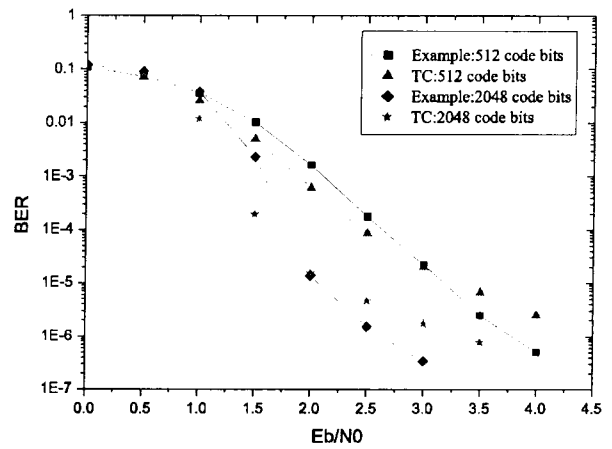


Figure5: Comparisons between the proposed codes and 16-state binary turbo codes (TC) with different block size, iteration=5 code rate=0.5.