

行政院國家科學委員會專題研究計畫 成果報告

總計畫暨子計畫：地聲與電磁波監測方法之應用（III）

計畫類別：整合型計畫

計畫編號：NSC92-2625-Z-002-024-

執行期間：92年08月01日至93年07月31日

執行單位：國立臺灣大學水工試驗所

計畫主持人：劉格非

報告類型：完整報告

處理方式：本計畫可公開查詢

中 華 民 國 93 年 12 月 17 日

行政院國家科學委員會補助專題研究計畫成果報告

土石流監測與預報系統之研究（三）

Debris Flow Monitoring and Forcasting System (III)

計畫類別：整合型計畫

計畫編號：NSC 92-2625-Z -002- 024 -

執行期間： 92 年 8 月 1 日至 93 年 7 月 31 日

計畫主持人：劉格非

計畫參與人員：李欣輯、黃登賢、陳盈蓁、張婉真

成果報告類型(依經費核定清單規定繳交)：完整報告

處理方式： 立即可公開查詢

執行單位：國立台灣大學土木工程系

中 華 民 國 93 年 10 月 31 日

目錄

第一章 前言	3
第二章 土石流監測與預報系統	10
第三章 地聲探測器	17
第四章 與電磁波探測器	51
第五章 結論	65

第一章 前言

1.1 整合計畫背景與緣由

土石流是一個非常複雜的問題，發生原因很多。從開始有單一石頭顆粒運動到發生大規模土石流動行為之過程中，其相關力學機制不但多而且複雜，多數力學機制到目前仍停在學理探索階段，因此土石流之發生或災害預報必須結合多種不同資料，再配上力學與統計才有可能得到較高百分比之預報成功率。因此將任何正在研究、已在利用或將來會研發的設備整合成一套系統是目前極重要的工作。國外的例子如美國地調所（USGS）在聖海倫火山(Mt. St. Hellen)地區結合地聲、紅外線、航照、水壓系統而成為火山土石流監測系統；義大利在 Italian Atps 用地聲、攝影機與超聲波結合之系統來監測泥石流；而日本京都大學防災研究所在澤田教授負責的觀測所（在 Gifu）更是將所有的儀器均整合並試用於一地點，因此該所在土石流之監測技術上可說是領先全球。由這些例子可瞭解一個集中並整合科技於現場之試驗場所對研究是非常重要的。

目前國內土石流之研究單位與學者雖然多，但方向與重點均不相同，尤其很少有完整並公開之試驗資料可供交流討論。而理論又缺少現場資料來證明，儀器亦缺乏現場應用來考驗，因此為了推動本土研究之進步，亟需建立一個供大家使用之平台。本群體計畫就是要朝此方向邁出第一步，先經由儀器之整合建立一個共享之監測中心，再由此刺激土石流研究方向之修正，最後建立所有研究成果之驗證標準。而要達成此一系統整合之目標，必須有一群人將過去研究成果朝此方向修正應用，為最終之目標踏出第一步，本研究群因而產生。

1.2 整合計畫總體目標

本整合計畫之總體目標預計有下列五項

1. 整合國科會過去土石流監測之相關研究
2. 研究並分析各類預測設備之能力與應用範圍
3. 發展一套結合各種土石流預測儀器之系統
4. 由土石流流變特性推估土石流之流動特性

以下就每一項分別作一說明：

1.2.1 整合國科會過去之相關研究

國科會過去的土石流相關研究均集中在一個群，其中有做基礎理論、有做應用、也有

做現場，因為目標不同，因此雖有交集，但其相互間之關係並不強。但各計畫經過多年研究，研究成果均大幅成長，本研究群即擬將過去研究群中從事監測與預警之部份成果結合，在結合過程中，可以推動各成果間之橋樑以建立一個真正整合的系統。有了整合之成果，才能突顯出國科會過去之研究成效。同時整合之後再加入使用者界面，來拉近理論與實務間之鴻溝，以確實彰顯防災研究之最後目標。

1.2.2 研究並分析各類預測設備（測量元件）之能力與應用範圍

土石流之監測與預警可以分成四個步驟來談。監為監視；測為測量；預為預報；而警為警告。許多測量儀器事實上是用來監視與記錄某個物理量之改變。例如許多壓力計是記錄儀器受外界作用時之電流量或變形值，再加上相關理論即可推為壓力之變化；又例如黑白攝影機在拍攝時是記錄環境中各點之亮度值，人類再利用亮度值結合成之形狀去判斷物理現象，如石頭形狀大小、石頭速度。因此我們在使用儀器時是在監視某一種資料，再利用不同理論去應用監視資料時就產生了測量的行為。同樣原理下，測量數據出來後又可利用不同理論將之應用於不同物理現象，進而預測物理現象之變化，例如用地聲探測器測得聲音之大小變化後，用聲波理論轉為土石流之距離進而預報土石流抵達時間，或用邊坡形變預報邊坡不穩之時間，並且運用流變特性之量測，評估土石流的運動行為與活動區域。有了這種預報與評估再結合該地區之特性，如地形、行政支援、人口分佈、產業結構、經濟分析、法律責任等考量後，就可以發佈警報，因此每一步驟在不同應考量之因素下都有不同的參考數據與應用理論。

因此儀器所得數據在監測與預警之過程中，可配合不同理論而產生多種不同用途與解釋方法。本研究之另一目的就是將各儀器所能適用之情況分清楚，在結合不同理論下，其產生預報結果之精度也要定義清楚，尤其在預報之時間長短和空間上的精度列為研究重點。

1.2.3 發展一套結合各種土石流預測儀器之系統

對本系統而言，元件又可分為測量元件、通訊元件與控制元件三類。測量元件是用來測量土石流相關之信號；通訊元件是用來聯繫各測量儀器與訊號傳輸；而控制元件是用來做自動控制、自動判別。本群體計畫之總計畫偏重通訊元件與控制元件，各子計畫則負責測量元件。而測量元件又可分為許多測量儀器。有了上節各儀器之功能界定之後，我們可以將預報儀器區分為間接測量、遙測與接觸式測量三類儀器，而此三類儀器之結合即成為

完整測量元件，因為各類儀器是組成元件之一部份，我們可稱之為子元件。

測量元件由上述定義可分為三類，而各測量元件因測量方法各有其優缺點，相互間之關係如圖一。

第一類：間接元件

這一類元件包括雨量測量與地下水電導度 (EC)，這一類資料嚴格說來與土石流並無絕對關係，在其它條件配合下，即可對土石流之發生做機率上之預測，因此這類資料多用於長期預報，如數小時到一天之預測時間，而這類元件在本群中由子計畫一負責（表一請見 3.1 節）。

第二類：遙測元件

這一類元件是在土石流發生前後由於土石流造成之地形、地貌改變或其造成之聲響、影像等資料，用遙測方式來取得，這一類資料可提供土石流中、長期之預測，如數十分鐘到數小時。

這種元件包括衛星照片、航照、攝影影像、電磁波、地聲等，本部份由第二與第四子計畫負責。

第三類：接觸式元件

這一類是在土石流通過河道時來感測其產生之力量所得數據，包括鋼索、土壓計、水壓計、傾斜儀、水位計、流速計、加速計等，這種子元件可依其裝設位置與預警對象位置不同而提供約 30 分鐘以內之短期預報，這部份由第三子計畫負責。

間接測量方法一般較易獲得資料，因為非直接測得土石流之發生，因此其準確性較低。但此較適合作長期預報。遙測式元件配合理論可作中期（如數小時）預報，且其精度高於間接測量。而接觸式的精度最高，但一般認為只適合用來做短期預報。因此我們設計之系統中測量元件之關係如圖一中之箭頭，而系統就靠通訊元件來串連所有測量元件與分散在各地之資訊，最後經過經濟、法律之考量建立警告條件。

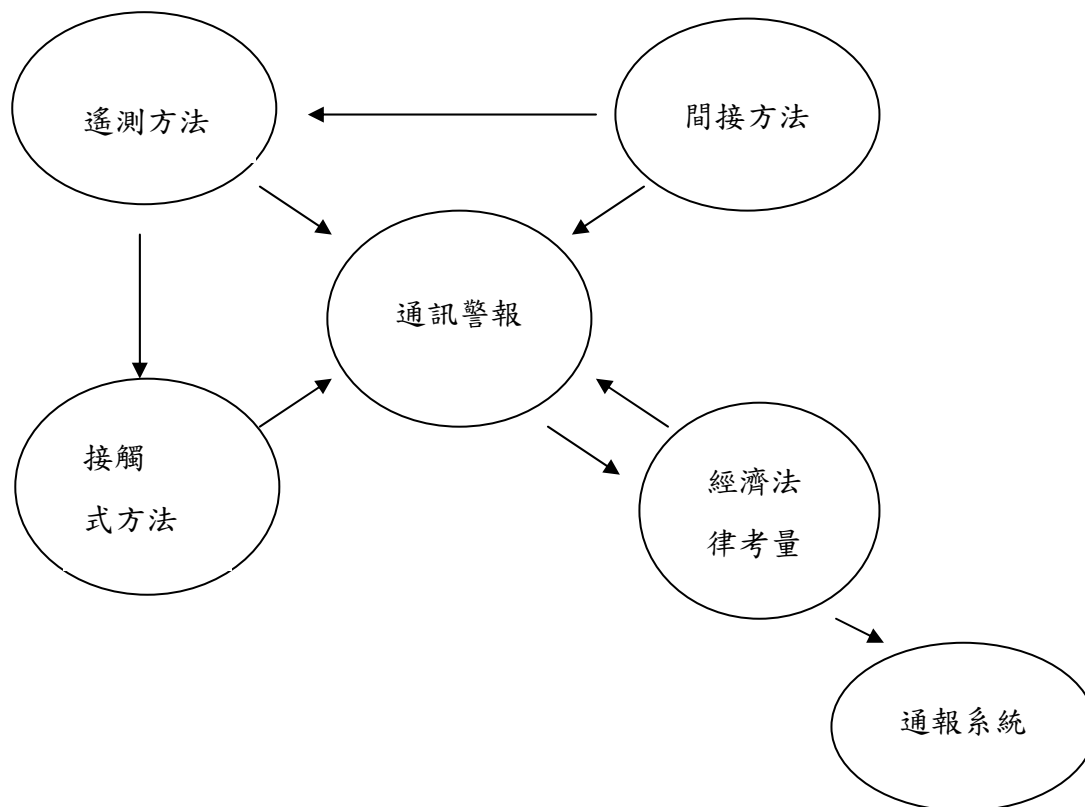


圖 1.1、系統架構

而 2000 年八月在台北舉辦之「第二屆國際土石流研討會」中的一場「現場經驗與學術研究」討論中也知道，要刺激學術研究的進步與創新，尤其需要應用者提出使用時之需求與現象，本研究群希望在研究的過程中將我們的測量資料與應用中產生的新的研究題材不斷提供其它研究土石流的學者，希望藉此建立土石流研究學界的一個新的、有效的互動關係。

1.2.4 建立一個土石流相關預測科技之展示與訓練中心

結合了所有測量元件，目的就是要推廣給使用者，這其中包括公家機關、民眾與百姓。本群擬利用國科會歷年在神木村附近累積之儀器建立一個測試區，所有過去與未來之儀器均將架設於此，一方面測試各元件間之互動與比較，一方面方便展示。

而這個神木村測量區也就成為當然之展示區，但因該地區交通不方便，因此我們將以虛擬實境之方式將神木村展示區在電腦上重現出來，一旦採虛擬 3D 互動式之展示後，則只要有軟體與網路，展示中心可以搬到任何地區。

最後在推廣之過程與成果整理之過程中，我們將對系統與其中的每一個元件建立教育與訓練之材料，使得這些方法能讓潛在使用者瞭解而自行決定要用那些方法。

三、研究群之分工架構、中心理念與互動關係

1.3 分工架構

依前一節所述之目的，本研究群之分工如圖二，而地聲與電磁波之應用子計畫因為研究者為總計畫主持人，因此併入總計畫

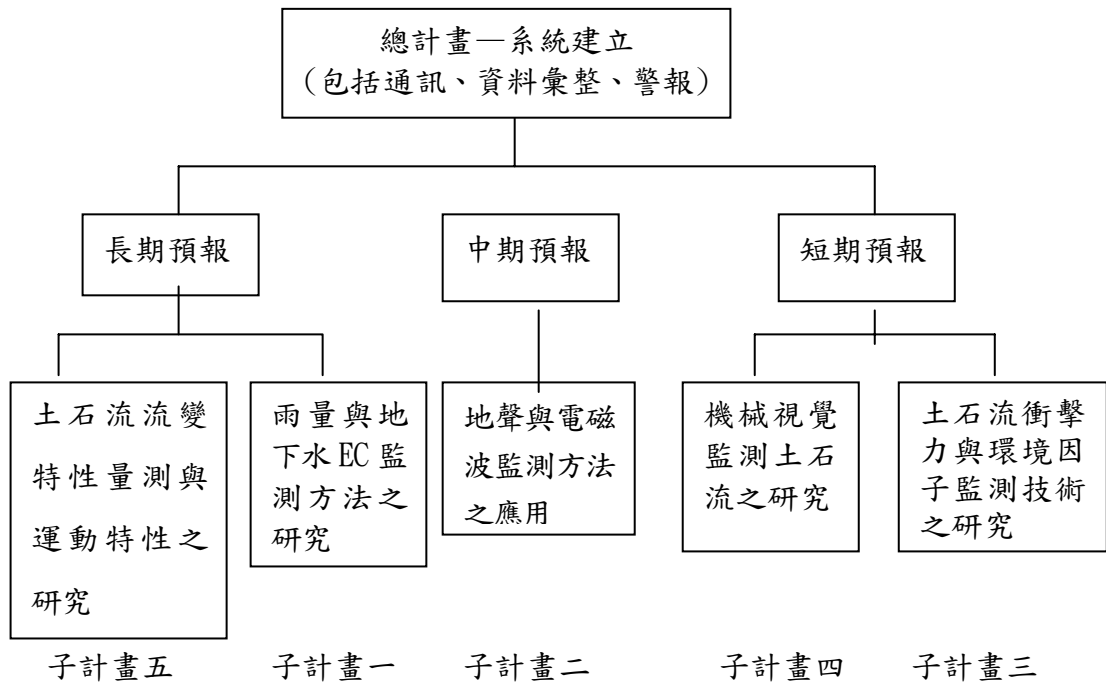


圖 1.2、分工架構

計畫項目	主持人	服務單位系所	職稱	計畫名稱
總計畫	劉格非	台灣大學土木系	教授	土石流監測與預報系統之研究
子計畫一	范正成	台灣大學農工系	教授	雨量與地下水電導度(EC)監測方法之研究
子計畫二	劉格非	台灣大學土木系	教授	地聲與電磁波監測方法之應用
子計畫三	林炳森	中興大學土木系	教授	土石流衝擊力與環境因子監測技術之研究
子計畫四	張守陽	台北科技大學土木系	教授	機械視覺監測土石流之研究

原則上子計畫第一年均是做室內試驗，將過去之成果做一整理與驗證，同時測試與規劃元件系統以備第二年現場工作。此部份之工作以一年來做，時間稍微不夠，因此會延續到第二年，但在第一年期間，各元件與系統之連線規劃必須完成。第二年主要為測試現場系統。第三、四年元件分別完成網狀佈設研究、元件功能確定與使用者界面三大工作，並且在發生監測外引入運動分析，以利空間預警之決定，而總計畫在第三、四年之重點則在通報元件，教育訓練中心之工作，警告部份會進行研究，但其成果較難評估。

在各測量子元件之研究過程中，本研究群將以系統發展之概念來發展各元件，期望將來發展出來之系統可以比擬為一台電腦，而各子元件一旦發展成子系統，就好像電腦中之晶板，可以隨插即用來增加系統之不同功能。因此所有元件之研究將遵循圖三之概念。

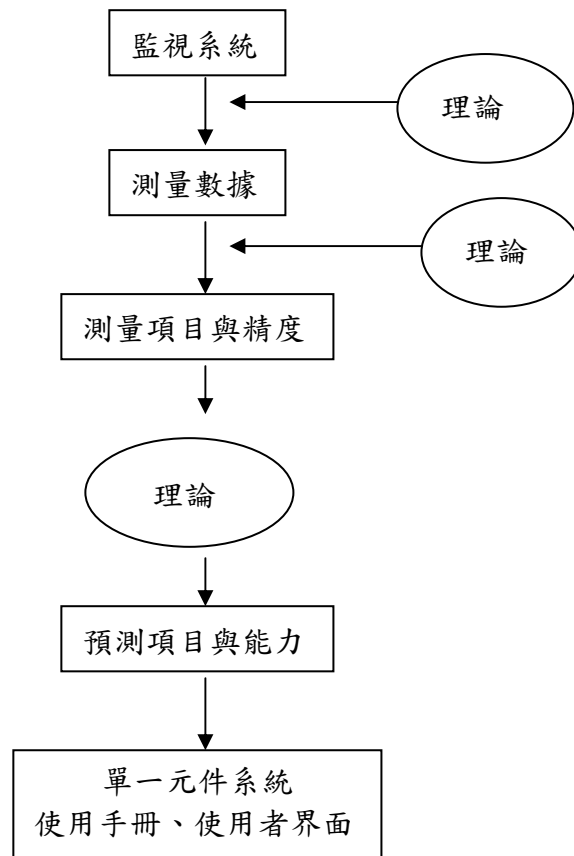


圖 1.3、元件系統研究構想

同時在各測量研究之過程中，本研究群也將配合 ISO 之觀念，定出未來任何測量元件要發展到實用並能整合進入本系統所需要經過之標準步驟。例如我們可以訂定任何一個現地使用之儀器應該進行 (1) 室內實驗 (2) 現地實驗 (3) 元件系統現地使用性 (4) 元件輸出規格標準測試等四個步驟，將來儀器若能通過這四個步驟，並提出書面資料，則大家可以接受這是一套已經由理論發展而成可應用於現場之儀器。

子計畫間之互動關係

總計畫負責結合各類測量資料並集結各地資料來做通盤研判，並將完全系統展現給使用者，但對每一元件如何由其測量之數值轉成物理值(例如 Load cell 是測電壓值，但需轉成位移值或壓力值才有用)，及如何由物理值轉成土石流之預報(例如雨量多少時會發生土石流及地聲多大時代表土石流還有多遠等資訊)，均是各子計畫研究多年之成果，因此總計畫需各子計畫提供相關之研究成果，才能做綜合研判，做到如圖一之長、中、短期預報互動之模式。

而監測一個事件之過程中，系統之規劃是在間接資料發出初步警訊時(如雨量超過某一程度)，即將間接元件與遙測元件之監測頻率加快，若遙測元件也顯示土石流之可能，則再把接觸元件之監測頻率也加快，如此才能在有限資源下完整監測一場土石流之發生，而當接觸元件確認土石流通過後，則依次將遙測元件與間接元件之監測頻率降回正常。

而子計畫則靠總計畫將資料收集，並對現場做互動式遙控，同時需經過總計畫才能得到與其它理論之比較。因此若缺了任一子計畫，這群體計畫成果將缺乏彈性且顯得不完整。

第二章 土石流監測與預報系統

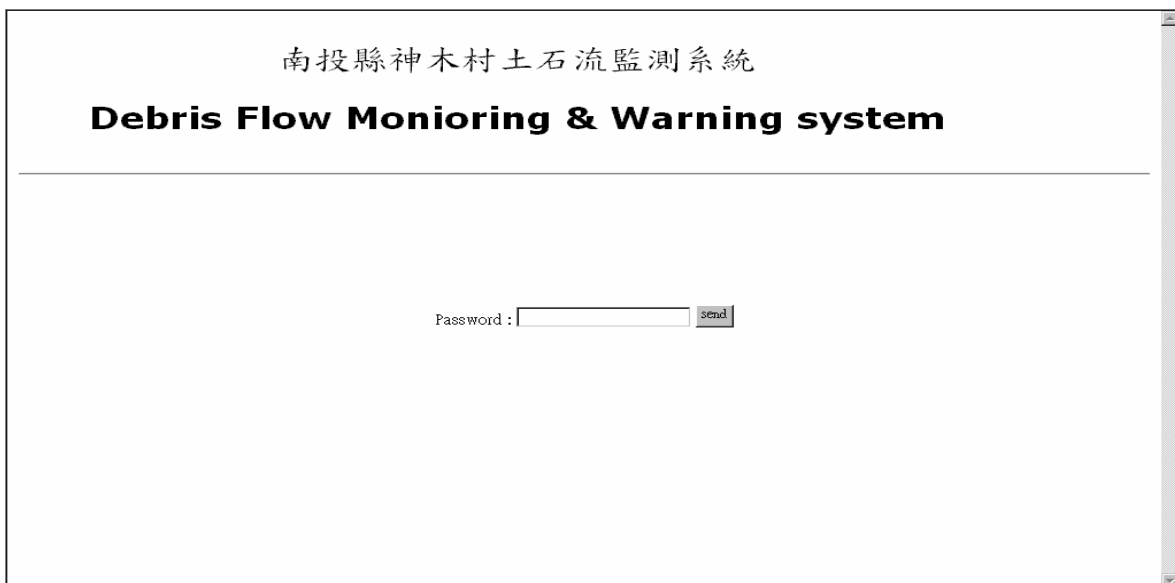
2.1 前言

土石流監測是一個全世界正在進行之研究，世界上有名的監測系統如美國聖海倫火山監測網、大陸九寨溝土石流監測系統，歐洲在阿爾卑斯山區由瑞士與義大利等國建造之監測系統等都算是較成功且有監測成果的重要地點，不過上述系統也都只做到監測，但未到測警之階段。本研究群即是要建立一套示範性之整合性之監測預警系統。

一般會發生土石流之地點，地質定破碎，地形也不多容易變動，因此任何有形之線路如電源線、網路線就常常會在災害時期被破壞而造成訊號中斷，最重要的信號因此無法傳到指揮中心，因此本系統之設計為無線系統。無線系統目前可供考慮的是大哥大(GSM, GPRS, PDA, 等)、無線網域系統、無線對講機或衛星通訊系統。衛星系統之造價與維護均極昂貴，本研究暫不考慮。無線對講機僅適合短距離使用，且不易自動化，因此本研究採大哥大為遠距傳訊，無線網域為短距傳訊。目前通訊採先將神木測站之所有資料以無線區域網路傳到神木國小，到了神木國小之後，平常有電、網路也通時，走一般網路，訊號可傳到任何地方，上網即可接收。但在神木國小斷電或網路不通時，訊號將自神木國小由 GSM (大哥大系統) 傳送。因此監測人員若所在地點沒有網路可用，也可用 GSM 來傳訊，甚至人員在移動中也可透過此系統對現場做監測，因此可說是移動式遙控中心。

2.2 監測系統

目前監測資料也可上網觀看，網址<http://163.22.163.245/>，入口密碼為Hello。監測資料為公開資料，所有人都可上網去看，一進入網頁可以看到首頁為

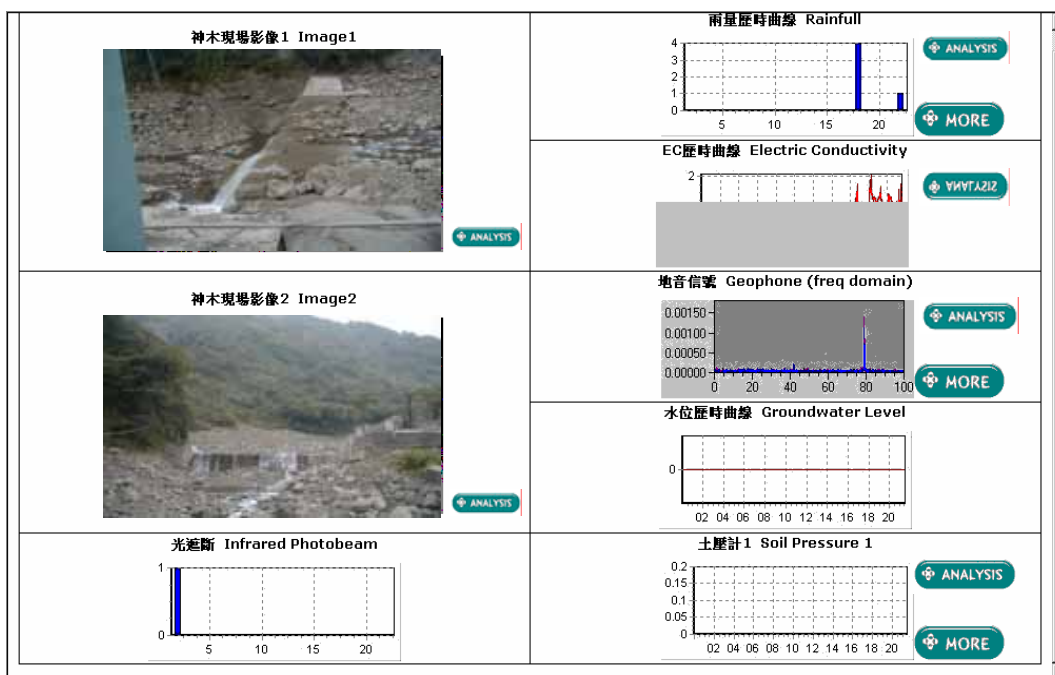


The screenshot shows a web browser window with the following content:

- Header: 南投縣神木村土石流監測系統
- Title: **Debris Flow Monitoring & Warning system**
- Form: A password field labeled "Password:" followed by a text input box and a "send" button.

只要輸入密碼「Hello」，即可進入系統觀看所有儀器的資料，系統會整合所有監測儀器之信號為圖 2.1 之網頁

圖 2.1、監控主畫面



監控畫面除展示當時所監測到的資料外，也可以按不同理論將監測資料轉換成土石流相關資訊，如土石流發生機率、土石流可能發生距離、土石流通過時間和土石流流速等，在監測畫面右方有轉換鈕，使用者只要點選即可。目前神木測站之相關硬體設備見表 2.1：

名稱	單位	數量
1. 雨量計	台	2
2. UPS	台	1
3. 投射燈光源	台	2
4. CCD	台	2
5. Geophone(地聲探測器)	台	3
6. 無線 Modem(GPRS)	台	1
7. 鋼索檢知器	台	1
11. 現場小屋	個	2
12. 工業級中央處理器	台	1
14. 電子式地下水壓計	組	1
15 GSM	組	1
16 太陽能電池	片	10
17 光遮斷器	組	1

表 2.1、神木測站之相關硬體

而且系統因為加了十片 80 瓦太陽能電池，因此即使斷電時，若 CCD 不需打光，系統可在沒有陽光的情形下維持 72 小時的高頻率紀錄運轉，若需打光，則可支持連續 3 小時的打光。

各儀器的監測資料都可點選進入而看到，例如若想看三個地聲的資料，可點選地聲旁的 More 按鈕，即可看到以下畫面，包含三個地聲的資料與地點，畫面分別可以顯示上、中、下游三個地聲的位置與接收之訊號，左方為原始時間序列資料，右方為左方視窗經過快速傅立葉轉換後之結果，如果在 20-100Hz 的訊號強度到達平時雜訊強度十倍時，就會有自動警訊「偵測到土石流訊號」出現，並啟動攝影機來錄影。

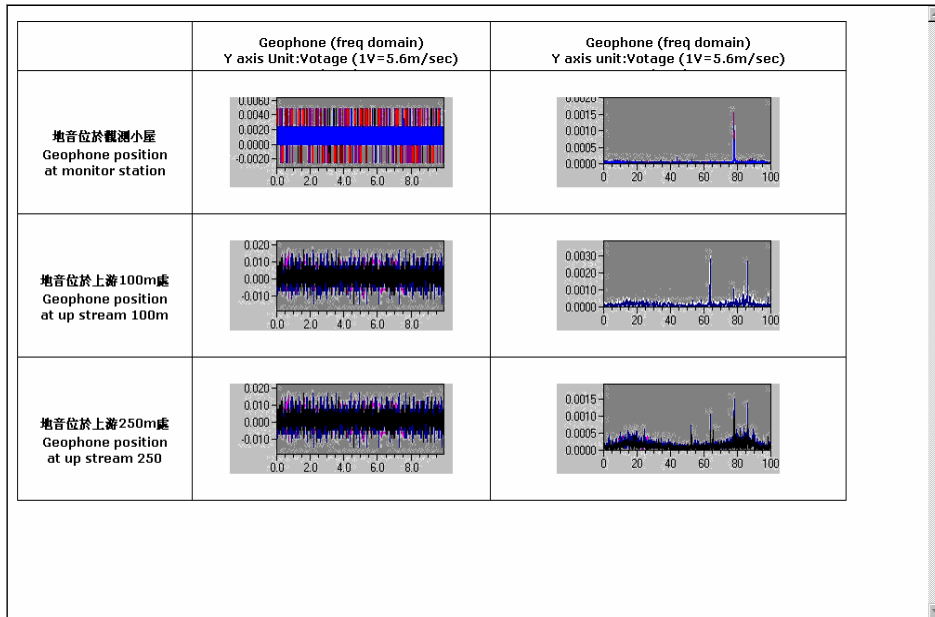


圖 2.2 地聲探測器監測畫面

又例如想看上下游的雨量資料，就可以點選雨量旁的的 More 按鈕，即可看到圖 2.3

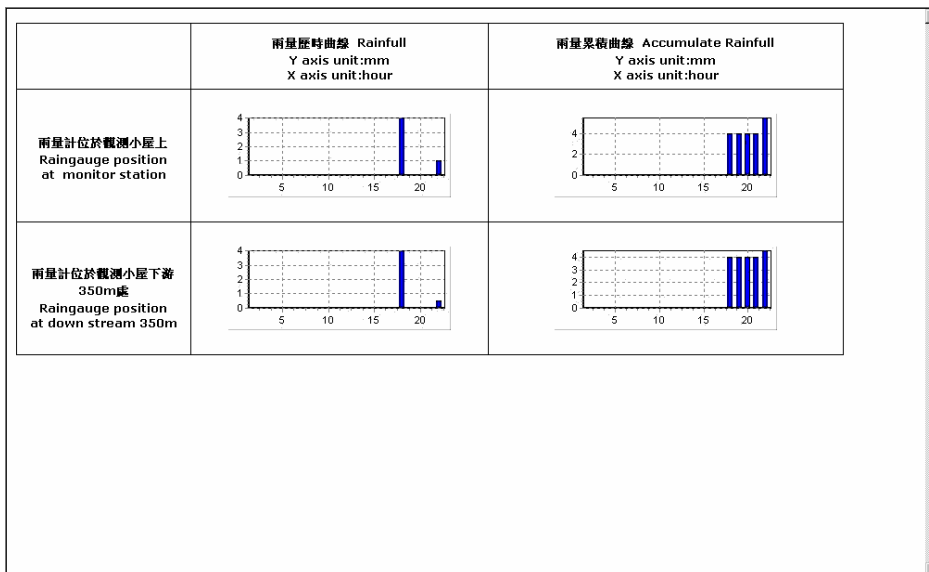


圖 2.3 上下游雨量監測資料畫面

而若按分析鈕，則依照子計畫理論分析出的土石流發生機率圖就會出現如圖 2.4

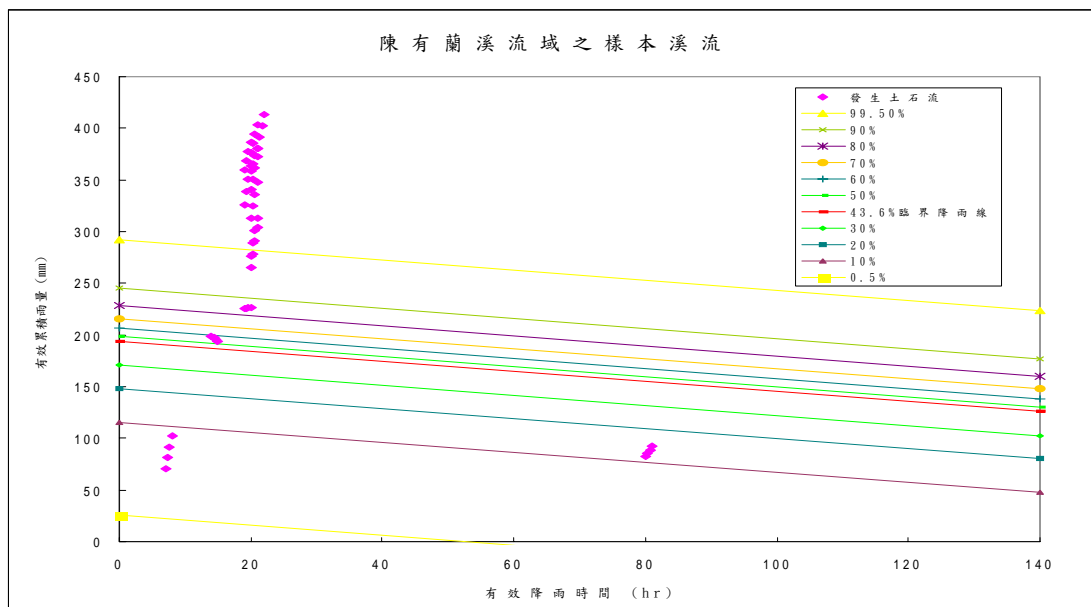


圖 2.4 利用雨量來分析土石流發生機率

其他儀器有一樣的展示與分析功能，例如影像部分，就可以利用子計畫五來分析土石流相關資訊，例如按了影像分析鈕並選擇「Pattern Analysis」後，分析資料與影像會顯示如圖

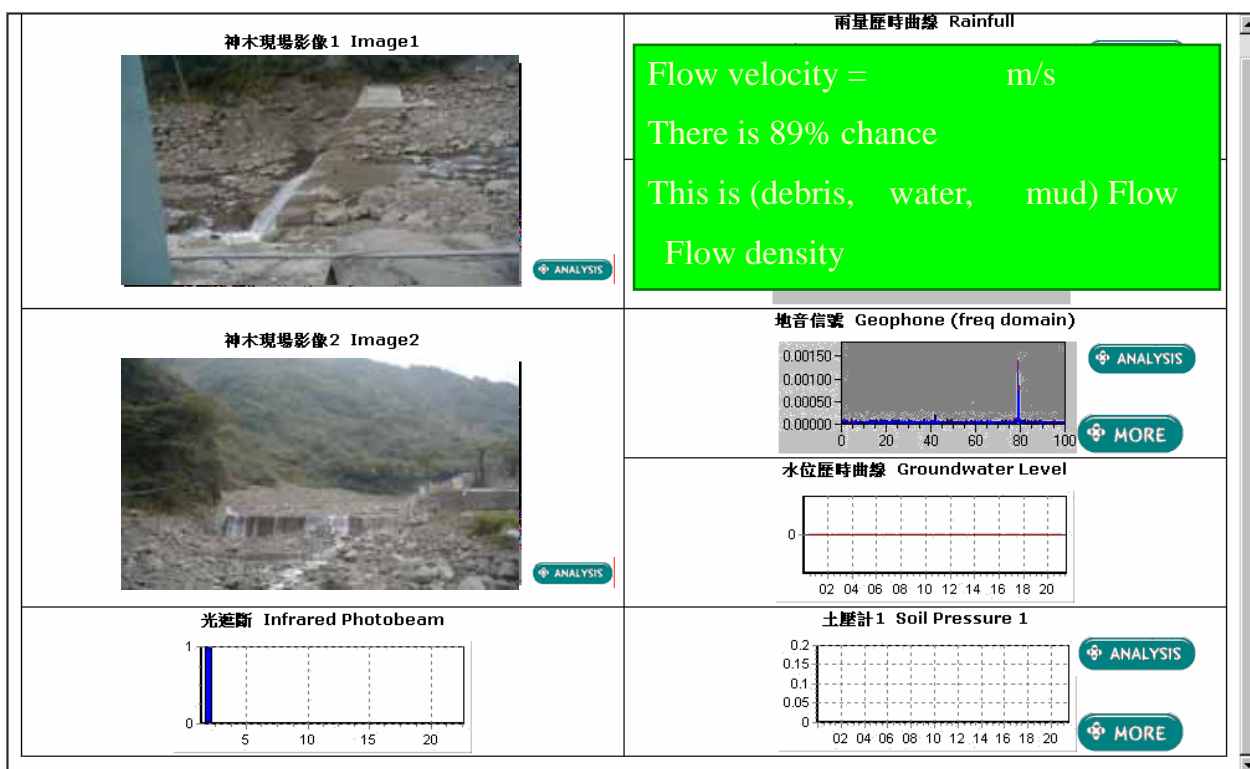


圖 2.5 利用影像來分析土石流資訊

為了能讓各儀器間有足夠的互動與相互節省資源，目前各儀器間有相互驅動的機制，還有儀器退場機制，詳細如下圖

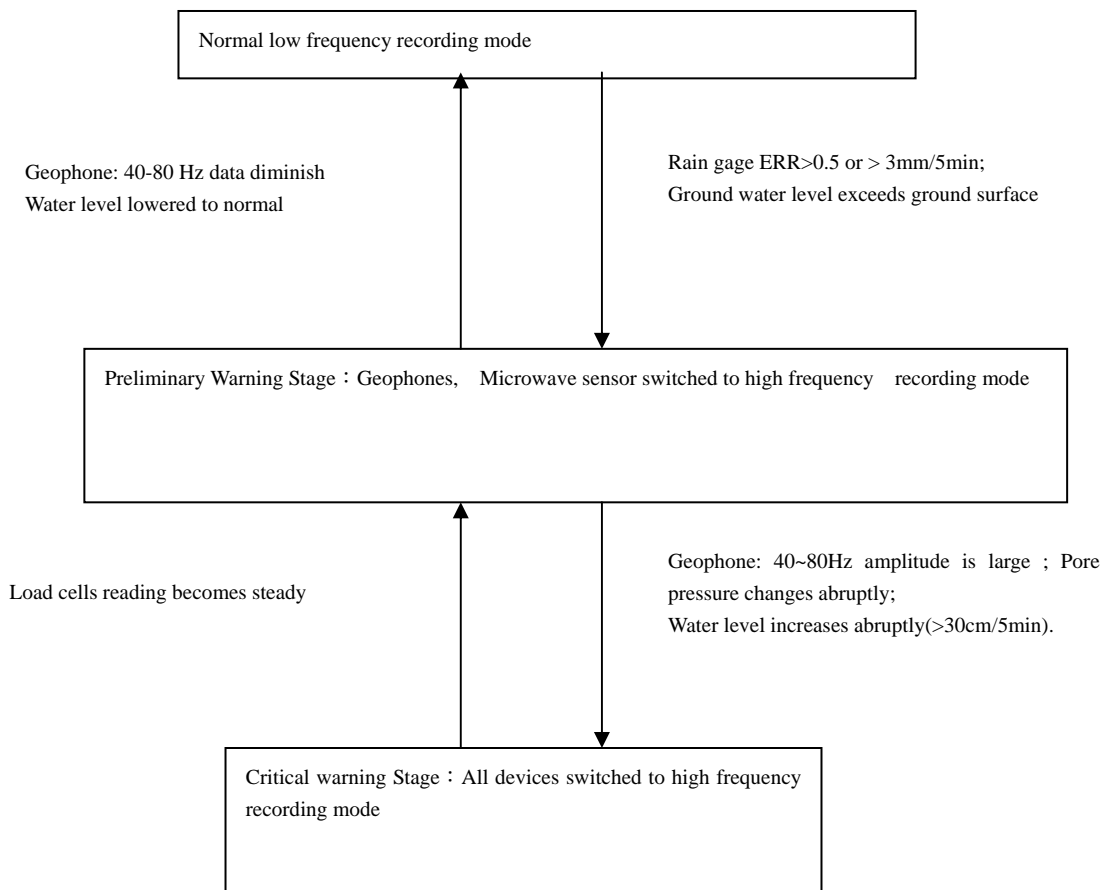


圖 2.3 、設備互動機制

裝置好的主現場如圖 2.4，照片可以顯示整個系統安裝完畢。



圖 2.4 照片右側小屋為所有資料蒐集中心與傳輸中心。



圖 2.5 照片顯示太陽能面板裝置方式，十片面板形成一個長廊形。



圖 2.6 第一套 CCD 與照明設備裝置於小屋旁，雨量計在屋頂。



圖 2.7 於神木國小旁另有雨量計和地下水 EC 探針

第三章 地聲探測器

3.1 前言

台灣因地形陡峭且地形破碎，經過多年山坡地開發及九二一地震後，造成山坡地的土石鬆動。台灣地區年平均降雨量為 2500 公厘，約為全球平均降雨量的二倍，每當颱風及豪雨，大量的雨水與鬆動的土石混合形成土石流，常常發生土石流災害，造成人員傷亡及金錢損失；如：桃芝颱風。

一般工法上都設置一些抑制土石流動的結構物；然而土石流是大面積的災害，在無法有效抑制土石流的發生與流動時，預測土石流發生位置及流動方向就是一個重要的課題。若能有效預測土石流發生位置及流動方向，便能在土石流發生或開始流動時，先行疏散下游居民，以減少人員傷亡及金錢損失。

土石流在上游流動時，在下游會聽到低沉的聲音；此現象是在固體介質中，能量以波的形式傳遞，此即固體波；當固體波傳遞到空氣時，固體波會產生聲波，而從固體波傳遞到空氣中的聲波能量，只有固體波的能量的一小部分，絕大多數的能量都在固體中以固體波傳遞。

聲波是一個定義的名詞，在空氣中傳遞的聲音屬於縱波；縱波是介質震動方向與波傳方向平行。人類聽到的聲音是藉著空氣中分子震動，影響耳膜震動，在經由神經傳遞到大腦的聽覺區塊，人類才聽到聲音；水中的聲納技術也是藉著縱波來傳遞能量的。在空氣及水中，其抗剪強度非常低，都是藉著介質不停的壓縮與伸展來傳遞能量；但在固體介質中，固體的抗剪強度增強，除了縱波之外，還有橫波；橫波是介質震動方向與波傳方向垂直，因此我們所稱的地聲，是包含了縱波與橫波。

3.2 前人研究

固體彈性波傳理論已發展許多年。在固體波傳理論之外，Biot(1956a, 1956b)發展飽和孔隙彈性介質波傳理論，孔隙中液體為可壓縮黏性流體。其波傳理論分為兩部分：在低頻時，液體為 Poiseuille flow；在高頻時，由特徵頻率及四個無因次參數來描述。由 Biot 的波傳理論解得兩個縱波及一個橫波，並由 Hovem and Ingram(1979)利用實驗分別得出這三個波傳現象。

利用地聲探測器(geophone)研究土石流地聲特性方面。劉與李(1999)得實驗結果，其訊號分析是利用快速傅利葉轉換(Fast Fourier Transform)將時間域訊號轉換到頻率域，得出頻率與能量之間的關係。李並分析出土石滑動頻率分佈在 20~35Hz 之間，石頭滾動及相互碰撞頻率分佈在 40~60Hz 之間。謝等人(2000)得實驗結果，利用 Gabor Transform 將

時間域訊號轉換到時間-頻率域，得出時間、頻率與能量三者之間的關係。其實驗分兩部分：第一部分為摩擦與自由落體實驗，由實驗結果得知土石材料間相互摩擦的頻率分佈在 20~80Hz 之間，而土石材料間相互碰撞的頻率分佈在 800Hz 以內，但大多集中在低頻。第二部分為土石流渠道實驗，由實驗結果得知，礫石型土石流地聲頻率範圍分佈在 20~200Hz 之間。Arattano(2003)將一系列 ground vibration detector 設置在野外，當土石流流過有高差的河床時，利用訊號分析土石流前鋒速度。

3.3 基本理論

(一) 推導介質受力的控制方程式

令平面 xy 為地表，如圖：

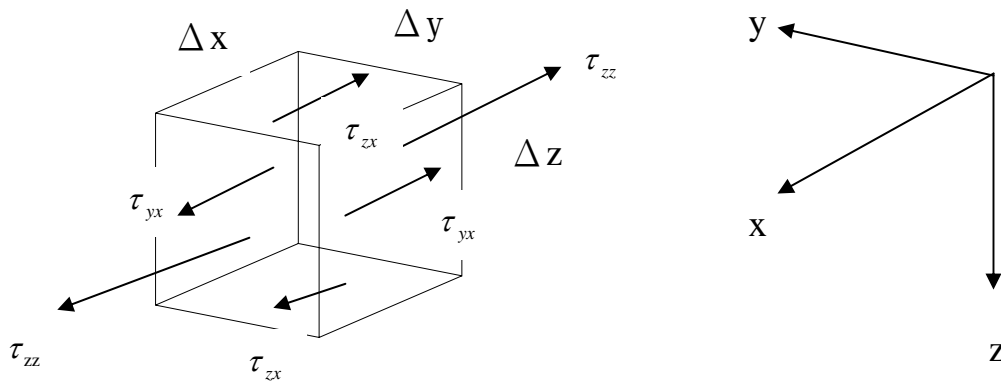


圖 3.1 微小立方體受力及座標

假設此介質為線性彈性、均質(homogeneous)且等向(isotropic)的彈性體。考慮介質中微小立方體受力，其受力包含遠距力及表面力，遠距力如：重力、電磁力，表面力如：應力。

利用牛頓第二運動定律，推導介質受力的控制方程式。在 x 及 y 方向不受重力影響，在 z 方向由於介質所受重力已經作用且平衡，介質的運動純粹是受外力影響。以彈簧位移為例：吊在天花板的彈簧，彈簧底部綁一個鐵球，彈簧會受鐵球重力而伸長，當彈簧靜止時，施一外力將鐵球向下拉一段距離後放手，此時考慮的是外力所造成的彈簧位移，而不包含鐵球重力所造成的彈簧位移，因此不考慮重力。

令 ρ = 密度 (kg/m^3)

τ_{ij} = 介質中微小立方體所受的應力 (F/m^2)

\vec{v} = 速度向量 (m/s)，其中 v_1 、 v_2 、 v_3 分別為 x、y、z 方向的速度分量

\vec{u} = 位移向量 (m)，其中 u 、 v 、 w 分別為 x、y、z 方向的位移分量

M = 質量 (kg)

首先考慮 x 方向受力情形，由牛頓第二運動定律：

$$\begin{aligned} \sum_x F &= \frac{d}{dt}(Mv_1) \\ \Rightarrow [\tau_{yx}(x, y + \Delta y, z, t) - \tau_{yx}(x, y, z, t)]\Delta y \Delta z &+ [\tau_{yx}(x, y + \Delta y, z, t) - \tau_{yx}(x, y, z, t)]\Delta x \Delta z \\ &+ [\tau_{yx}(x, y + \Delta y, z, t) - \tau_{yx}(x, y, z, t)]\Delta x \Delta y = \left(v_1 \frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{dv_1}{dt} \right) \Delta x \Delta y \Delta z \end{aligned} \quad (3.1)$$

對(3-1)式作尺度分析：

令 $u = \varepsilon U$ ， ε 是 x 方向位移量的尺度大小， U 是無因次參數

$x = LX$ ， L 是 x 方向的尺度大小， X 是無因次參數

$t = \bar{t}T$ ， \bar{t} 是時間的尺度大小， T 是無因次參數

$\rho = \bar{\rho}\hat{\rho}$ ， $\bar{\rho}$ 是密度的尺度大小， $\hat{\rho}$ 是無因次參數

代入(3-1)式等號右邊括弧內兩項，得：

$$o \left(\frac{v_1 \frac{d\rho}{dt}}{\rho \frac{dv_1}{dt}} \right) = o \left(\frac{\frac{du}{dt} \frac{d\rho}{dt}}{\rho \frac{d^2u}{dt^2}} \right) = o \left(\frac{\frac{\Delta\varepsilon}{\Delta\bar{t}} \frac{\Delta\bar{\rho}}{\Delta\bar{t}}}{\bar{\rho} \frac{\Delta\varepsilon}{\Delta\bar{t}\Delta\bar{t}}} \right) = o \left(\frac{\Delta\bar{\rho}}{\bar{\rho}} \right) \quad (3.2)$$

由膨脹模數 B (bulk modulus)：

$$B = \frac{P}{\frac{\Delta\rho}{\rho}}$$

P 是單位壓力， ρ 是密度， $\Delta\rho$ 是受壓後密度的變化量。

$$\text{鐵的膨脹模數 } B = 160 \times 10^9 \frac{N}{m^2}$$

$$\text{水的膨脹模數 } B = 2.2 \times 10^9 \frac{N}{m^2}$$

本研究的問題的介質是彈性體，其密度約 1.45g/cm^3 ，根據此密度大小找尋相當的膨脹模數，根據此密度所對應的膨脹模數約為

$$B = 1 \times 10^9 \frac{N}{m^2}，\text{所以(3.2)式：}$$

$$o\left(\frac{\Delta\bar{\rho}}{\bar{\rho}}\right) \ll 1$$

因此忽略(3.1)式等號右邊括弧內第一項；在(3.1)式等號左邊，利用泰勒展開式展開，並忽略高次項，得：

$$\frac{\partial\tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z} = \rho \frac{d}{dt} \left(\frac{du}{\partial t} \right)$$

由全微分展開式將上式等號右邊括弧內展開，得：

$$\frac{\partial\tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z} = \rho \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla u \right) \quad (3.3)$$

對(2-1-2)式等號右邊括弧內兩項作尺度分析，將向量式 \vec{v} 、 \vec{u} 以張量分別表示成 v_i 、 u_i 。因為在單位長度下的單位位移量很小，而且是從零開始變化的。所以 $o(L) = o(\Delta L)$ 、 $o(\varepsilon) = o(\Delta\varepsilon)$ 且 $L \gg \varepsilon$ ，得：

$$o\left(\frac{\frac{\partial u}{\partial t}}{\vec{v} \cdot \nabla u} \right) = o\left(\frac{\frac{\partial u}{\partial t}}{\frac{du_i}{dt} \frac{\partial u}{\partial x_i}} \right) = o\left(\frac{\Delta L}{\Delta\varepsilon} \right) \gg 1$$

因此忽略(3.3)式等號右邊括弧內第二項，得：

$$\frac{\partial\tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z} = \rho \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) \quad (3.4)$$

由全微分展開式再將(3.4)式等號右邊展開，得：

$$\frac{\partial\tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z} = \rho \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) + \vec{v} \cdot \nabla \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) \right] \quad (3.5)$$

對(3.5)式等號右邊括弧內兩項作尺度分析，得：

$$o\left(\frac{\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)}{\vec{v} \cdot \nabla \frac{\partial u}{\partial t}} \right) = o\left(\frac{\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)}{\frac{du_i}{dt} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)} \right) = o\left(\frac{\Delta L}{\Delta\varepsilon} \right) \gg 1$$

因此忽略(3.5)式等號右邊括弧內第二項，得：

$$\frac{\partial\tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z} = \rho \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) \quad (3.6)$$

(3.6)式為介質在x方向受力的控制方程式，同理可推導出y及z方向的控制方程式，並以張量式表示：

$$\frac{\partial\tau_{ij}}{\partial x_j} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad i, j=x, y, z \quad (3.7)$$

令介質為等向的情況下，以張量式表示應力與應變的關係

(Timoshenko, 1951)為：

$$\tau_{ij} = \lambda \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + 2\mu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (3.8)$$

其中 $\frac{\partial u_k}{\partial x_k} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$ ， u 、 v 、 w 分別為 x 、 y 、 z 方向的位移量， λ 及 μ 為 Lamé's

constant。將(3.8)式代入(3.7)式，並以向量式表示，得：

$$\begin{aligned} \rho \ddot{\vec{u}} &= (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \vec{u}) + \mu \nabla^2 \vec{u} \\ \Rightarrow \rho \ddot{\vec{u}} &= \mu \nabla^2 \vec{u} + (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \vec{u}) \end{aligned} \quad (3.9) \quad \text{其中}$$

$\vec{u} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$ ， \vec{u} 為位移向量， u 、 v 、 w 分別為 x 、 y 、 z 方向的位移量，(3.9)式為介質受力的控制方程式之向量式。

(3.9)式是介質受力但不受阻尼力影響的控制方程式。阻尼力(damping force)是物體在運動時，受到周圍其他不同介質的影響，使得物體運動隨時間趨緩。如：將鐵球吊在空氣中的彈簧，當我們將鐵球向下拉一段距離後放開，鐵球開始震動，但受到空氣阻力的影響，鐵球震動的距離會越來越小，最後會靜止，此空氣阻力即阻尼力。

此研究一開始是將介質視為單一密度、均勻的彈性體，在彈性體內是均質且等向的。彈性體中沒有其他介質，理論上是不考慮阻尼力的影響。但在本研究中，實驗的砂石是不飽和且孔隙中大多是空氣，因此砂石顆粒之間會有相當大摩擦，所以阻尼會很大。

考慮在(3.9)式中加入阻尼力，一般阻尼力以速度表示，阻尼力是正比於一阻尼係數乘上物體運動的速度，在本研究中令此阻尼係數為常數。直接考慮介質中單位體積物體的阻尼力，即：

$$\vec{d}_f = \rho J \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \rho J \dot{\vec{u}}$$

其中

\vec{d}_f 為阻尼力的向量式

\vec{u} = 位移向量，其中 u 、 v 、 w 分別為 x 、 y 、 z 方向的位移分量

J = 阻尼係數

所以(3.9)式加入阻尼力，得：

$$\begin{aligned} \rho \ddot{\vec{u}} + \vec{d}_f &= \mu \nabla^2 \vec{u} + (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \vec{u}) \\ \Rightarrow \rho \ddot{\vec{u}} + \rho J \dot{\vec{u}} &= \mu \nabla^2 \vec{u} + (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \vec{u}) \end{aligned} \quad (3.10)$$

(二) 三維點源有限域解

本研究的實驗，砂石選用通過 4 號篩及 5 號篩的砂石，放入砂箱中並填滿砂箱但不飽和，將地聲探測器放入砂石中，此地聲探測器所量測的資料可以轉換成速度，在實驗設備時會描述其如何轉換。在砂石表面固定一點，鉛球離砂石表面 1 公尺的垂直高度放下，移動地聲探測器到距離鉛球掉落處不同的水平位置，以探測距離點源不同位置的速度變化量。

配合實驗條件，建構理論的問題。

(1) 問題描述

考慮三維且 x 、 y 、 z 方向皆為有限邊界，在 $z=0$ 的平面上有一垂直平面的作用力作用在點 $(a, b, 0)$ ；在 $x=0$ 、 H ， $y=0$ 、 L ， $z=D$ 處有堅硬的邊界，位移量為零且應力連續。座標系統如圖：

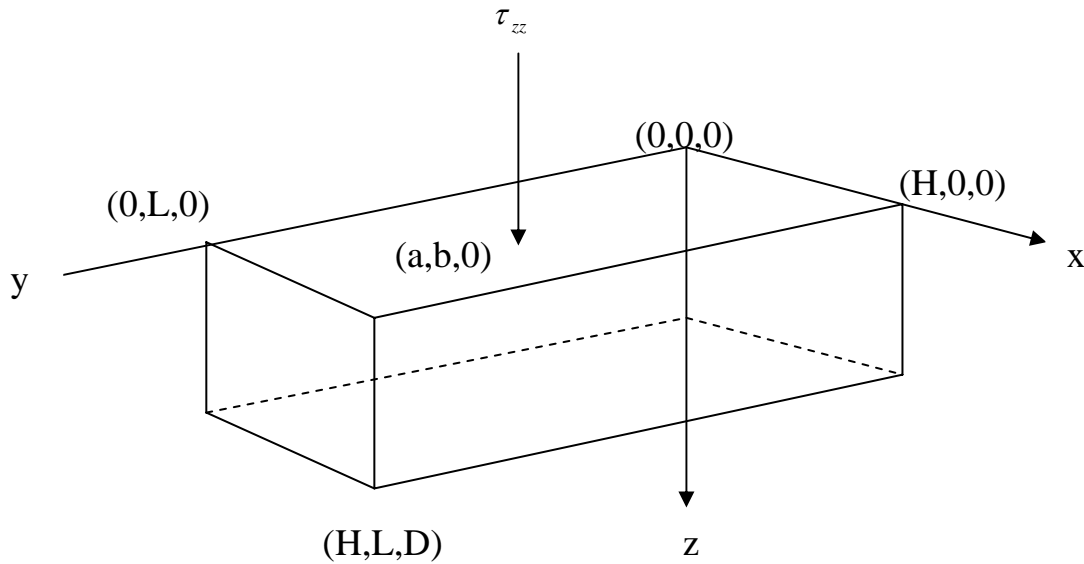


圖 3.2 三維點源受力

根據 Helmholtz theorem (Arfken, 1970; Phillips, 1956)，將位移向量 \vec{u} 表示成：

$$\vec{u} = \nabla\phi + \nabla \times \vec{\psi}, \quad \nabla \cdot \vec{\psi} = 0 \quad (3.11)$$

其中

ϕ 為 scale potential

$\vec{\psi}$ 為 vector potential，將其向量式表示成： $\vec{\psi} = \psi_1 \vec{i} + \psi_2 \vec{j} + \psi_3 \vec{k}$

$\nabla \cdot \vec{\psi} = 0$ 為 gage condition

ϕ 、 ψ_1 、 ψ_2 、 ψ_3 這四個變數，其中三個是獨立的，這三個獨立變數分別是 ϕ 及 ψ_1 、 ψ_2 、 ψ_3 中的其中兩個。由 gage condition 知，若已知其中兩個 ψ 就可以由 gage condition 求得

令一個 ψ 。

將(3.11)式代入(3.10)式，得：

$$\nabla\left[\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} + J\frac{\partial\phi}{\partial t} - \frac{\lambda+2\mu}{\rho}(\nabla^2\phi)\right] + \nabla\times\left[\frac{\partial^2\bar{\psi}}{\partial t^2} + J\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial t} - \frac{\mu}{\rho}(\nabla^2\bar{\psi})\right] = 0 \quad (3.12)$$

由 Helmholtz theorem，(3.12)式可分解(Anchbach, 1973)成：

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{c_p^2}\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} + J\frac{\partial\phi}{\partial t}\right) \quad (3.13)$$

$$\nabla^2\bar{\psi} = \frac{1}{c_T^2}\left(\frac{\partial^2\bar{\psi}}{\partial t^2} + J\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial t}\right) \quad (3.14)$$

其中 $C_p = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}$ ， C_p 為縱波波速

$C_T = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$ ， C_T 為橫波波速

將(3.14)式分解成純量式：

$$\nabla^2\psi_1 = \frac{1}{c_T^2}\left(\frac{\partial^2\psi_1}{\partial t^2} + J\frac{\partial\psi_1}{\partial t}\right) \quad (3.15)$$

$$\nabla^2\psi_2 = \frac{1}{c_T^2}\left(\frac{\partial^2\psi_2}{\partial t^2} + J\frac{\partial\psi_2}{\partial t}\right) \quad (3.16)$$

$$\nabla^2\psi_3 = \frac{1}{c_T^2}\left(\frac{\partial^2\psi_3}{\partial t^2} + J\frac{\partial\psi_3}{\partial t}\right) \quad (3.17) \quad (3.13) \text{ 為縱波波}$$

傳方程式，(3.14)、(3.15)、(3.16)、(3.17)為橫波波傳方程式。

根據基本假設，初始條件與邊界條件如下。

初始條件：

$t=0$

x、y、z 三方向位移量為 0：

$$u = \frac{\partial\phi}{\partial x} + \frac{\partial\psi_3}{\partial y} - \frac{\partial\psi_2}{\partial z} = 0 \quad (3.18)$$

$$v = \frac{\partial\phi}{\partial y} - \frac{\partial\psi_3}{\partial x} + \frac{\partial\psi_1}{\partial z} = 0 \quad (3.19)$$

$$w = \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x} - \frac{\partial \psi_1}{\partial y} = 0 \quad (3.20)$$

x、y、z 三方向速度為 0：

$$\dot{u} = \frac{\partial \dot{\phi}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{\psi}_3}{\partial y} - \frac{\partial \dot{\psi}_2}{\partial z} = 0 \quad (3.21)$$

$$\dot{v} = \frac{\partial \dot{\phi}}{\partial y} - \frac{\partial \dot{\psi}_3}{\partial x} + \frac{\partial \dot{\psi}_1}{\partial z} = 0 \quad (3.22)$$

$$\dot{w} = \frac{\partial \dot{\phi}}{\partial z} + \frac{\partial \dot{\psi}_2}{\partial x} - \frac{\partial \dot{\psi}_1}{\partial y} = 0 \quad (3.23)$$

邊界條件：

在 $x=0$, H 處

堅硬的邊界，位移量為 0：

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \psi_3}{\partial y} - \frac{\partial \psi_2}{\partial z} = 0 \quad (3.24)$$

應力連續：

$$\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} = \lambda \left[\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \phi}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 \phi}{\partial x \partial z^2} \right] + 2\mu \left[\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \psi_3}{\partial x^2 \partial y} - \frac{\partial^3 \psi_2}{\partial x^2 \partial z} \right] = 0 \quad (3.25)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = \mu \left[2 \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 \psi_3}{\partial x \partial y^2} - \frac{\partial^3 \psi_2}{\partial x \partial y \partial z} - \frac{\partial^3 \psi_3}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \psi_1}{\partial x^2 \partial z} \right] = 0 \quad (3.26)$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} = \mu \left[2 \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^2 \partial z} + \frac{\partial^3 \psi_3}{\partial x \partial y \partial z} - \frac{\partial^3 \psi_2}{\partial x \partial z^2} - \frac{\partial^3 \psi_2}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \psi_1}{\partial x^2 \partial y} \right] = 0 \quad (3.27)$$

在 $y=0$, L 處

堅硬的邊界，位移量為 0：

$$v = \frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{\partial \psi_3}{\partial x} + \frac{\partial \psi_1}{\partial z} = 0 \quad (3.28)$$

應力連續：

$$\frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} = \lambda \left[\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 \phi}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 \phi}{\partial y \partial z^2} \right] + 2\mu \left[\frac{\partial^3 \phi}{\partial y^3} - \frac{\partial^3 \psi_3}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 \psi_1}{\partial y^2 \partial z} \right] = 0 \quad (3.29)$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} = \mu \left[2 \frac{\partial^3 \phi}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 \psi_3}{\partial y^3} - \frac{\partial^3 \psi_2}{\partial y^2 \partial z} - \frac{\partial^3 \psi_3}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 \psi_1}{\partial x \partial y \partial z} \right] = 0 \quad (3.30)$$

$$\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = \mu \left[2 \frac{\partial^3 \phi}{\partial y^2 \partial z} - \frac{\partial^3 \psi_3}{\partial x \partial y \partial z} + \frac{\partial^3 \psi_1}{\partial y \partial z^2} + \frac{\partial^3 \psi_2}{\partial x \partial y^2} - \frac{\partial^3 \psi_1}{\partial y^3} \right] = 0 \quad (3.31)$$

在 $z=0$ 處

單點作用力：

鉛球從高處撞擊到 $(a, b, 0)$ 處的作用力是脈衝函數，用 cosine function 來代替脈衝函數。在 x 、 y 方向變化為 cosine function。在隨時間的變化上，將鉛球綁上繩子，當鉛球從高處撞擊到 $(a, b, 0)$ 處時馬上拉起，使鉛球不停留在 $(a, b, 0)$ 處，因此作用力隨 t 變化為 $f(t)$ ：

$$\begin{aligned} \tau_{zz} &= \lambda \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right] + 2\mu \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y \partial z} \right] \\ &= -\sigma f(x)f(y)f(t) \end{aligned} \quad (3.32)$$

在此的 $f(x)$ 、 $f(y)$ 、 $f(t)$ 分別代表作用力隨 x 、 y 、 t 的變化的 function，隨著不同的實驗方法 function 會跟著變，而本研究的實驗所對應的 function：

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos\left(\frac{x-a}{c} \frac{\pi}{2}\right) & a-c < x < a+c \\ &= 0 & 0 < x < a-c, a+c < x < H \\ f(y) &= \cos\left(\frac{y-b}{c'} \frac{\pi}{2}\right) & b-c' < y < b+c' \\ &= 0 & 0 < y < b-c', b+c' < y < L \\ f(t) &= \sin\left(\frac{t}{c''} \frac{\pi}{2}\right) & 0 < t < c'' \\ &= 0 & t > c'' \end{aligned}$$

σ 是常數， $c \ll H$ ， $c' \ll L$ 。

自由邊界 (free surface)：

$$\tau_{zx} = \mu \left[2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x \partial y} \right] = 0 \quad (3.33)$$

$$\tau_{zy} = \mu \left[2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y^2} \right] = 0 \quad (3.34)$$

在 $z=D$ 處

堅硬的邊界，位移量為 0：

$$w = \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x} - \frac{\partial \psi_1}{\partial y} = 0 \quad (3.35)$$

應力連續：

$$\frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} = \lambda \left[\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^2 \partial z} + \frac{\partial^3 \phi}{\partial y^2 \partial z} + \frac{\partial^3 \phi}{\partial z^3} \right] + 2\mu \left[\frac{\partial^3 \phi}{\partial z^3} + \frac{\partial^3 \psi_2}{\partial x \partial z^2} - \frac{\partial^3 \psi_1}{\partial y \partial z^2} \right] = 0 \quad (3.36)$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = \mu \left[2 \frac{\partial^3 \phi}{\partial x \partial z^2} + \frac{\partial^3 \psi_3}{\partial y \partial z^2} - \frac{\partial^3 \psi_2}{\partial z^3} + \frac{\partial^3 \psi_2}{\partial x^2 \partial z} - \frac{\partial^3 \psi_1}{\partial x \partial y \partial z} \right] = 0 \quad (3.37)$$

$$\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = \mu \left[2 \frac{\partial^3 \phi}{\partial y \partial z^2} - \frac{\partial^3 \psi_3}{\partial x \partial z^2} + \frac{\partial^3 \psi_1}{\partial z^3} + \frac{\partial^3 \psi_2}{\partial x \partial y \partial z} - \frac{\partial^3 \psi_1}{\partial y^2 \partial z} \right] = 0 \quad (3.38)$$

(2) 解 ϕ 、 ψ_1 、 ψ_2 、 ψ_3

根據 Helmholtz theorem，位移量 u 、 v 、 w 由 ϕ 、 ψ_1 、 ψ_2 、 ψ_3 表示。如果解出 ϕ 、 ψ_1 、 ψ_2 、 ψ_3 ，就可以解出 u 、 v 、 w 。由(1)中所得得控制方程式：

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{c_p^2} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + J \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \quad (3.39)$$

$$\nabla^2 \psi_1 = \frac{1}{c_T^2} \left(\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2} + J \frac{\partial \psi_1}{\partial t} \right) \quad (3.40)$$

$$\nabla^2 \psi_2 = \frac{1}{c_T^2} \left(\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial t^2} + J \frac{\partial \psi_2}{\partial t} \right) \quad (3.41)$$

$$\nabla^2 \psi_3 = \frac{1}{c_T^2} \left(\frac{\partial^2 \psi_3}{\partial t^2} + J \frac{\partial \psi_3}{\partial t} \right) \quad (3.42)$$

現在要解上四式，利用分離變數，將 ϕ 、 ψ_1 、 ψ_2 、 ψ_3 分別表示為：

$$\phi = X(x)Y(y)Z(z)T(t) \quad (3.43)$$

$$\psi_1 = \bar{X}(x)\bar{Y}(y)\bar{Z}(z)\bar{T}(t) \quad (3.44)$$

$$\psi_2 = \hat{X}(x)\hat{Y}(y)\hat{Z}(z)\hat{T}(t) \quad (3.45)$$

$$\psi_3 = \tilde{X}(x)\tilde{Y}(y)\tilde{Z}(z)\tilde{T}(t) \quad (3.46)$$

將上四式代入(3.13)、(3.15)、(3.16)、(3.17)式中，得：

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} + \frac{Z''(z)}{Z(z)} = \frac{1}{c_p^2} \left(\frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} + J \frac{\dot{T}(t)}{T(t)} \right) = \lambda \quad (3.47)$$

$$\frac{\bar{X}''(x)}{\bar{X}(x)} + \frac{\bar{Y}''(y)}{\bar{Y}(y)} + \frac{\bar{Z}''(z)}{\bar{Z}(z)} = \frac{1}{c_T^2} \left(\frac{\ddot{\bar{T}}(t)}{\bar{T}(t)} + J \frac{\dot{\bar{T}}(t)}{\bar{T}(t)} \right) = \bar{\lambda} \quad (3.48)$$

$$\frac{\hat{X}''(x)}{\hat{X}(x)} + \frac{\hat{Y}''(y)}{\hat{Y}(y)} + \frac{\hat{Z}''(z)}{\hat{Z}(z)} = \frac{1}{c_T^2} \left(\frac{\ddot{\hat{T}}(t)}{\hat{T}(t)} + J \frac{\dot{\hat{T}}(t)}{\hat{T}(t)} \right) = \hat{\lambda} \quad (3.49)$$

$$\frac{\tilde{X}''(x)}{\tilde{X}(x)} + \frac{\tilde{Y}''(y)}{\tilde{Y}(y)} + \frac{\tilde{Z}''(z)}{\tilde{Z}(z)} = \frac{1}{c_T^2} \left(\frac{\ddot{\tilde{T}}(t)}{\tilde{T}(t)} + J \frac{\dot{\tilde{T}}(t)}{\tilde{T}(t)} \right) = \tilde{\lambda} \quad (3.50)$$

其中 λ 、 $\bar{\lambda}$ 、 $\hat{\lambda}$ 、 $\tilde{\lambda}$ 與 x 、 y 、 z 、 t 無關

$$\text{令 } \frac{X''(x)}{X(x)} = p \quad \frac{Y''(y)}{Y(y)} = q \quad \frac{Z''(z)}{Z(z)} = r$$

$$\frac{\bar{X}''(x)}{\bar{X}(x)} = \bar{p} \quad \frac{\bar{Y}''(y)}{\bar{Y}(y)} = \bar{q} \quad \frac{\bar{Z}''(z)}{\bar{Z}(z)} = \bar{r}$$

$$\frac{\hat{X}''(x)}{\hat{X}(x)} = \hat{p} \quad \frac{\hat{Y}''(y)}{\hat{Y}(y)} = \hat{q} \quad \frac{\hat{Z}''(z)}{\hat{Z}(z)} = \hat{r}$$

$$\frac{\tilde{X}''(x)}{\tilde{X}(x)} = \tilde{p} \quad \frac{\tilde{Y}''(y)}{\tilde{Y}(y)} = \tilde{q} \quad \frac{\tilde{Z}''(z)}{\tilde{Z}(z)} = \tilde{r}$$

其中 p 、 \bar{p} 、 \hat{p} 、 \tilde{p} 、 q 、 \bar{q} 、 \hat{q} 、 \tilde{q} 、 r 、 \bar{r} 、 \hat{r} 、 \tilde{r} 皆為常數，共需要 24 個條件來決定。

I. 邊界條件的處理

已知 ϕ 、 ψ_1 、 ψ_2 、 ψ_3 這四個變數，其中三個是獨立的，這三個獨立變數分別是 ϕ 及 ψ_1 、 ψ_2 、 ψ_3 中的其中兩個。若令 ϕ 、 ψ_2 、 ψ_3 為獨立變數，將(3.39)、(3.130)、(3.131)、(3.132)式，代入邊界條件(3.24)式中，

在 $x=0$ 處

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \psi_3}{\partial y} - \frac{\partial \psi_2}{\partial z} = 0 \quad (3.24)$$

得：

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \psi_3}{\partial y} - \frac{\partial \psi_2}{\partial z} = 0$$

$$\Rightarrow X'(0)Y(y)Z(z)T(t) + \tilde{X}(0)\tilde{Y}'(y)\tilde{Z}(z)\tilde{T}(t) - \hat{X}(0)\hat{Y}(y)\hat{Z}'(z)\hat{T}(t) = 0$$

因為 ϕ 、 ψ_2 、 ψ_3 為獨立變數，在同一點 y 或 z 時也是獨立變數，所以 $Y(y)Z(z)T(t)$ 、

$\tilde{Y}'(y)\tilde{Z}(z)\tilde{T}(t)$ 、 $\hat{Y}(y)\hat{Z}'(z)\hat{T}(t)$ 彼此為獨立函數，得：

$$X'(0) = \tilde{X}(0) = \hat{X}(0) = 0$$

同理

在 $x=H$ 處

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \psi_3}{\partial y} - \frac{\partial \psi_2}{\partial z} = 0 \quad (3.24)$$

$$\Rightarrow X'(H)Y(y)Z(z)T(t) + \tilde{X}(H)\tilde{Y}'(y)\tilde{Z}(z)\tilde{T}(t) - \hat{X}(H)\hat{Y}(y)\hat{Z}'(z)\hat{T}(t) = 0$$

得：

$$X'(H) = \tilde{X}(H) = \hat{X}(H) = 0$$

在 $y=0$ 處

$$v = \frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{\partial \psi_3}{\partial x} + \frac{\partial \psi_1}{\partial z} = 0 \quad (3.28)$$

由 gage condition：

$$\nabla \cdot \vec{\psi} = \frac{\partial \psi_1}{\partial x} + \frac{\partial \psi_2}{\partial y} + \frac{\partial \psi_3}{\partial z} = 0$$

$$\Rightarrow \psi_1 = -\int \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial y} + \frac{\partial \psi_3}{\partial z} \right) dx$$

將上式代入(3.28)式，得：

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{\partial \psi_3}{\partial x} - \int \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial y \partial z} dx - \int \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial z^2} dx = 0$$

將(3.39)、(3.40)、(3.41)、(3.42)式代入上式，並整理得：

$$Y'(0)X(x)Z(z)T(t) - \tilde{Y}(0)[\tilde{X}'(x)\tilde{Z}(z)\tilde{T}(t) + \int \tilde{X}(x)\tilde{Z}''(z)\tilde{T}(t)dx]$$

$$- \hat{Y}'(0)\hat{X}(x)\hat{Z}'(z)\hat{T}(t) = 0$$

由上式得：

$$Y'(0) = \tilde{Y}(0) = \hat{Y}'(0) = 0$$

同理由(3.28)式，得：

在 $y=L$ 處

$$Y'(L) = \tilde{Y}(L) = \hat{Y}'(L) = 0$$

同理由(3.35)式，得：

在 $z=D$ 處

$$w = \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x} - \frac{\partial \psi_1}{\partial y} = 0$$

得：

$$Z'(D) = \hat{Z}(D) = \tilde{Z}'(D) = 0$$

根據 Helmholtz theorem, $\nabla \cdot \vec{\psi} = 0$ 為 gage condition, 在此問題的區域內任何一點都成立, 因此

在 $x=0$ 處

$$\nabla \cdot \vec{\psi} = \frac{\partial \psi_1}{\partial x} + \frac{\partial \psi_2}{\partial y} + \frac{\partial \psi_3}{\partial z} = 0$$

$$\Rightarrow \bar{X}'(0)\bar{Y}(y)\bar{Z}(z)\bar{T}(t) + \hat{X}(0)\hat{Y}'(y)\hat{Z}(z)\hat{T}(t) + \tilde{X}(0)\tilde{Y}(y)\tilde{Z}'(z)\tilde{T}(t) = 0$$

因為 $\hat{X}(0) = \tilde{X}(0) = 0$, 所以得 $\bar{X}'(0) = 0$

同理, 在 $x=H$ 處

$$\nabla \cdot \vec{\psi} = \frac{\partial \psi_1}{\partial x} + \frac{\partial \psi_2}{\partial y} + \frac{\partial \psi_3}{\partial z} = 0$$

得 $\bar{X}'(H) = 0$ 。在 $y=0, L$ 處

$$\nabla \cdot \vec{\psi} = \frac{\partial \psi_1}{\partial x} + \frac{\partial \psi_2}{\partial y} + \frac{\partial \psi_3}{\partial z} = 0$$

得 $\bar{Y}(0) = 0$

$\bar{Y}(L) = 0$

在 $z = D$ 處

$$\nabla \cdot \vec{\psi} = \frac{\partial \psi_1}{\partial x} + \frac{\partial \psi_2}{\partial y} + \frac{\partial \psi_3}{\partial z} = 0$$

得

$\bar{Z}(D) = 0$

將以上條件整理, 得:

$$x=0 \quad X'(0) = \bar{X}'(0) = \hat{X}(0) = \tilde{X}(0) = 0$$

$$x=H \quad X'(H) = \bar{X}'(H) = \hat{X}(H) = \tilde{X}(H) = 0$$

$$y=0 \quad Y'(0) = \bar{Y}(0) = \hat{Y}'(0) = \tilde{Y}(0) = 0$$

$$y=L \quad Y'(L) = \bar{Y}(L) = \hat{Y}'(L) = \tilde{Y}(L) = 0$$

$$z=D \quad Z'(D) = \bar{Z}(D) = \hat{Z}(D) = \tilde{Z}'(D) = 0$$

從上面得知在 $z=0$ 還少四個邊界條件。

在 $z=0$ 處

$$\tau_{zx} = \mu \left[2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x \partial y} \right] = 0$$

由 gage condition :

$$\nabla \cdot \vec{\psi} = \frac{\partial \psi_1}{\partial x} + \frac{\partial \psi_2}{\partial y} + \frac{\partial \psi_3}{\partial z} = 0$$

$$\Rightarrow \psi_1 = - \int \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial y} + \frac{\partial \psi_3}{\partial z} \right) dx$$

將上式代入(3.51)式，得：

$$2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial x \partial z} = 0$$

將(3.39)、(3.40)、(3.41)、(3.42)式代入上式，並整理得：

$$\begin{aligned} \Rightarrow 2Z'(0)X'(x)Y(y)T(t) + \tilde{Z}'(0)[\tilde{X}(x)\tilde{Y}'(y)\tilde{T}(t) + \tilde{X}'(x)\tilde{Y}(y)\tilde{T}(t)] \\ + \hat{Z}(0)[\hat{X}''(x)\hat{Y}(y)\hat{T}(t) + \hat{X}(x)\hat{Y}''(y)\hat{T}(t)] - \hat{Z}''(0)\hat{X}(0)\hat{Y}(y)\hat{T}(t) = 0 \quad (3.51) \end{aligned}$$

討論(3.51)式等號左邊的第三、四項，將特徵方程式

$$\frac{\hat{Z}''(z)}{\hat{Z}(z)} = \hat{r}$$

求解得：

$$\hat{Z}(z) = s_1 \cosh(\hat{s}z) + s_2 \sinh(\hat{s}z) \quad \text{其中 } \hat{r} = \hat{s}^2 > 0$$

$$\hat{Z}(z) = s_3 + s_4 z \quad \text{其中 } \hat{r} = 0$$

$$\hat{Z}(z) = s_5 \cos(\hat{s}z) + s_6 \sin(\hat{s}z) \quad \text{其中 } \hat{r} = -\hat{s}^2 < 0$$

因此有三種解，不論解的形式是那一種， $\hat{Z}(z)$ 與 $\hat{Z}''(z)$ 的函數都一樣，兩者的差別是係數不同而已，所以(3.51)式等號左邊的第三、四項可以合併，因此由(3.51)式可得：

$$Z'(0) = \hat{Z}(0) = \tilde{Z}'(0) = 0$$

在 $z=0$ 處，由 gage condition :

$$\nabla \cdot \vec{\psi} = \frac{\partial \psi_1}{\partial x} + \frac{\partial \psi_2}{\partial y} + \frac{\partial \psi_3}{\partial z} = 0$$

$$\text{可得 } \bar{X}(x)\bar{Y}(y)\bar{Z}(0)\bar{T}(t) + \hat{X}(x)\hat{Y}'(y)\hat{Z}(0)\hat{T}(t) + \tilde{X}(x)\tilde{Y}(y)\tilde{Z}'(0)\tilde{T}(t) = 0$$

$$\text{因為 } \hat{Z}(0) = \tilde{Z}'(0) = 0, \text{ 所以得 } \bar{Z}(0) = 0$$

在此 $z=0$ 的邊界條件已全部找出，為

$$Z'(0) = \bar{Z}(0) = \hat{Z}(0) = \tilde{Z}'(0) = 0$$

II. 解出特徵值及特徵函數

由 a. 所求得的邊界條件解特徵方程式。

$$\text{特徵方程式： } \frac{X''(x)}{X(x)} = p$$

$$\text{邊界條件： } x=0 \quad X'(0) = 0$$

$$x=H \quad X'(H) = 0$$

得：

$$\text{特徵值： } p = -\left(\frac{m\pi}{H}\right)^2 \Rightarrow \text{特徵函數： } X = c_m \cos\left(\frac{m\pi}{H}x\right) \quad m = 0,1,2\dots$$

$$\text{特徵方程式： } \frac{\bar{X}''(x)}{\bar{X}(x)} = \bar{p}$$

$$\text{邊界條件： } x=0 \quad \bar{X}'(0) = 0$$

$$x=H \quad \bar{X}'(H) = 0$$

$$\text{得特徵值： } \bar{p} = -\left(\frac{m_1\pi}{H}\right)^2 \Rightarrow \text{特徵函數： } \bar{X} = c_{m_1} \cos\left(\frac{m_1\pi}{H}x\right) \quad m_1 = 0,1,2\dots$$

$$\text{特徵方程式： } \frac{\hat{X}''(x)}{\hat{X}(x)} = \hat{p}$$

$$\text{邊界條件： } x=0 \quad \hat{X}(0) = 0$$

$$x=H \quad \hat{X}(H) = 0$$

$$\text{得特徵值： } \hat{p} = -\left(\frac{m_2\pi}{H}\right)^2 \Rightarrow \text{特徵函數： } \hat{X} = c_{m_2} \sin\left(\frac{m_2\pi}{H}x\right) \quad m_2 = 1,2\dots$$

$$\text{特徵方程式： } \frac{\tilde{X}''(x)}{\tilde{X}(x)} = \tilde{p}$$

$$\text{邊界條件： } x=0 \quad \tilde{X}(0) = 0$$

$$x=H \quad \tilde{X}(H) = 0$$

$$\text{得特徵值： } \tilde{p} = -\left(\frac{m_3\pi}{H}\right)^2 \Rightarrow \text{特徵函數： } \tilde{X} = c_{m_3} \sin\left(\frac{m_3\pi}{H}x\right) \quad m_3 = 1,2\dots$$

$$\text{特徵方程式： } \frac{Y''(y)}{Y(y)} = q$$

$$\text{邊界條件： } y=0 \quad Y'(0) = 0$$

$$y=L \quad Y'(L) = 0$$

$$\text{得特徵值： } q = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \Rightarrow \text{特徵函數： } Y = c_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}y\right) \quad n = 0,1,2\dots$$

$$\text{特徵方程式：} \frac{\bar{Y}''(y)}{\bar{Y}(y)} = \bar{q}$$

$$\text{邊界條件：} y=0 \quad \bar{Y}(0) = 0$$

$$y=L \quad \bar{Y}(L) = 0$$

$$\text{得特徵值：} \bar{q} = -\left(\frac{n_1\pi}{L}\right)^2 \Rightarrow \text{特徵函數：} \bar{Y} = c_{n_1} \sin\left(\frac{n_1\pi}{L}y\right) \quad n_1 = 1,2,\dots$$

$$\text{特徵方程式：} \frac{\hat{Y}''(y)}{\hat{Y}(y)} = \hat{q}$$

$$\text{邊界條件：} y=0 \quad \hat{Y}'(0) = 0$$

$$y=L \quad \hat{Y}'(L) = 0$$

$$\text{得特徵值：} \hat{q} = -\left(\frac{n_2\pi}{L}\right)^2 \Rightarrow \text{特徵函數：} \hat{Y} = c_{n_2} \cos\left(\frac{n_2\pi}{L}y\right) \quad n_2 = 0,1,2,\dots$$

$$\text{特徵方程式：} \frac{\tilde{Y}''(y)}{\tilde{Y}(y)} = \tilde{q}$$

$$\text{邊界條件：} y=0 \quad \tilde{Y}(0) = 0$$

$$y=L \quad \tilde{Y}(L) = 0$$

$$\text{得特徵值：} \tilde{q} = -\left(\frac{n_3\pi}{L}\right)^2 \Rightarrow \text{特徵函數：} \tilde{Y} = c_{n_3} \sin\left(\frac{n_3\pi}{L}y\right) \quad n_3 = 1,2,\dots$$

$$\text{特徵方程式：} \frac{Z''(z)}{Z(z)} = r$$

$$\text{邊界條件：} z=0 \quad Z'(0) = 0$$

$$z=D \quad Z'(D) = 0$$

$$\text{得特徵值：} r = -\left(\frac{e\pi}{D}\right)^2 \Rightarrow \text{特徵函數：} Z = c_e \cos\left(\frac{e\pi}{D}z\right) \quad e = 0,1,2,\dots$$

$$\text{特徵方程式：} \frac{\bar{Z}''(z)}{\bar{Z}(z)} = \bar{r}$$

$$\text{邊界條件：} z=0 \quad \bar{Z}(0) = 0$$

$$z=D \quad \bar{Z}(D) = 0$$

$$\text{得特徵值：} \bar{r} = -\left(\frac{e_1\pi}{D}\right)^2 \Rightarrow \text{特徵函數：} \bar{Z} = c_{e_1} \sin\left(\frac{e_1\pi}{D}z\right) \quad e_1 = 1,2,\dots$$

$$\text{特徵方程式：} \frac{\hat{Z}''(z)}{\hat{Z}(z)} = \hat{r}$$

$$\text{邊界條件：} z=0 \quad \hat{Z}(0) = 0$$

$$z=D \quad \hat{Z}(D) = 0$$

$$\text{得特徵值：} \hat{r} = -\left(\frac{e_2\pi}{D}\right)^2 \Rightarrow \text{特徵函數：} \hat{Z} = c_{e_2} \sin\left(\frac{e_2\pi}{D} z\right) \quad e_2 = 1,2,\dots$$

$$\text{特徵方程式：} \frac{\tilde{Z}''(z)}{\tilde{Z}(z)} = \tilde{r}$$

$$\text{邊界條件：} z=0 \quad \tilde{Z}'(0) = 0$$

$$z=D \quad \tilde{Z}'(D) = 0$$

$$\text{得特徵值：} \tilde{r} = -\left(\frac{e_3\pi}{D}\right)^2 \Rightarrow \text{特徵函數：} \tilde{Z} = c_{e_3} \cos\left(\frac{e_3\pi}{D} z\right) \quad e_3 = 0,1,2,\dots$$

III. 求 ϕ 、 ψ_1 、 ψ_2 、 ψ_3 的全解

在此，所有的特徵值及特徵函數都求出，將所有特徵值代入下四式：

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} + \frac{Z''(z)}{Z(z)} = \frac{1}{c_p^2} \left(\frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} + J \frac{\dot{T}(t)}{T(t)} \right) = \lambda \quad (3.52)$$

$$\frac{\bar{X}''(x)}{\bar{X}(x)} + \frac{\bar{Y}''(y)}{\bar{Y}(y)} + \frac{\bar{Z}''(z)}{\bar{Z}(z)} = \frac{1}{c_T^2} \left(\frac{\ddot{\bar{T}}(t)}{\bar{T}(t)} + J \frac{\dot{\bar{T}}(t)}{\bar{T}(t)} \right) = \bar{\lambda} \quad (3.53)$$

$$\frac{\hat{X}''(x)}{\hat{X}(x)} + \frac{\hat{Y}''(y)}{\hat{Y}(y)} + \frac{\hat{Z}''(z)}{\hat{Z}(z)} = \frac{1}{c_T^2} \left(\frac{\ddot{\hat{T}}(t)}{\hat{T}(t)} + J \frac{\dot{\hat{T}}(t)}{\hat{T}(t)} \right) = \hat{\lambda} \quad (3.54)$$

$$\frac{\tilde{X}''(x)}{\tilde{X}(x)} + \frac{\tilde{Y}''(y)}{\tilde{Y}(y)} + \frac{\tilde{Z}''(z)}{\tilde{Z}(z)} = \frac{1}{c_T^2} \left(\frac{\ddot{\tilde{T}}(t)}{\tilde{T}(t)} + J \frac{\dot{\tilde{T}}(t)}{\tilde{T}(t)} \right) = \tilde{\lambda} \quad (3.55)$$

先解(3.52)式的 $T(t)$ ，特徵值及特徵函數代入(3.52)式，得：

$$\ddot{T}(t) + J\dot{T}(t) + c_p^2 k^2_{mne} T(t) = 0 \quad (3.56)$$

其中

$$k_{mne} = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{H}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{e\pi}{D}\right)^2}$$

令 $T(t) = e^{\alpha t}$ 代入(3.56)式，得

$$\alpha^2 + J\alpha + c_p^2 k^2_{mne} = 0$$

所以：

$$\alpha = \frac{-J \pm \sqrt{J^2 - 4c_p^2 k^2_{mne}}}{2}$$

如果 $J^2 - 4c_p^2 k^2_{mne} < 0$ ，得：

$$T(t) = e^{-\frac{J}{2}t} \left[C_1 \cos\left(\sqrt{c_p^2 k^2 mne - \frac{J^2}{4}}t\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{c_p^2 k^2 mne - \frac{J^2}{4}}t\right) \right] \quad (3.57)$$

如果 $J^2 - 4c_p^2 k^2 mne = 0$ ，得：

$$T(t) = e^{-\frac{J}{2}t} [C'_1 + C'_2 t] \quad (3.58)$$

如果 $J^2 - 4c_p^2 k^2 mne > 0$ ，得：

$$T(t) = e^{-\frac{J}{2}t} \left[C''_1 e^{\sqrt{\frac{J^2 - c_p^2 k^2 mne}{4}}t} + C''_2 e^{-\sqrt{\frac{J^2 - c_p^2 k^2 mne}{4}}t} \right] \quad (3.59)$$

C_1 、 C_2 、 C'_1 、 C'_2 、 C''_1 、 C''_2 皆為常數。

同理 $\bar{T}(t)$ 的解也有三種情形：

如果 $J^2 - 4c_T^2 \bar{k}^2 m_1 n_1 e_1 < 0$ ，得：

$$\bar{T}(t) = e^{-\frac{J}{2}t} \left[C_3 \cos\left(\sqrt{c_T^2 \bar{k}^2 m_1 n_1 e_1 - \frac{J^2}{4}}t\right) + C_4 \sin\left(\sqrt{c_T^2 \bar{k}^2 m_1 n_1 e_1 - \frac{J^2}{4}}t\right) \right] \quad (3.60)$$

如果 $J^2 - 4c_T^2 \bar{k}^2 m_1 n_1 e_1 = 0$ ，得：

$$\bar{T}(t) = e^{-\frac{J}{2}t} [C'_3 + C'_4 t] \quad (3.61)$$

如果 $J^2 - 4c_T^2 \bar{k}^2 m_1 n_1 e_1 > 0$ ，得：

$$\bar{T}(t) = e^{-\frac{J}{2}t} \left[C''_3 e^{\sqrt{\frac{J^2 - c_T^2 \bar{k}^2 m_1 n_1 e_1}{4}}t} + C''_4 e^{-\sqrt{\frac{J^2 - c_T^2 \bar{k}^2 m_1 n_1 e_1}{4}}t} \right] \quad (3.62)$$

其中

$$\bar{k}_{m_1 n_1 e_1} = \sqrt{\left(\frac{m_1 \pi}{H}\right)^2 + \left(\frac{n_1 \pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{e_1 \pi}{D}\right)^2}$$

C_3 、 C_4 、 C'_3 、 C'_4 、 C''_3 、 C''_4 皆為常數。

同理 $\hat{T}(t)$ 的解也有三種情形：

如果 $J^2 - 4c_T^2 \hat{k}^2 m_2 n_2 e_2 < 0$ ，得：

$$\hat{T}(t) = e^{-\frac{J}{2}t} \left[C_5 \cos\left(\sqrt{c_T^2 \hat{k}^2 m_2 n_2 e_2 - \frac{J^2}{4}}t\right) + C_6 \sin\left(\sqrt{c_T^2 \hat{k}^2 m_2 n_2 e_2 - \frac{J^2}{4}}t\right) \right] \quad (3.63)$$

如果 $J^2 - 4c_T^2 \hat{k}^2 m_2 n_2 e_2 = 0$ ，得：

$$\hat{T}(t) = e^{-\frac{J}{2}t} [C'_5 + C'_6 t] \quad (3.64)$$

如果 $J^2 - 4c_T^2 \hat{k}^2_{m_2 n_2 e_2} > 0$ ，得：

$$\hat{T}(t) = e^{-\frac{J}{2}t} \left[C''_5 e^{\sqrt{\frac{J^2 - 4c_T^2 \hat{k}^2_{m_2 n_2 e_2}}{4}} t} + C''_6 e^{-\sqrt{\frac{J^2 - 4c_T^2 \hat{k}^2_{m_2 n_2 e_2}}{4}} t} \right] \quad (3.65)$$

其中

$$\hat{k}_{m_2 n_2 e_2} = \sqrt{\left(\frac{m_2 \pi}{H}\right)^2 + \left(\frac{n_2 \pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{e_2 \pi}{D}\right)^2}$$

C_5 、 C_6 、 C'_5 、 C'_6 、 C''_5 、 C''_6 皆為常數。

同理 $\tilde{T}(t)$ 的解也有三種情形：

如果 $J^2 - 4c_T^2 \tilde{k}^2_{m_3 n_3 e_3} < 0$ ，得：

$$\tilde{T}(t) = e^{-\frac{J}{2}t} \left[C_7 \cos\left(\sqrt{c_T^2 \tilde{k}^2_{m_3 n_3 e_3} - \frac{J^2}{4}} t\right) + C_8 \sin\left(\sqrt{c_T^2 \tilde{k}^2_{m_3 n_3 e_3} - \frac{J^2}{4}} t\right) \right] \quad (3.66)$$

如果 $J^2 - 4c_T^2 \tilde{k}^2_{m_3 n_3 e_3} = 0$ ，得：

$$\tilde{T}(t) = e^{-\frac{J}{2}t} [C'_7 + C'_8 t] \quad (3.67)$$

如果 $J^2 - 4c_T^2 \tilde{k}^2_{m_3 n_3 e_3} > 0$ ，得：

$$\tilde{T}(t) = e^{-\frac{J}{2}t} \left[C''_7 e^{\sqrt{\frac{J^2 - 4c_T^2 \tilde{k}^2_{m_3 n_3 e_3}}{4}} t} + C''_8 e^{-\sqrt{\frac{J^2 - 4c_T^2 \tilde{k}^2_{m_3 n_3 e_3}}{4}} t} \right] \quad (3.68)$$

其中

$$\tilde{k}_{m_3 n_3 e_3} = \sqrt{\left(\frac{m_3 \pi}{H}\right)^2 + \left(\frac{n_3 \pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{e_3 \pi}{D}\right)^2}$$

C_7 、 C_8 、 C'_7 、 C'_8 、 C''_7 、 C''_8 皆為常數。

由於 c_p 、 c_T 、 J 都是未定的係數，先考慮 $J^2 - 4c_p^2 k^2_{mne} < 0$ 、

$J^2 - 4c_T^2 \bar{k}^2_{m_1 n_1 e_1} < 0$ 、 $J^2 - 4c_T^2 \tilde{k}^2_{m_3 n_3 e_3} < 0$ 、 $J^2 - 4c_T^2 \hat{k}^2_{m_2 n_2 e_2} < 0$ 情形下的解，分別將所求得的(3.59)、(3.62)、(3.65)、(3.68)式及特徵函數及代入(3.39)、(3.130)、(3.131)、(3.132)，利用重疊原理，得 ϕ 、 ψ_1 、 ψ_2 、 ψ_3 的全解：

$$\phi = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{e=0}^{\infty} e^{-\frac{J}{2}t} \left[A_{mne} \cos\left(\sqrt{c_p^2 k^2_{mne} - \frac{J^2}{4}} t\right) + B_{mne} \sin\left(\sqrt{c_p^2 k^2_{mne} - \frac{J^2}{4}} t\right) \right]$$

$$\cos\left(\frac{m\pi}{H}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{L}y\right) \cos\left(\frac{e\pi}{D}z\right) \quad (3.69)$$

$$\begin{aligned} \psi_1 = & \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{e=1}^{\infty} e^{-\frac{J}{2}t} \left[\bar{A}_{mne} \cos\left(\sqrt{c_T^2 k^2_{mne} - \frac{J^2}{4}}t\right) + \bar{B}_{mne} \sin\left(\sqrt{c_T^2 k^2_{mne} - \frac{J^2}{4}}t\right) \right] \\ & \cos\left(\frac{m\pi}{H}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}y\right) \sin\left(\frac{e\pi}{D}z\right) \end{aligned} \quad (3.70)$$

$$\begin{aligned} \psi_2 = & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{e=1}^{\infty} e^{-\frac{J}{2}t} \left[\hat{A}_{mne} \cos\left(\sqrt{c_T^2 k^2_{mne} - \frac{J^2}{4}}t\right) + \hat{B}_{mne} \sin\left(\sqrt{c_T^2 k^2_{mne} - \frac{J^2}{4}}t\right) \right] \\ & \sin\left(\frac{m\pi}{H}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{L}y\right) \sin\left(\frac{e\pi}{D}z\right) \end{aligned} \quad (3.71)$$

$$\begin{aligned} \psi_3 = & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{e=0}^{\infty} e^{-\frac{J}{2}t} \left[\tilde{A}_{mne} \cos\left(\sqrt{c_T^2 k^2_{mne} - \frac{J^2}{4}}t\right) + \tilde{B}_{mne} \sin\left(\sqrt{c_T^2 k^2_{mne} - \frac{J^2}{4}}t\right) \right] \\ & \sin\left(\frac{m\pi}{H}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}y\right) \cos\left(\frac{e\pi}{D}z\right) \end{aligned} \quad (3.72)$$

將 ϕ 、 ψ_1 、 ψ_2 、 ψ_3 的全解(3.69)、(3.70)、(3.71)、(3.72)式，代入初始條件，得：

在 $t=0$ 時

x 方向位移量 $u = 0$ ：

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \psi_3}{\partial y} - \frac{\partial \psi_2}{\partial z} = 0 \quad (3.18)$$

$$\Rightarrow - \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{e=0}^{\infty} (A_{mne} + B_{mne}) \frac{m\pi}{H} \sin\left(\frac{m\pi}{H}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{L}y\right) \cos\left(\frac{e\pi}{D}z\right)$$

$$+ \sum_{m_3=1}^{\infty} \sum_{n_3=1}^{\infty} \sum_{e_3=0}^{\infty} \tilde{A}_{m_3 n_3 e_3} \frac{n_3\pi}{L} \sin\left(\frac{m_3\pi}{H}x\right) \cos\left(\frac{n_3\pi}{L}y\right) \cos\left(\frac{e_3\pi}{D}z\right)$$

$$+ \sum_{m_2=1}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} \sum_{e_2=1}^{\infty} \hat{A}_{m_2 n_2 e_2} \frac{e_2\pi}{D} \sin\left(\frac{m_2\pi}{H}x\right) \cos\left(\frac{n_2\pi}{L}y\right) \cos\left(\frac{e_2\pi}{D}z\right) = 0$$

將 $m = n = e = e_3 = n_2 = 0$ 提出，並使

$$m = m_2 = m_3 = 1, 2, \dots, \infty$$

$$n = n_2 = n_3 = 1, 2, \dots, \infty$$

$$e = e_2 = e_3 = 1, 2, \dots, \infty$$

得：

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{e=1}^{\infty} \left(-A_{mne} \frac{m\pi}{H} + \tilde{A}_{mne} \frac{n\pi}{L} - \hat{A}_{mne} \frac{e\pi}{D} \right) \sin\left(\frac{m\pi}{H}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{L}y\right) \cos\left(\frac{e\pi}{D}z\right) \\
& + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(-A_{mn0} \frac{m\pi}{H} + \tilde{A}_{mn0} \frac{n\pi}{L} \right) \sin\left(\frac{m\pi}{H}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{L}y\right) \\
& + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{e=1}^{\infty} \left(-A_{m0e} \frac{m\pi}{H} - \hat{A}_{m0e} \frac{e\pi}{D} \right) \sin\left(\frac{m\pi}{H}x\right) \cos\left(\frac{e\pi}{D}z\right) \\
& + \sum_{m=1}^{\infty} \left(-A_{m00} \frac{m\pi}{H} \right) \sin\left(\frac{m\pi}{H}x\right) = 0
\end{aligned} \tag{3.73}$$

由上式得：

$$A_{mne} \frac{m}{H} - \tilde{A}_{mne} \frac{n}{L} + \hat{A}_{mne} \frac{e}{D} = 0 \tag{3.74}$$

$$A_{mn0} \frac{m}{H} - \tilde{A}_{mn0} \frac{n}{L} = 0 \tag{3.75}$$

$$A_{m0e} \frac{m}{H} + \hat{A}_{m0e} \frac{e}{D} = 0 \tag{3.76}$$

$$A_{m00} = 0 \tag{3.77}$$

在 $t=0$ 時

y 方向位移量 $v=0$ ：

$$v = \frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{\partial \psi_3}{\partial x} + \frac{\partial \psi_1}{\partial z} = 0 \tag{3.19}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow & - \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{e=0}^{\infty} A_{mne} \frac{n\pi}{L} \cos\left(\frac{m\pi}{H}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{L}y\right) \cos\left(\frac{e\pi}{D}z\right) \\
& - \sum_{m_3=1}^{\infty} \sum_{n_3=1}^{\infty} \sum_{e_3=0}^{\infty} \tilde{A}_{m_3 n_3 e_3} \frac{m_3\pi}{H} \cos\left(\frac{m_3\pi}{H}x\right) \sin\left(\frac{n_3\pi}{L}y\right) \cos\left(\frac{e_3\pi}{D}z\right) \\
& + \sum_{m_1=0}^{\infty} \sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{e_1=1}^{\infty} \bar{A}_{m_1 n_1 e_1} \frac{e_1\pi}{D} \cos\left(\frac{m_1\pi}{H}x\right) \sin\left(\frac{n_1\pi}{L}y\right) \cos\left(\frac{e_1\pi}{D}z\right) = 0
\end{aligned}$$

將 $m=n=e=e_3=m_1=0$ 提出，並使

$$m = m_1 = m_3 = 1, 2, \dots, \infty$$

$$n = n_1 = n_3 = 1, 2, \dots, \infty$$

$$e = e_1 = e_3 = 1, 2, \dots, \infty$$

得：

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{e=1}^{\infty} \left(-A_{mne} \frac{n\pi}{L} + \bar{A}_{mne} \frac{e\pi}{D} - \tilde{A}_{mne} \frac{m\pi}{H} \right) \cos\left(\frac{m\pi}{H}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}y\right) \cos\left(\frac{e\pi}{D}z\right)$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(-A_{mn0} \frac{n\pi}{L} - \tilde{A}_{mn0} \frac{m\pi}{H} \right) \cos\left(\frac{m\pi}{H}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}y\right) \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{e=1}^{\infty} \left(-A_{0ne} \frac{n\pi}{L} + \bar{A}_{0ne} \frac{e\pi}{D} \right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}y\right) \cos\left(\frac{e\pi}{D}z\right) \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-A_{0n0} \frac{m\pi}{H} \right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}y\right) = 0 \tag{3.78}
\end{aligned}$$

由上式得：

$$A_{mne} \frac{n}{L} - \bar{A}_{mne} \frac{e}{D} + \tilde{A}_{mne} \frac{m}{H} = 0 \tag{3.79}$$

$$A_{mn0} \frac{n}{L} + \tilde{A}_{mn0} \frac{m}{H} = 0 \tag{3.80}$$

$$A_{0ne} \frac{n}{L} - \bar{A}_{0ne} \frac{e}{D} = 0 \tag{3.81}$$

$$A_{0n0} = 0 \tag{3.82}$$

在 $t=0$ 時

z 方向位移量 $w=0$ ：

$$w = \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x} - \frac{\partial \psi_1}{\partial y} = 0 \tag{3.20}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow & - \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{e=0}^{\infty} A_{mne} \frac{e\pi}{D} \cos\left(\frac{m\pi}{H}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{L}y\right) \sin\left(\frac{e\pi}{D}z\right) \\
& + \sum_{m_2=1}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} \sum_{e_2=1}^{\infty} \hat{A}_{m_2n_2e_2} \frac{m_2\pi}{H} \cos\left(\frac{m_2\pi}{H}x\right) \cos\left(\frac{n_2\pi}{L}y\right) \sin\left(\frac{e_2\pi}{D}z\right) \\
& - \sum_{m_1=0}^{\infty} \sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{e_1=1}^{\infty} \bar{A}_{m_1n_1e_1} \frac{n_1\pi}{L} \cos\left(\frac{m_1\pi}{H}x\right) \cos\left(\frac{n_1\pi}{L}y\right) \sin\left(\frac{e_1\pi}{D}z\right) = 0
\end{aligned}$$

將 $m=n=e=n_2=m_1=0$ 提出，並使

$$m = m_1 = m_2 = 1, 2, \dots, \infty$$

$$n = n_1 = n_2 = 1, 2, \dots, \infty$$

$$e = e_1 = e_2 = 1, 2, \dots, \infty$$

得：

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{e=1}^{\infty} \left(-A_{mne} \frac{e\pi}{D} + \hat{A}_{mne} \frac{m\pi}{H} - \bar{A}_{mne} \frac{n\pi}{L} \right) \cos\left(\frac{m\pi}{H}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{L}y\right) \sin\left(\frac{e\pi}{D}z\right) \\
& + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{e=1}^{\infty} \left(-A_{m0e} \frac{e\pi}{D} + \hat{A}_{m0e} \frac{m\pi}{H} \right) \cos\left(\frac{m\pi}{H}x\right) \sin\left(\frac{e\pi}{D}z\right) \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{e=1}^{\infty} \left(-A_{0ne} \frac{e\pi}{D} - \bar{A}_{0ne} \frac{n\pi}{L} \right) \cos\left(\frac{n\pi}{L}y\right) \sin\left(\frac{e\pi}{D}z\right)
\end{aligned}$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \left(-A_{00e} \frac{e\pi}{D} \right) \sin\left(\frac{e\pi}{D} z\right) = 0 \quad (3.83)$$

由上式得：

$$A_{mne} \frac{e}{D} + \bar{A}_{mne} \frac{n}{L} - \hat{A}_{mne} \frac{m}{H} = 0 \quad (3.84)$$

$$A_{m0e} \frac{e}{D} - \hat{A}_{m0e} \frac{m}{H} = 0 \quad (3.85)$$

$$A_{0ne} \frac{e}{D} + \bar{A}_{0ne} \frac{n}{L} = 0 \quad (3.86)$$

$$A_{00e} = 0 \quad (3.87)$$

由(3.75)及(3.80)式

$$A_{mn0} \frac{m}{H} - \tilde{A}_{mn0} \frac{n}{L} = 0 \quad (3.88)$$

$$A_{mn0} \frac{n}{L} + \tilde{A}_{mn0} \frac{m}{H} = 0 \quad (3.89)$$

得：

$$A_{mn0} = \tilde{A}_{mn0} = 0$$

由(3.76)及(3.85)式

$$A_{m0e} \frac{m}{H} + \hat{A}_{m0e} \frac{e}{D} = 0 \quad (3.90)$$

$$A_{m0e} \frac{e}{D} - \hat{A}_{m0e} \frac{m}{H} = 0 \quad (3.91)$$

得：

$$A_{m0e} = \hat{A}_{m0e} = 0$$

由(3.85)及(3.86)式

$$A_{0ne} \frac{n}{L} - \bar{A}_{0ne} \frac{e}{D} = 0 \quad (3.92)$$

$$A_{0ne} \frac{e}{D} + \bar{A}_{0ne} \frac{n}{L} = 0 \quad (3.93)$$

得：

$$A_{0ne} = \bar{A}_{0ne} = 0$$

在 $t=0$ 時

x 方向速度 $\dot{u} = 0$:

$$\dot{u} = \frac{\partial \dot{\phi}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{\psi}_3}{\partial y} - \frac{\partial \dot{\psi}_2}{\partial z} = 0 \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow & - \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{e=0}^{\infty} B_{mne} \sqrt{c_p^2 k^2_{mne} - \frac{J^2}{4}} \frac{m\pi}{H} \sin\left(\frac{m\pi}{H}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{L}y\right) \cos\left(\frac{e\pi}{D}z\right) \\ & + \sum_{m_3=1}^{\infty} \sum_{n_3=1}^{\infty} \sum_{e_3=0}^{\infty} \tilde{B}_{m_3n_3e_3} \sqrt{c_T^2 \tilde{k}^2_{m_3n_3e_3} - \frac{J^2}{4}} \frac{n_3\pi}{L} \sin\left(\frac{m_3\pi}{H}x\right) \cos\left(\frac{n_3\pi}{L}y\right) \cos\left(\frac{e_3\pi}{D}z\right) \\ & + \sum_{m_2=1}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} \sum_{e_2=1}^{\infty} \hat{B}_{m_2n_2e_2} \sqrt{c_T^2 \hat{k}^2_{m_2n_2e_2} - \frac{J^2}{4}} \frac{e_2\pi}{D} \sin\left(\frac{m_2\pi}{H}x\right) \cos\left(\frac{n_2\pi}{L}y\right) \cos\left(\frac{e_2\pi}{D}z\right) = 0 \end{aligned}$$

將 $m = n = e = e_3 = n_2 = 0$ 提出，並使

$$m = m_2 = m_3 = 1, 2, \dots, \infty$$

$$n = n_2 = n_3 = 1, 2, \dots, \infty$$

$$e = e_2 = e_3 = 1, 2, \dots, \infty$$

$$k_{mne} = \tilde{k}_{m_3n_3e_3} = \hat{k}_{m_2n_2e_2}$$

得：

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{e=1}^{\infty} (-B_{mne} \sqrt{c_p^2 k^2_{mne} - \frac{J^2}{4}} \frac{m\pi}{H} + \tilde{B}_{mne} \sqrt{c_T^2 k^2_{mne} - \frac{J^2}{4}} \frac{n\pi}{L} - \hat{B}_{mne} \sqrt{c_T^2 k^2_{mne} - \frac{J^2}{4}} \frac{e\pi}{D}) \\ & \quad \sin\left(\frac{m\pi}{H}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{L}y\right) \cos\left(\frac{e\pi}{D}z\right) \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (-B_{mn0} \sqrt{c_p^2 k^2_{mn0} - \frac{J^2}{4}} \frac{m\pi}{H} + \tilde{B}_{mn0} \sqrt{c_T^2 k^2_{mn0} - \frac{J^2}{4}} \frac{n\pi}{L}) \sin\left(\frac{m\pi}{H}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{L}y\right) \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{e=1}^{\infty} (-B_{m0e} \sqrt{c_p^2 k^2_{m0e} - \frac{J^2}{4}} \frac{m\pi}{H} - \hat{B}_{m0e} \sqrt{c_T^2 k^2_{m0e} - \frac{J^2}{4}} \frac{e\pi}{D}) \sin\left(\frac{m\pi}{H}x\right) \cos\left(\frac{e\pi}{D}z\right) \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} (-B_{m00} \sqrt{c_p^2 k^2_{m00} - \frac{J^2}{4}} \frac{m\pi}{H}) \sin\left(\frac{m\pi}{H}x\right) = 0 \quad (3.94) \end{aligned}$$

由上式得：

$$B_{mne} \sqrt{c_p^2 k^2_{mne} - \frac{J^2}{4}} \frac{m}{H} - \tilde{B}_{mne} \sqrt{c_T^2 k^2_{mne} - \frac{J^2}{4}} \frac{n}{L} + \hat{B}_{mne} \sqrt{c_T^2 k^2_{mne} - \frac{J^2}{4}} \frac{e}{D} = 0 \quad (3.95)$$

$$B_{mn0} \sqrt{c_p^2 k^2_{mn0} - \frac{J^2}{4}} \frac{m}{H} - \tilde{B}_{mn0} \sqrt{c_T^2 k^2_{mn0} - \frac{J^2}{4}} \frac{n}{L} = 0 \quad (3.96)$$

$$B_{m0e} \sqrt{c_p^2 k^2_{m0e} - \frac{J^2}{4}} \frac{m}{H} + \hat{B}_{m0e} \sqrt{c_T^2 k^2_{m0e} - \frac{J^2}{4}} \frac{e}{D} = 0 \quad (3.97)$$

$$B_{m00} = 0 \quad (3.98)$$

在 $t=0$ 時

y 方向速度 $\dot{v} = 0$:

$$\dot{v} = \frac{\partial \dot{\phi}}{\partial y} - \frac{\partial \dot{\psi}_3}{\partial x} + \frac{\partial \dot{\psi}_1}{\partial z} = 0 \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow & - \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{e=0}^{\infty} B_{mne} \sqrt{c_p^2 k^2_{mne} - \frac{J^2}{4}} \frac{n\pi}{L} \cos\left(\frac{m\pi}{H} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{L} y\right) \cos\left(\frac{e\pi}{D} z\right) \\ & - \sum_{m_3=1}^{\infty} \sum_{n_3=1}^{\infty} \sum_{e_3=0}^{\infty} \tilde{B}_{m_3 n_3 e_3} \sqrt{c_T^2 \tilde{k}^2_{m_3 n_3 e_3} - \frac{J^2}{4}} \frac{m_3 \pi}{H} \cos\left(\frac{m_3 \pi}{H} x\right) \sin\left(\frac{n_3 \pi}{L} y\right) \cos\left(\frac{e_3 \pi}{D} z\right) \\ & + \sum_{m_1=0}^{\infty} \sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{e_1=1}^{\infty} \bar{B}_{m_1 n_1 e_1} \sqrt{c_T^2 \bar{k}^2_{m_1 n_1 e_1} - \frac{J^2}{4}} \frac{e_1 \pi}{D} \cos\left(\frac{m_1 \pi}{H} x\right) \sin\left(\frac{n_1 \pi}{L} y\right) \cos\left(\frac{e_1 \pi}{D} z\right) = 0 \end{aligned}$$

將 $m = n = e = e_3 = m_1 = 0$ 提出，並使

$$m = m_1 = m_3 = 1, 2, \dots, \infty$$

$$n = n_1 = n_3 = 1, 2, \dots, \infty$$

$$e = e_1 = e_3 = 1, 2, \dots, \infty$$

$$k_{mne} = \tilde{k}_{m_3 n_3 e_3} = \bar{k}_{m_1 n_1 e_1}$$

得：

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{e=1}^{\infty} (-B_{mne} \sqrt{c_p^2 k^2_{mne} - \frac{J^2}{4}} \frac{n\pi}{L} + \bar{B}_{mne} \sqrt{c_T^2 k^2_{mne} - \frac{J^2}{4}} \frac{e\pi}{D} - \tilde{B}_{mne} \sqrt{c_T^2 k^2_{mne} - \frac{J^2}{4}} \frac{m\pi}{H}) \\ & \quad \cos\left(\frac{m\pi}{H} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L} y\right) \cos\left(\frac{e\pi}{D} z\right) \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (-B_{mn0} \sqrt{c_p^2 k^2_{mn0} - \frac{J^2}{4}} \frac{n\pi}{L} - \tilde{B}_{mn0} \sqrt{c_T^2 k^2_{mn0} - \frac{J^2}{4}} \frac{m\pi}{H}) \cos\left(\frac{m\pi}{H} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L} y\right) \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{e=1}^{\infty} (-B_{0ne} \sqrt{c_p^2 k^2_{0ne} - \frac{J^2}{4}} \frac{n\pi}{L} + \bar{B}_{0ne} \sqrt{c_T^2 k^2_{0ne} - \frac{J^2}{4}} \frac{e\pi}{D}) \sin\left(\frac{n\pi}{L} y\right) \cos\left(\frac{e\pi}{D} z\right) \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} (-B_{0n0} \sqrt{c_p^2 k^2_{0n0} - \frac{J^2}{4}} \frac{m\pi}{H}) \sin\left(\frac{n\pi}{L} y\right) = 0 \quad (3.99) \end{aligned}$$

由上式得：

$$B_{mne} \sqrt{c_p^2 k^2_{mne} - \frac{J^2}{4}} \frac{n}{L} - \bar{B}_{mne} \sqrt{c_T^2 k^2_{mne} - \frac{J^2}{4}} \frac{e}{D} + \tilde{B}_{mne} \sqrt{c_T^2 k^2_{mne} - \frac{J^2}{4}} \frac{m}{H} = 0$$

(3.100)

$$B_{mn0} \sqrt{c_p^2 k^2_{mn0} - \frac{J^2}{4}} \frac{n}{L} + \tilde{B}_{mn0} \sqrt{c_T^2 k^2_{mn0} - \frac{J^2}{4}} \frac{m}{H} = 0 \quad (3.101)$$

$$B_{0ne} \sqrt{c_p^2 k^2_{0ne} - \frac{J^2}{4}} \frac{n}{L} - \bar{B}_{0ne} \sqrt{c_T^2 k^2_{0ne} - \frac{J^2}{4}} \frac{e}{D} = 0 \quad (3.102)$$

$$B_{0n0} = 0 \quad (3.103)$$

在 $t=0$ 時

z 方向速度 $\dot{w} = 0$:

$$\dot{w} = \frac{\partial \dot{\phi}}{\partial z} + \frac{\partial \dot{\psi}_2}{\partial x} - \frac{\partial \dot{\psi}_1}{\partial y} = 0 \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow & - \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{e=0}^{\infty} B_{mne} \sqrt{c_p^2 k^2_{mne} - \frac{J^2}{4}} \frac{e\pi}{D} \cos\left(\frac{m\pi}{H}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{L}y\right) \sin\left(\frac{e\pi}{D}z\right) \\ & + \sum_{m_2=1}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} \sum_{e_2=1}^{\infty} \hat{B}_{m_2n_2e_2} \sqrt{c_T^2 \hat{k}^2_{m_2n_2e_2} - \frac{J^2}{4}} \frac{m_2\pi}{H} \cos\left(\frac{m_2\pi}{H}x\right) \cos\left(\frac{n_2\pi}{L}y\right) \sin\left(\frac{e_2\pi}{D}z\right) \\ & - \sum_{m_1=0}^{\infty} \sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{e_1=1}^{\infty} \bar{B}_{m_1n_1e_1} \sqrt{c_T^2 \bar{k}^2_{m_1n_1e_1} - \frac{J^2}{4}} \frac{n_1\pi}{L} \cos\left(\frac{m_1\pi}{H}x\right) \cos\left(\frac{n_1\pi}{L}y\right) \sin\left(\frac{e_1\pi}{D}z\right) = 0 \end{aligned}$$

將 $m = n = e = n_2 = m_1 = 0$ 提出，並使

$$m = m_1 = m_2 = 1, 2, \dots, \infty$$

$$n = n_1 = n_2 = 1, 2, \dots, \infty$$

$$e = e_1 = e_2 = 1, 2, \dots, \infty$$

$$k_{mne} = \bar{k}_{m_1n_1e_1} = \hat{k}_{m_2n_2e_2}$$

得：

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{e=1}^{\infty} (-B_{mne} \sqrt{c_p^2 k^2_{mne} - \frac{J^2}{4}} \frac{e\pi}{D} + \hat{B}_{mne} \sqrt{c_T^2 k^2_{mne} - \frac{J^2}{4}} \frac{m\pi}{H} - \bar{B}_{mne} \sqrt{c_T^2 k^2_{mne} - \frac{J^2}{4}} \frac{n\pi}{L}) \\ & \quad \cos\left(\frac{m\pi}{H}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{L}y\right) \sin\left(\frac{e\pi}{D}z\right) \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{e=1}^{\infty} (-B_{m0e} \sqrt{c_p^2 k^2_{m0e} - \frac{J^2}{4}} \frac{e\pi}{D} + \hat{B}_{m0e} \sqrt{c_T^2 k^2_{m0e} - \frac{J^2}{4}} \frac{m\pi}{H}) \cos\left(\frac{m\pi}{H}x\right) \sin\left(\frac{e\pi}{D}z\right) \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{e=1}^{\infty} (-B_{0ne} \sqrt{c_p^2 k^2_{0ne} - \frac{J^2}{4}} \frac{e\pi}{D} - \bar{B}_{0ne} \sqrt{c_T^2 k^2_{0ne} - \frac{J^2}{4}} \frac{n\pi}{L}) \cos\left(\frac{n\pi}{L}y\right) \sin\left(\frac{e\pi}{D}z\right) \\ & + \sum_{e=1}^{\infty} (-B_{00e} \sqrt{c_p^2 k^2_{00e} - \frac{J^2}{4}} \frac{e\pi}{D}) \sin\left(\frac{e\pi}{D}z\right) = 0 \quad (3.104) \end{aligned}$$

由上式得：

$$B_{mne} \sqrt{c_p^2 k^2_{mne} - \frac{J^2}{4}} \frac{e}{D} + \bar{B}_{mne} \sqrt{c_T^2 k^2_{mne} - \frac{J^2}{4}} \frac{n}{L} - \hat{B}_{mne} \sqrt{c_T^2 k^2_{mne} - \frac{J^2}{4}} \frac{m}{H} = 0 \quad (3.105)$$

$$B_{m0e} \sqrt{c_p^2 k^2_{m0e} - \frac{J^2}{4}} \frac{e}{D} - \hat{B}_{m0e} \sqrt{c_T^2 k^2_{m0e} - \frac{J^2}{4}} \frac{m}{H} = 0 \quad (3.106)$$

$$B_{0ne} \sqrt{c_p^2 k^2_{0ne} - \frac{J^2}{4}} \frac{e}{D} + \bar{B}_{0ne} \sqrt{c_T^2 k^2_{0ne} - \frac{J^2}{4}} \frac{n}{L} = 0 \quad (3.107)$$

$$B_{00e} = 0 \quad (3.108)$$

由(3.96)及(3.101)式

$$B_{mn0} \sqrt{c_p^2 k^2_{mn0} - \frac{J^2}{4}} \frac{m}{H} - \tilde{B}_{mn0} \sqrt{c_T^2 k^2_{mn0} - \frac{J^2}{4}} \frac{n}{L} = 0 \quad (3.109)$$

$$B_{mn0} \sqrt{c_p^2 k^2_{mn0} - \frac{J^2}{4}} \frac{n}{L} + \tilde{B}_{mn0} \sqrt{c_T^2 k^2_{mn0} - \frac{J^2}{4}} \frac{m}{H} = 0 \quad (3.110)$$

得：

$$B_{mn0} = \tilde{B}_{mn0} = 0$$

由(3.97)及(3.106)式

$$B_{m0e} \sqrt{c_p^2 k^2_{m0e} - \frac{J^2}{4}} \frac{m}{H} + \hat{B}_{m0e} \sqrt{c_T^2 k^2_{m0e} - \frac{J^2}{4}} \frac{e}{D} = 0 \quad (3.111)$$

$$B_{m0e} \sqrt{c_p^2 k^2_{m0e} - \frac{J^2}{4}} \frac{e}{D} - \hat{B}_{m0e} \sqrt{c_T^2 k^2_{m0e} - \frac{J^2}{4}} \frac{m}{H} = 0 \quad (3.112)$$

得：

$$B_{m0e} = \hat{B}_{m0e} = 0$$

由(3.102)及(3.107)式

$$B_{0ne} \sqrt{c_p^2 k^2_{0ne} - \frac{J^2}{4}} \frac{n}{L} - \bar{B}_{0ne} \sqrt{c_T^2 k^2_{0ne} - \frac{J^2}{4}} \frac{e}{D} = 0 \quad (3.113)$$

$$B_{0ne} \sqrt{c_p^2 k^2_{0ne} - \frac{J^2}{4}} \frac{e}{D} + \bar{B}_{0ne} \sqrt{c_T^2 k^2_{0ne} - \frac{J^2}{4}} \frac{n}{L} = 0 \quad (3.114)$$

得：

$$B_{0ne} = \bar{B}_{0ne} = 0$$

由以上所得的關係，將 ϕ 、 ψ_1 、 ψ_2 、 ψ_3 的全解(3.56)、(3.57)、(3.58)、(3.59)式，整理成：

$$\phi = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{e=1}^{\infty} e^{-\frac{J}{2}t} \left[A_{mne} \cos\left(\sqrt{c_p^2 k_{mne}^2 - \frac{J^2}{4}}t\right) + B_{mne} \sin\left(\sqrt{c_p^2 k_{mne}^2 - \frac{J^2}{4}}t\right) \right] \cos\left(\frac{m\pi}{H}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{L}y\right) \cos\left(\frac{e\pi}{D}z\right) \quad (3.115)$$

$$\psi_1 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{e=1}^{\infty} e^{-\frac{J}{2}t} \left[\bar{A}_{mne} \cos\left(\sqrt{c_T^2 k_{mne}^2 - \frac{J^2}{4}}t\right) + \bar{B}_{mne} \sin\left(\sqrt{c_T^2 k_{mne}^2 - \frac{J^2}{4}}t\right) \right] \cos\left(\frac{m\pi}{H}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}y\right) \sin\left(\frac{e\pi}{D}z\right) \quad (3.116)$$

$$\psi_2 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{e=1}^{\infty} e^{-\frac{J}{2}t} \left[\hat{A}_{mne} \cos\left(\sqrt{c_T^2 k_{mne}^2 - \frac{J^2}{4}}t\right) + \hat{B}_{mne} \sin\left(\sqrt{c_T^2 k_{mne}^2 - \frac{J^2}{4}}t\right) \right] \sin\left(\frac{m\pi}{H}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{L}y\right) \sin\left(\frac{e\pi}{D}z\right) \quad (3.117)$$

$$\psi_3 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{e=1}^{\infty} e^{-\frac{J}{2}t} \left[\tilde{A}_{mne} \cos\left(\sqrt{c_T^2 k_{mne}^2 - \frac{J^2}{4}}t\right) + \tilde{B}_{mne} \sin\left(\sqrt{c_T^2 k_{mne}^2 - \frac{J^2}{4}}t\right) \right] \sin\left(\frac{m\pi}{H}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}y\right) \cos\left(\frac{e\pi}{D}z\right) \quad (3.118)$$

將(3.115)、(3.116)、(3.117)、(3.118)式是在 $J^2 - 4c_p^2 k_{mne}^2 < 0$ 、 $J^2 - 4c_T^2 \bar{k}_{m_1 n_1 e_1}^2 < 0$ 、

$J^2 - 4c_T^2 \tilde{k}_{m_3 n_3 e_3}^2 < 0$ 、 $J^2 - 4c_T^2 \hat{k}_{m_2 n_2 e_2}^2 < 0$ 時所求得的，又因為

$$k_{mne} = \bar{k}_{m_1 n_1 e_1} = \hat{k}_{m_2 n_2 e_2} = \tilde{k}_{m_3 n_3 e_3} \quad m, n, e = 1, 2, \dots$$

所以決定解的形式的條件為：

$$J^2 - 4c_p^2 k_{mne}^2 \begin{cases} < 0 \\ = 0 \\ > 0 \end{cases}$$

$$J^2 - 4c_T^2 k^2_{mne} \begin{cases} < 0 \\ = 0 \\ > 0 \end{cases}$$

(3) 解係數 A_{mne} 、 $\bar{A}_{m_1 n_1 e_1}$ 、 $\hat{A}_{m_2 n_2 e_2}$ 、 $\tilde{A}_{m_3 n_3 e_3}$ 、 B_{mne} 、 $\bar{B}_{m_1 n_1 e_1}$ 、 $\hat{B}_{m_2 n_2 e_2}$ 、 $\tilde{B}_{m_3 n_3 e_3}$

I. 由 $z=0$ 的單點作用力的邊界條件決定係數

將 ϕ 、 ψ_1 、 ψ_2 、 ψ_3 的全解(3.115)、(3.116)、(3.117)、(3.118)式，代入 $z=0$ 的單點作用力的邊界條件：

$$\begin{aligned} \tau_{zz} &= \lambda \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right] + 2\mu \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y \partial z} \right] \\ &= -\sigma \cos\left(\frac{x-a}{c} \frac{\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{y-b}{c'} \frac{\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{t}{c''} \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

\Rightarrow

$$\begin{aligned} \tau_{zz} &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{e=1}^{\infty} e^{\frac{J}{2}} \left\{ \lambda \left[A_{mne} \cos\left(\sqrt{c_p^2 k^2_{mne} - \frac{J^2}{4}} t\right) + B_{mne} \sin\left(\sqrt{c_p^2 k^2_{mne} - \frac{J^2}{4}} t\right) \right] \right. \\ &\quad \left[-\left(\frac{m\pi}{H}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 - \left(\frac{e\pi}{D}\right)^2 \right] \\ &\quad + 2\mu \left[A_{mne} \cos\left(\sqrt{c_p^2 k^2_{mne} - \frac{J^2}{4}} t\right) + B_{mne} \sin\left(\sqrt{c_p^2 k^2_{mne} - \frac{J^2}{4}} t\right) \right] \left[-\left(\frac{e\pi}{D}\right)^2 \right] \\ &\quad + \left[\hat{A}_{mne} \cos\left(\sqrt{c_T^2 k^2_{mne} - \frac{J^2}{4}} t\right) + \hat{B}_{mne} \sin\left(\sqrt{c_T^2 k^2_{mne} - \frac{J^2}{4}} t\right) \right] \left[\frac{m\pi}{H} \frac{e\pi}{D} \right] \\ &\quad \left. - \left[\bar{A}_{mne} \cos\left(\sqrt{c_T^2 k^2_{mne} - \frac{J^2}{4}} t\right) + \bar{B}_{mne} \sin\left(\sqrt{c_T^2 k^2_{mne} - \frac{J^2}{4}} t\right) \right] \left[\frac{n\pi}{L} \frac{e\pi}{D} \right] \right\} \\ &\quad \cos\left(\frac{m\pi}{H} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{L} y\right) \\ &= -\sigma \cos\left(\frac{x-a}{c} \frac{\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{y-b}{c'} \frac{\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{t}{c''} \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

將(3.93)、(3.105)式代入上式

$$A_{mne} \frac{e}{D} + \bar{A}_{mne} \frac{n}{L} - \hat{A}_{mne} \frac{m}{H} = 0 \quad (3.119)$$

$$B_{mne} \sqrt{c_p^2 k^2_{mne} - \frac{J^2}{4}} \frac{e}{D} + \bar{B}_{mne} \sqrt{c_T^2 k^2_{mne} - \frac{J^2}{4}} \frac{n}{L} - \hat{B}_{mne} \sqrt{c_T^2 k^2_{mne} - \frac{J^2}{4}} \frac{m}{H} = 0 \quad (3.120)$$

得：

$$\begin{aligned}
\tau_{zz} &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{e=1}^{\infty} e^{-\frac{J}{2}} \left\{ \lambda \left[A_{mne} \cos\left(\sqrt{c_p^2 k^2_{mne} - \frac{J^2}{4}} t\right) + B_{mne} \cos\left(\sqrt{c_p^2 k^2_{mne} - \frac{J^2}{4}} t\right) \right] \right. \\
&\quad \left[-\left(\frac{m\pi}{H}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 - \left(\frac{e\pi}{D}\right)^2 \right] \\
&\quad + 2\mu \left[A_{mne} \cos\left(\sqrt{c_T^2 k^2_{mne} - \frac{J^2}{4}} t\right) - A_{mne} \cos\left(\sqrt{c_p^2 k^2_{mne} - \frac{J^2}{4}} t\right) \right] \left[\left(\frac{e\pi}{D}\right)^2 \right] \\
&\quad + \left[B_{mne} \frac{\sqrt{c_p^2 k^2_{mne} - \frac{J^2}{4}}}{\sqrt{c_T^2 k^2_{mne} - \frac{J^2}{4}}} \sin\left(\sqrt{c_T^2 k^2_{mne} - \frac{J^2}{4}} t\right) + B_{mne} \sin\left(\sqrt{c_p^2 k^2_{mne} - \frac{J^2}{4}} t\right) \right] \\
&\quad \left. \left[\left(\frac{e\pi}{D}\right)^2 \right] \right\} \cos\left(\frac{m\pi}{H} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{L} y\right) \\
&= -\sigma \cos\left(\frac{x-a}{c} \frac{\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{y-b}{c'} \frac{\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{t}{c''} \frac{\pi}{2}\right) \tag{3.121}
\end{aligned}$$

由於 $f(x)$ 、 $f(y)$ 皆為 cosine 函數，由傅立葉級數求係數，得：

$$\begin{aligned}
\sum_{e=1}^{\infty} e^{-\frac{J}{2}} \left\{ \lambda \left[A_{mne} \cos\left(\sqrt{c_p^2 k^2_{mne} - \frac{J^2}{4}} t\right) + B_{mne} \cos\left(\sqrt{c_p^2 k^2_{mne} - \frac{J^2}{4}} t\right) \right] \right. \\
\left[-\left(\frac{m\pi}{H}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 - \left(\frac{e\pi}{D}\right)^2 \right] \\
+ 2\mu \left[A_{mne} \cos\left(\sqrt{c_T^2 k^2_{mne} - \frac{J^2}{4}} t\right) - A_{mne} \cos\left(\sqrt{c_p^2 k^2_{mne} - \frac{J^2}{4}} t\right) \right] \left[\left(\frac{e\pi}{D}\right)^2 \right] \\
+ \left[B_{mne} \frac{\sqrt{c_p^2 k^2_{mne} - \frac{J^2}{4}}}{\sqrt{c_T^2 k^2_{mne} - \frac{J^2}{4}}} \sin\left(\sqrt{c_T^2 k^2_{mne} - \frac{J^2}{4}} t\right) + B_{mne} \sin\left(\sqrt{c_p^2 k^2_{mne} - \frac{J^2}{4}} t\right) \right] \\
\left. \left[\left(\frac{e\pi}{D}\right)^2 \right] \right\} \\
= -\frac{4\sigma}{HL} \frac{\pi \cos\left(\frac{am\pi}{H}\right) \cos\left(\frac{cm\pi}{H}\right)}{c \left[\left(\frac{\pi}{2c}\right)^2 - \left(\frac{m\pi}{H}\right)^2 \right]} \frac{\pi \cos\left(\frac{bn\pi}{L}\right) \cos\left(\frac{c'n\pi}{L}\right)}{c' \left[\left(\frac{\pi}{2c'}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \right]} \sin\left(\frac{t}{c''} \frac{\pi}{2}\right)
\end{aligned}$$

$$\text{令 } f(t) = \sin\left(\frac{t}{c''} \frac{\pi}{2}\right)$$

整理得：

$$\begin{aligned}
& \sum_{e=1}^{\infty} \left[-k^2_{mne} \lambda (A_{mne} + B_{mne}) - 2\mu \left(\frac{e\pi}{D}\right)^2 A_{mne} \right] \cos\left(\sqrt{c_p^2 k^2_{mne} - \frac{J^2}{4}} t\right) \\
& \quad + 2\mu \left(\frac{e\pi}{D}\right)^2 B_{mne} \sin\left(\sqrt{c_p^2 k^2_{mne} - \frac{J^2}{4}} t\right) \\
& \quad + 2\mu \left(\frac{e\pi}{D}\right)^2 A_{mne} \cos\left(\sqrt{c_T^2 k^2_{mne} - \frac{J^2}{4}} t\right) \\
& \quad + 2\mu \left(\frac{e\pi}{D}\right)^2 \frac{\sqrt{c_p^2 k^2_{mne} - \frac{J^2}{4}}}{\sqrt{c_T^2 k^2_{mne} - \frac{J^2}{4}}} B_{mne} \sin\left(\sqrt{c_T^2 k^2_{mne} - \frac{J^2}{4}} t\right) \\
& = -\frac{4\sigma}{HL} \frac{\pi \cos\left(\frac{am\pi}{H}\right) \cos\left(\frac{cm\pi}{H}\right)}{c \left[\left(\frac{\pi}{2c}\right)^2 - \left(\frac{m\pi}{H}\right)^2 \right]} \frac{\pi \cos\left(\frac{bn\pi}{L}\right) \cos\left(\frac{c'n\pi}{L}\right)}{c' \left[\left(\frac{\pi}{2c'}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \right]} f(t) e^{\frac{J}{2}t} \quad (3.122)
\end{aligned}$$

令

$$g_{mne} = \left[-k^2_{mne} \lambda (A_{mne} + B_{mne}) - 2\mu \left(\frac{e\pi}{D}\right)^2 A_{mne} \right]$$

$$h_{mne} = 2\mu \left(\frac{e\pi}{D}\right)^2 B_{mne}$$

$$o_{mne} = 2\mu \left(\frac{e\pi}{D}\right)^2 A_{mne}$$

$$p_{mne} = 2\mu \left(\frac{e\pi}{D}\right)^2 \frac{\sqrt{c_p^2 k^2_{mne} - \frac{J^2}{4}}}{\sqrt{c_T^2 k^2_{mne} - \frac{J^2}{4}}} B_{mne}$$

$$q_{mn} = -\frac{4\sigma}{HL} \frac{\pi \cos\left(\frac{am\pi}{H}\right) \cos\left(\frac{cm\pi}{H}\right)}{c \left[\left(\frac{\pi}{2c}\right)^2 - \left(\frac{m\pi}{H}\right)^2 \right]} \frac{\pi \cos\left(\frac{bn\pi}{L}\right) \cos\left(\frac{c'n\pi}{L}\right)}{c' \left[\left(\frac{\pi}{2c'}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \right]}$$

(3.122)式整理成

$$\begin{aligned}
& \sum_{e=1}^{\infty} (g^2_{mne} + h^2_{mne}) \cos\left[\sqrt{c_p^2 k^2_{mne} - \frac{J^2}{4}} t - \tan^{-1}\left(\frac{h_{mne}}{g_{mne}}\right)\right] \\
& \quad + (o^2_{mne} + p^2_{mne}) \cos\left[\sqrt{c_T^2 k^2_{mne} - \frac{J^2}{4}} t - \tan^{-1}\left(\frac{p_{mne}}{o_{mne}}\right)\right] = q_{mn} f(t) e^{\frac{J}{2}t}
\end{aligned}$$

上式包含兩種不同頻率的波，且此兩種波的週期沒有倍數關係，因此無法將兩個波的係數分別求出來。想利用實驗數據來決定係數，由於地聲探測器是速度，上式的 $f(t)$ 是應

力的函數，不是速度的函數，因此無法由地聲探測器的資料求得係數 A_{mne} 、 B_{mne} 。需要由速度配合地聲資料求係數。

II. 由速度決定係數

將 ϕ 、 ψ_1 、 ψ_2 、 ψ_3 的全解(3.119)、(3.120)、(3.121)、(3.122)式，代入 u 、 v 、 w ，得：

$$\begin{aligned}
 u &= \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \psi_3}{\partial y} - \frac{\partial \psi_2}{\partial z} \\
 &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{e=1}^{\infty} e^{-\frac{J}{2}t} \left\{ - \left[A_{mne} \cos\left(\sqrt{c_p^2 k^2_{mne} - \frac{J^2}{4}}t\right) + B_{mne} \sin\left(\sqrt{c_p^2 k^2_{mne} - \frac{J^2}{4}}t\right) \right] \left(\frac{m\pi}{H}\right) \right. \\
 &\quad + \left[\tilde{A}_{mne} \cos\left(\sqrt{c_T^2 k^2_{mne} - \frac{J^2}{4}}t\right) + \tilde{B}_{mne} \sin\left(\sqrt{c_T^2 k^2_{mne} - \frac{J^2}{4}}t\right) \right] \left(\frac{n\pi}{L}\right) \\
 &\quad \left. - \left[\hat{A}_{mne} \cos\left(\sqrt{c_T^2 k^2_{mne} - \frac{J^2}{4}}t\right) + \hat{B}_{mne} \sin\left(\sqrt{c_T^2 k^2_{mne} - \frac{J^2}{4}}t\right) \right] \left(\frac{e\pi}{D}\right) \right\} \\
 &\quad \sin\left(\frac{m\pi}{H}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{L}y\right) \cos\left(\frac{e\pi}{D}z\right) \quad (3.123)
 \end{aligned}$$

$$A_{mne} \frac{m}{H} - \tilde{A}_{mne} \frac{n}{L} + \hat{A}_{mne} \frac{e}{D} = 0 \quad (3.124)$$

$$\begin{aligned}
 v &= \frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{\partial \psi_3}{\partial x} + \frac{\partial \psi_1}{\partial z} \\
 &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{e=1}^{\infty} e^{-\frac{J}{2}t} \left\{ - \left[A_{mne} \cos\left(\sqrt{c_p^2 k^2_{mne} - \frac{J^2}{4}}t\right) + B_{mne} \sin\left(\sqrt{c_p^2 k^2_{mne} - \frac{J^2}{4}}t\right) \right] \left(\frac{n\pi}{L}\right) \right. \\
 &\quad + \left[\bar{A}_{mne} \cos\left(\sqrt{c_T^2 k^2_{mne} - \frac{J^2}{4}}t\right) + \bar{B}_{mne} \sin\left(\sqrt{c_T^2 k^2_{mne} - \frac{J^2}{4}}t\right) \right] \left(\frac{e\pi}{D}\right) \\
 &\quad \left. - \left[\tilde{A}_{mne} \cos\left(\sqrt{c_T^2 k^2_{mne} - \frac{J^2}{4}}t\right) + \tilde{B}_{mne} \sin\left(\sqrt{c_T^2 k^2_{mne} - \frac{J^2}{4}}t\right) \right] \left(\frac{m\pi}{H}\right) \right\} \\
 &\quad \cos\left(\frac{m\pi}{H}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}y\right) \cos\left(\frac{e\pi}{D}z\right) \quad (3.125)
 \end{aligned}$$

$$w = \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x} - \frac{\partial \psi_1}{\partial y}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{e=1}^{\infty} e^{-\frac{J}{2}t} \left\{ \left[A_{mne} \cos\left(\sqrt{c_p^2 k^2_{mne} - \frac{J^2}{4}}t\right) + B_{mne} \sin\left(\sqrt{c_p^2 k^2_{mne} - \frac{J^2}{4}}t\right) \right] \left(\frac{e\pi}{D}\right) \right. \\
&\quad + \left[\hat{A}_{mne} \cos\left(\sqrt{c_T^2 k^2_{mne} - \frac{J^2}{4}}t\right) + \hat{B}_{mne} \sin\left(\sqrt{c_T^2 k^2_{mne} - \frac{J^2}{4}}t\right) \right] \left(\frac{m\pi}{H}\right) \\
&\quad \left. - \left[\bar{A}_{mne} \cos\left(\sqrt{c_T^2 k^2_{mne} - \frac{J^2}{4}}t\right) + \bar{B}_{mne} \sin\left(\sqrt{c_T^2 k^2_{mne} - \frac{J^2}{4}}t\right) \right] \left(\frac{n\pi}{L}\right) \right\} \\
&\quad \cos\left(\frac{m\pi}{H}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{L}y\right) \sin\left(\frac{e\pi}{D}z\right) \quad (3.126)
\end{aligned}$$

3.4 實驗驗證

我們於試驗室中，在一個一立方公尺的砂箱中放滿砂石，砂石均為通過四號但不過五號篩的石英砂，地聲探測器採用美國 Geo Space PC-2D 與 PC-3D 型號之檢知器。的設計是探測速度進而轉換成電壓訊號，伏特 V 與速度轉換式為：

$$0.01\text{m/s}=0.244\text{V}。$$

但是因為實際聲波速度與地聲檢知器中感應器振動速度並不相同，因此這個速度與真正介質的振動速度仍應該有依倍數關係。因為實驗時怕收不到訊號，因此使用訊號放大器 (PCL-818HG 介面卡)，放大到 $\pm 5\text{V}$ ，所以伏特 V 與速度轉換式為：

$$1\text{V}=0.0089(\text{m/s})，\text{因此只要知道電壓就可以得到速度。}$$

利用離散傅力葉轉換(Fast Fourier Transform)，將時間域的資料轉換到頻率域，先求得速度的係數，進而依前節導出之公式求得位移量係數 A_{mne} 、 B_{mne} 、 \bar{A}_{mne} 、 \bar{B}_{mne} 、 \hat{A}_{mne} 、 \hat{B}_{mne} 、 \tilde{A}_{mne} 、 \tilde{B}_{mne} 。不同波結果比較如下

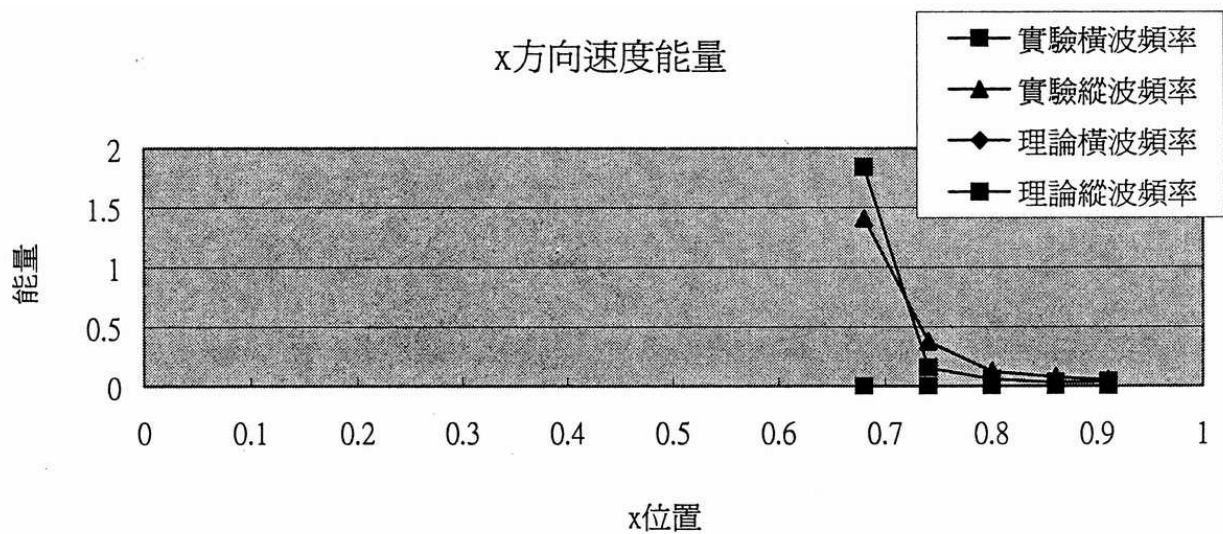


圖 3.1 x 方向理論與實測結果比較

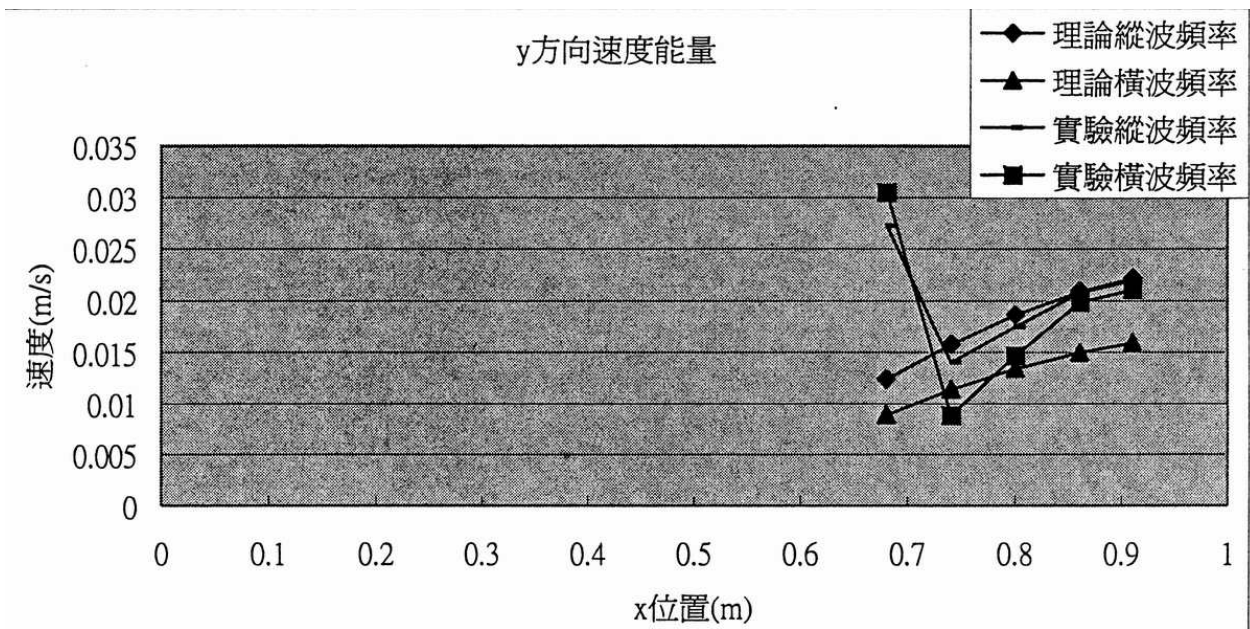


圖 3.2 y 方向理論與實測結果比較

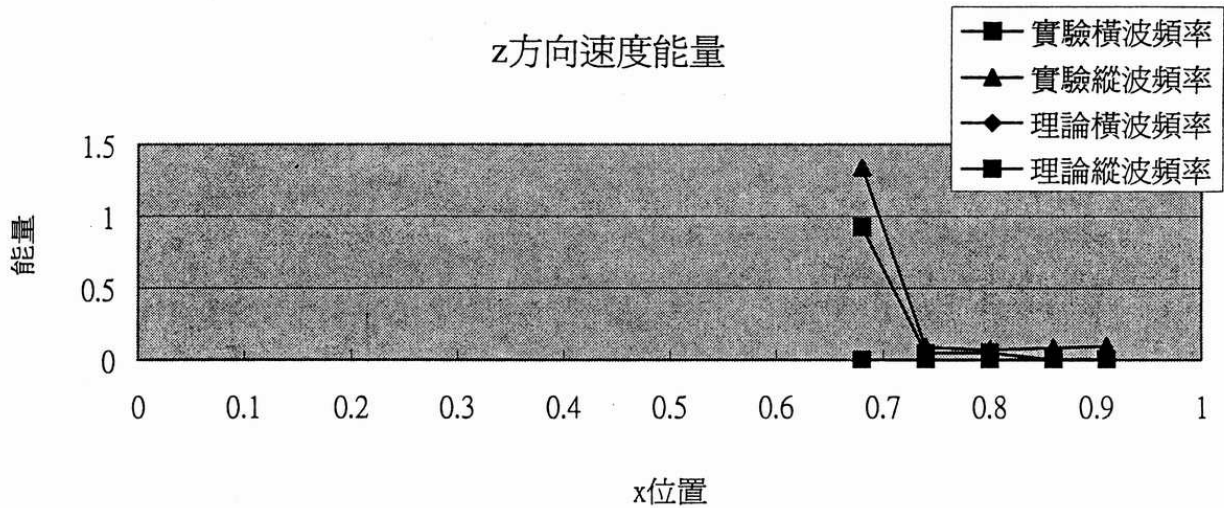


圖 3.3 z 方向理論與實測結果比較

由圖中可以看出結果非常接近，但是因為試驗中不確定因素太多，因此這部份只能說剛剛開始有初步結果。

第四章 與電磁波探測器

4.1 前言

台灣地區，每遇颱風豪雨常有崩塌、土石流等嚴重的災害發生。然而可能發生土石流的危險區域甚多，如要一一加以整治，則費用將十分龐大且耗時甚久。因此以預警系統於土石流發生前或發生後提出警告，用以保障下游居民之生命安全，為一較經濟之辦法。在許多土石流的成因中，其誘發運動之原因均為土壤中水分含量超過某一程度而地下水位又甚高，所以造成土石之集體運動。因此，地下水位的位置是決定土石流是否發生之重要因素。而發生後土石流含水量也很高，故我們提出一個預警系統之基本構想—首先調查並判定出會發生土石流的危險區域，之後用地下水模式計算其危險的地下水位，並同時監測其地下水位。在水位即將達到臨界值前一段時間發佈警訊，使下游居民有時間逃離。而因為此種危險水位均離地面不遠，因此本研究之著重點是在淺層地下水位（離地表兩公尺以內）。而以電磁波接近光速的波速而言，地下水位的變化可視為靜止，即可以做到即時的測量。而在土石流發生後，反射之訊號更可用來計算土石流之前鋒速度與剖面，因此可以用來記錄土石流之運動，進而再修正土石流之規模與到下游之時間。

4.2 電磁波之模擬

4.2.1 控制方程式

電磁波的控制方程式為 Maxwell 方程式：

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad \nabla \cdot \vec{D} = \rho \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (4.1)$$

其中 \vec{E} 為電場， \vec{J} 為電流， \vec{H} 為磁場， ρ 為電荷密度， \vec{D} 為電通量密度， \vec{B} 為磁通量密度。

而電通量密度 \vec{D} 與電場 \vec{E} 則以線性介質處理 (Chen, 1989, pp. 110)，因此

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad \vec{B} = \mu \vec{H} \quad \vec{J} = \sigma \vec{E} \quad (4.2)$$

其中， ϵ 為介質的介電係數(dielectric constant or permittivity)， μ 為介質的導磁係數(permeability)， σ 為介質的傳導係數(conductivity)。根據一般公認的研究，只要介

質中不含磁性物質，則 μ 為定值 ($\mu = \mu_0$ ， μ_0 為真空中的導磁係數)。 ε 和 σ 則視介質可能為空間和時間的函數。

本文將室內實驗土壤視為等向性介質，因此用層狀介質法(Ulaby, Moore and Fung, 1986)來模擬電磁波。層狀介質法是把土壤在深度上分層，每一層的土壤特性不同，而同一層內則有相同的土壤特性；將土壤特性代入土壤介電係數的模式，即在不同層可得不同的介電係數。再針對某一特定頻率的入射波，以解析的方式解出該頻率下的反射波；最後再把各個頻率的反射波組合，經過傅氏轉換 (Fourier transform)後得到時域 (time domain) 上的解答。此法適用於室內實驗或現場，土壤分佈均勻時使用。

4.2.2 土壤與水的介電係數

要運用層狀介質法於土壤，則其物質參數即 μ 、 ε 和 σ 均得先知道，其中 $\mu = \mu_0$ 為真空中的導磁係數，為一常數 (其值為 $\frac{1}{4\pi} \times 10^7$)； σ 可由介電係數的虛部得到。

一般認為土壤可視為土壤顆粒、空氣和水的組合。水又可分成僅包含在土壤顆粒邊緣一層薄膜內的包覆水 (bound water) 和可以四處流動的自由水 (free water)。由於包覆水被土壤顆粒緊密吸引，使得電磁波入射在包覆水和自由水中的行為有很大的不同，所以土壤的介電係數之行為表現需視為這四種成分的組合 (Ulaby, 1985; Wang, 1980; Shutko, 1982)。同時土壤的介電係數又為鹽度、含水量、土壤級配、溫度和入射波頻率的函數；其中鹽度、頻率、和溫度只會影響土壤中自由水的介電係數，而土壤級配會造成土壤顆粒表面積很大的變化，而影響到包覆水的多寡，進而影響到土壤的介電係數。在現存的文獻中，大部份研究都集中於含水量、頻率和土壤組成對介電係數的影響，關於鹽度和溫度的影響多併入水之介電係數中 (Ulaby, 1986)。

4.2.2.1 水的介電係數

水的介電係數主要受溫度、頻率和鹽度的影響；而純水的介電係數可用 Debye equation (Debye, 1929)表示為：

$$\varepsilon_{fw} = \varepsilon_{w\infty} + \frac{\varepsilon_{w0} - \varepsilon_{w\infty}}{1 + i2\pi f\tau_w} \quad (4.3)$$

其中 ε_{fw} 為水在入射波頻率為 f 時的介電係數， f 為入射波頻率。而根據 Lane and Saxton

(1952)， $\epsilon_{w\infty}=4.9$ 為在頻率趨近無窮大時之介電係數。且其受溫度影響很小，一般均視為常數。而溫度因子 τ_w 則可由下式求得 (Stogryn, 1971)：

$$2\pi\tau_w = 1.1109 \times 10^{-10} - 3.824 \times 10^{-12}T + 6.938 \times 10^{-14}T^2 - 5.096 \times 10^{-16}T^3 \quad (4.4)$$

ϵ_{w0} 則可由下式求得 (Klein and Swift, 1977)：

$$\epsilon_{w0} = 88.045 - 0.04147T + 6.295 \times 10^{-4}T + 6.295 \times 10^{-4}T^2 + 1.75 \times 10^{-5}T^3 \quad (4.5)$$

其中 T 為溫度 (°C)。至於鹽度則會造成電磁波衰減得非常嚴重 (Klein and Swift (1977), Ho and Hall (1977), Ho et. al (1974))。一般土石流地區鹽份均低，故不考慮。本次實驗中採用純水的式子來求水的介電係數。例如在溫度為 25°C，入射波頻率為 2.56GHz 時，自由水之相對介電係數為 77.98-12.43i。

4.2.2.2 土壤介電係數模式

有關土壤介電係數的模式，早在 1950 年代就有學者提出，這些早期的公式均是在特定的實驗條件(土壤種類、頻率等)下所得到的結果，大多只視土壤為土壤顆粒和水兩種成分所組成，但這些公式都只能預測出土壤介電係數的趨勢，而無法準確預測實驗值。而且，由於沒有需檢定之參數，所以它們大致上都只能適用於特定的土壤種類和特定的頻率。

Shutko (1982) 把這些公式做一整理，並以一些公認較準確且泛含各種土壤組成及實驗頻率的實驗值來做比較，結果發現只有 refractive formula (Birchak, 1974) 較好，其餘不是只適合於特定土壤就是只能用於極窄的入射波頻率範圍內。而在頻率 1GHz~30GHz 之間，土壤種類從純砂 (pure sand) 到純黏土 (pure clay)，refractive formula 都表現的不錯，再加上簡單易用，適合作為初步估計用的公式。

約自 1980 年左右，學者們基於四種組成物混合 (four component mixing) 的概念，開始提出半經驗甚至理論的模型。這些模型中，由於多考慮了空氣和包覆水 (bound water) 的存在，較能準確預測出電磁波在土壤中的行為，並藉著一些需校正參數的改變，已能充分反應出土壤成分和入射波頻率對介電係數的影響，所以較能適用於現地複雜的土壤成分。由於其相當的複雜，再加上有 3~4 個參數要檢定，所以必須先對現地的土壤進行採樣，瞭解其成分，並在使用前加以檢定。

在上述概念下的土壤介電係數模式很多，但目前經最多人使用且經試驗證明最適合土壤用

之模式為 Ulaby(1985)所提出之模式。劉格非，黃名村，顏文儒(2000)也以實驗證實 Ulaby 模式確實優於其他之模式。Ulaby 根據四種組成物混合 (four component mixing) 的概念，視土壤為土壤顆粒、包覆水、自由水和空氣所組成，提出一個半經驗模型，此模型易於使用，加上其所測試的實驗資料幾乎包含了各種土壤級配，頻率也由 1 GHz 到 18 GHz 都有，準確性又很好，所以本文將用此模型來模擬土壤的介電係數。其概述如下：

$$\varepsilon_s^\alpha = V_g \varepsilon_g^\alpha + V_a \varepsilon_a^\alpha + V_{fw} \varepsilon_{fw}^\alpha + V_{bw} \varepsilon_{bw}^\alpha \quad m_v^\beta \varepsilon_{fw}^\alpha = V_{fw} \varepsilon_{fw}^\alpha + V_{bw} \varepsilon_{bw}^\alpha \quad (4.6)$$

其中 ε_s 、 ε_g 、 ε_a 、 ε_{fw} 分別代表土壤、土壤顆粒、空氣與自由水之介電係數， V_g 與 V_a 為土壤顆粒和空氣所佔的體積百分比， m_v 為土壤的體積含水量，而 α 與 β 為要校正的參數。根據 Ulaby 所做的研究

$$\alpha = 0.65 \quad \beta_{\varepsilon'} = (127.48 - 0.519S - 0.152C)/100$$

$$\beta_{\varepsilon''} = (1.33797 - 0.603S - 0.166C)/100 \quad (4.7)$$

其中， $\beta_{\varepsilon'}$ 及 $\beta_{\varepsilon''}$ 分別代表由(7)式計算介電係數的實部與虛部時分別輸入的 β 值，S 與 C 為砂與黏土之體積百分比。土壤顆粒之介電係數 ε_g 亦可用土壤顆粒之乾比重 ρ_b 表為

$$\varepsilon_g = (1.01 + 0.44\rho_b)^2 - 0.062 \quad (4.8)$$

例如石英砂之孔隙率 0.55，含水量 $m_v=0.375$ ，入射波頻率 2.56GHz 時，其相對介電係數為 33.28-4.18i。

4.3 層狀介質法(LAYERED-MEDIA METHOD)

自然環境下，地表的改變尺度比起電磁波波長大很多，因此任何地面狀況，我們都可以用層狀介質來看待，只是每壹層中的介電係數會因組成成分與含水量而改變。

電磁波的控制方程式為麥克斯威爾方程式(*Maxwell's Equations*)

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu\sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (4.9)$$

因為是線性方程式，因此可以把不同波長分開處理，令 $\vec{E}(r,t) = \text{Re}[\vec{E}(r) \cdot e^{i\omega t}]$ 並帶入(4.9)

$$\nabla^2 \bar{E}(r) + \omega^2 \mu \varepsilon_c \bar{E}(r) = 0 \quad (4.10)$$

其中 $\varepsilon_c = \varepsilon - i \frac{\sigma}{\omega} = \varepsilon' - i \varepsilon''$ 為複數介電常數。

每壹層間的邊界條件為切線方向的電場與磁場強度連續

$$E_{1t} = E_{2t} ; H_{1t} = H_{2t} \quad (4.11)$$

下標數字為層數，t 表切線方向。

因水平項電場只有 E_y 因此 (4.10) 在每一層中可寫為

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \omega^2 \mu_m \varepsilon_m \right) E_{ym} = 0 \quad (4.12)$$

解上式可得

$$E_{ym} = \left(A_m e^{ik_{zm}z} + C_m e^{-ik_{zm}z} \right) e^{-ik_0 x \sin \theta_0} \quad (4.13)$$

其中 $k_{zm} = (\omega^2 \mu_m \varepsilon_m - k_0^2 \sin^2 \theta_0)^{1/2}$; k_0 為空氣中波數; θ_0 為入射角 A_m 與 C_m 分別為入射與反射的振幅。對電場取 Curl，得磁場為

$$H_{xm} = \frac{k_{zm}}{\omega \mu_m} \left(A_m e^{ik_{zm}z} - C_m e^{-ik_{zm}z} \right) e^{-ik_0 x \sin \theta_0} \quad (4.14)$$

$$H_{zm} = \frac{k_0 \sin \theta_0}{\omega \mu_m} \left(A_m e^{ik_{zm}z} + C_m e^{-ik_{zm}z} \right) e^{-ik_0 x \sin \theta_0} \quad (4.15)$$

自各層中間的邊界條件 (4.11) 可得

$$A_m e^{-ik_{zm}d_m} + C_m e^{ik_{zm}d_m} = A_{m+1} e^{-ik_{z(m+1)}d_m} + C_{m+1} e^{ik_{z(m+1)}d_m} \quad (4.16)$$

$$\mu_{m+1} k_{zm} (A_m e^{-ik_{zm}d_m} - C_m e^{ik_{zm}d_m}) = \mu_m k_{z(m+1)} (A_{m+1} e^{-ik_{z(m+1)}d_m} - C_{m+1} e^{ik_{z(m+1)}d_m}) \quad (4.17)$$

只要入射波大小給定，上兩式及可解得其他各層之入射與反射波。接下來我們就已試驗來驗證理論與電磁波探測器的可行性。

4.4 地下水位之探測

土石流最常見的發生方式為河床堆積飽和後受沖刷形成或邊坡不穩崩落後與河川中水混合

而成，也有其他學者如 Sitar (1992) 等認為土壤內的孔隙水壓突然上升，是導致土體不穩定轉變成土石流的重要因素。促使水壓上升的原因可能為雨水的入滲，或者是暴雨帶來的充沛水量由底岩向上湧升而導致土石流 (王幼行, 1994)。不論土石流形成原因為何，地下水水位過高均是導致土石流發生的重要因素。

4.3.1 實驗設備

在現地測量地下水水位時，我們將電磁波打入土壤中，可得到一組即時的反射訊號。如何從反射訊號中估計出水位的位置，便是此研究中最重要課題。為了驗證電磁波探測地下水水位之可行性，本研究用室內實驗將實驗結果與層狀介質法計算出之結果做比對。

4.4.1.1 實驗設備佈置

因為壓克力之介電係數較接近空氣的介電係數，在碰到電磁波時只會產生很小的反射，因此整個砂箱以壓克力製成。實驗之樣品 (砂) 裝在一個長、寬、高均為一公尺之壓克力箱子，在箱子底部每隔 2 公分便鑽一個洞，而每 4 個小洞便鑽一個較大的洞以讓水位計的管子通過。在這個鑽過洞的箱子底部另有一 1 公尺長，1 公尺寬，4 公分高的充水段；當進水時，水會先進入充水段，把充水段填滿後再透過上方箱底的小洞慢慢進入土體；同樣的，排水時水先進入充水段再由出水口排出。如此才能確保水位會均勻的抬升與下降。是否均勻更可用水位計來檢視箱內水位。

發射電波之天線架於一個底座有輪子且高度可調整之天線架上，整個架子以塑膠製成以減少雜訊。天線並與 HP8722 網路分析儀 (精度-50dB) 相接。HP8722 網路分析儀為一可以產生 0.6GHz 到 7GHz 的訊號源，並可以接收訊號、分析與記錄的機器。由網路分析儀所產生之訊號，經由同軸電纜傳輸至天線，再以波的形式發射出去。本研究使用頻率由 1GHz 到 4GHz 的波。實驗用粒徑均在 #20 號篩和 #40 號篩之間的石英砂來試驗。

我們需先量測土壤的含水量分佈，來驗證層狀介質法。因為量測之精度要求為公分，故選用電阻片來量。電阻片為一 26 公釐長、12 公釐寬、3 公釐厚之金屬片，並在金屬片上有小開口；其內部之構造為兩電線分別接在兩片 0.8 公釐長、0.8 公釐寬、0.1 公釐厚之金屬薄片。

4.4.2 實驗結果與分析

將前面所測量出之含水量代入 Ulaby 模式，由式(4.6)求得相對介電係數在深度上之剖面。先把水位降到離地表 40 公分處，靜置 7 天來使含水量剖面有較明顯的急變段，接著把水位往上抬升，分別在離地表 15 公分、20 公分、29 公分、34 公分、40 公分時記下訊號。接著，分別把水位於 15 公分、20 公分、29 公分、34 公分時之實驗資料在頻域 (frequency domain) 的強度 (amplitude) 值減去水位於 40 公分之強度值，而相位 (phase) 保持不變；再用此強度與原相位由傅氏轉換 (Fourier transform) 還原成時域上的資訊，以藉此消去環境與近場的雜訊，而得到清楚的水位訊號。而由於砂子已經靜置七天，在水位以上的砂之含水量應該接近乾砂，故我們以 Ulaby 模式配合層狀介質法來模擬水位於 15 公分、20 公分、29 公分、34 公分、40 公分的反射訊號，並以同樣的消滅雜訊方式得到水位訊號，與實驗訊號一起繪於圖 4.1。由圖 4.1 中可看出水位於 15 公分、20 公分、29 公分、34 公分之反射訊號峰值於實驗中分別出現於 1.82、2.61、3.65、4.04 nsec 之時；而用層狀介質法模擬後得到的水位訊號峰值分別出現於 1.89、2.53、3.64、4.14 nsec 之時，兩者非常接近，這表示由電磁波偵測地下水位原則上可行。

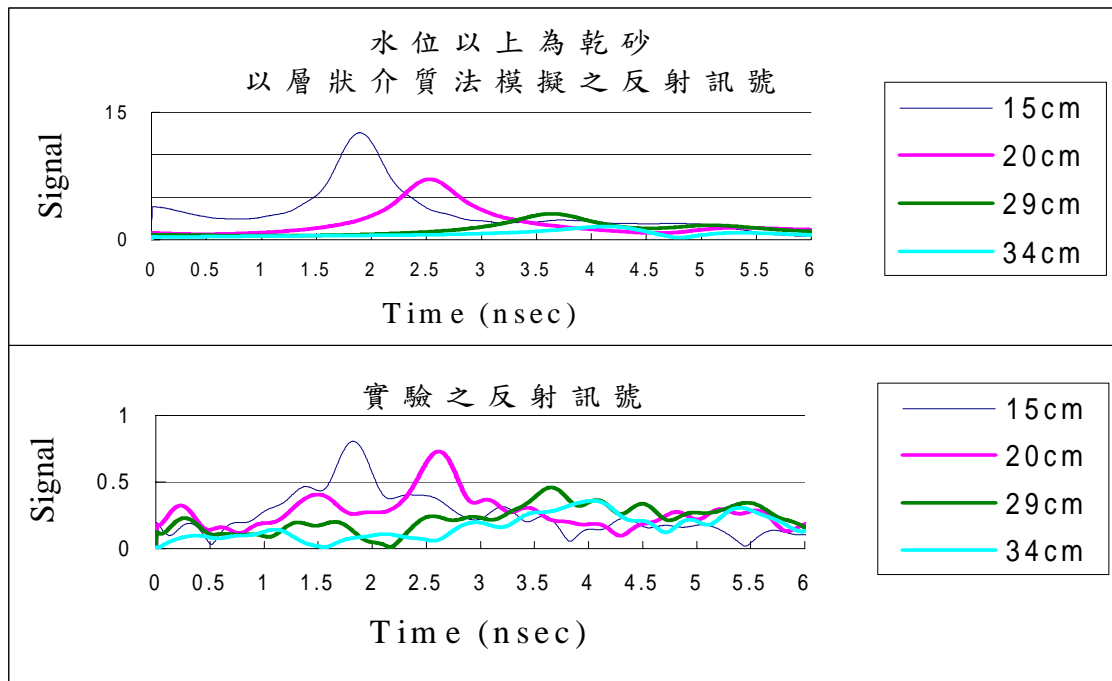


圖 4.1 經雜訊消滅處理後，不同水位下的反射訊號

4.4.3 非飽和層水分分佈之逆問題

由於隨著地層的土壤種類分佈及含水量分佈的不同，會得到不同的反射訊號，因此，要能找到地下水位便成為一個由反射訊號去反推出地層含水量分佈的逆問題。雖然一般數學上的逆問題都沒有唯一解，但在我們的問題中加入土壤特性可幫助我們解決這個問題。我們可先利用 3DFEMWATER 地下水模擬程式來模擬出地層中的含水量分佈。3DFEMWATER (Yeh G. T, 1987) 是一個能夠模擬飽和及非飽和地層中地下水流動的數值程式，配合電磁波數值程式，將可計算出某一含水量剖面所對應的反射訊號，建立一套含水量分佈與反射訊號間的對比模組，利用此對比模組來解非飽和水層水分分佈之逆問題。

4.4.3.1 對比模組的建立

當現地降雨時，其可能的產生的三種含水量剖面如圖 2 所示，由上而下分別為 (1) 地下水位上升而地表土壤未達飽和；(2) 地表已有入滲且地下水位已上升至地表附近；(3) 地表有入滲但地下水位仍然甚深。當我們輸入所要模擬的地層的邊界條件、土壤種類分佈、土壤水力參數（水力傳導係數、孔隙率、田間含水量等）後，3DFEMWATER 模式便可計算出各個時間的土壤含水量分佈剖面，每一個含水量剖面均可藉由電磁波數值程式計算出在某一入射波下的反射訊號，也就是一個含水量分佈對應到一個反射訊號。如圖 2 所示，同一個地層在不同的地下水及降雨邊界條件之下，便會有不同的含水量分佈和反射電波（此圖是用 3DFEMWATER 加上層狀介質法所得），如此，便建立了求解非飽和層水分分佈之逆問題的對比模組。在判斷時可以反射訊號峰值個數、峰值位置、峰值分佈、與第一、第二峰值強弱等條件來分出圖 4.2 中的三種地下水剖面分佈。

所以現地量測時，首先需對地層的土壤種類分佈及其水力參數做資料蒐集，必要時得採樣。將這些資料與當時的水文資料配合，輸入至 3DFEMWATER 中，便可建立對比模組，從現場測得的反射訊號去得到其對應的含水量剖面，以為判斷水位的依據。

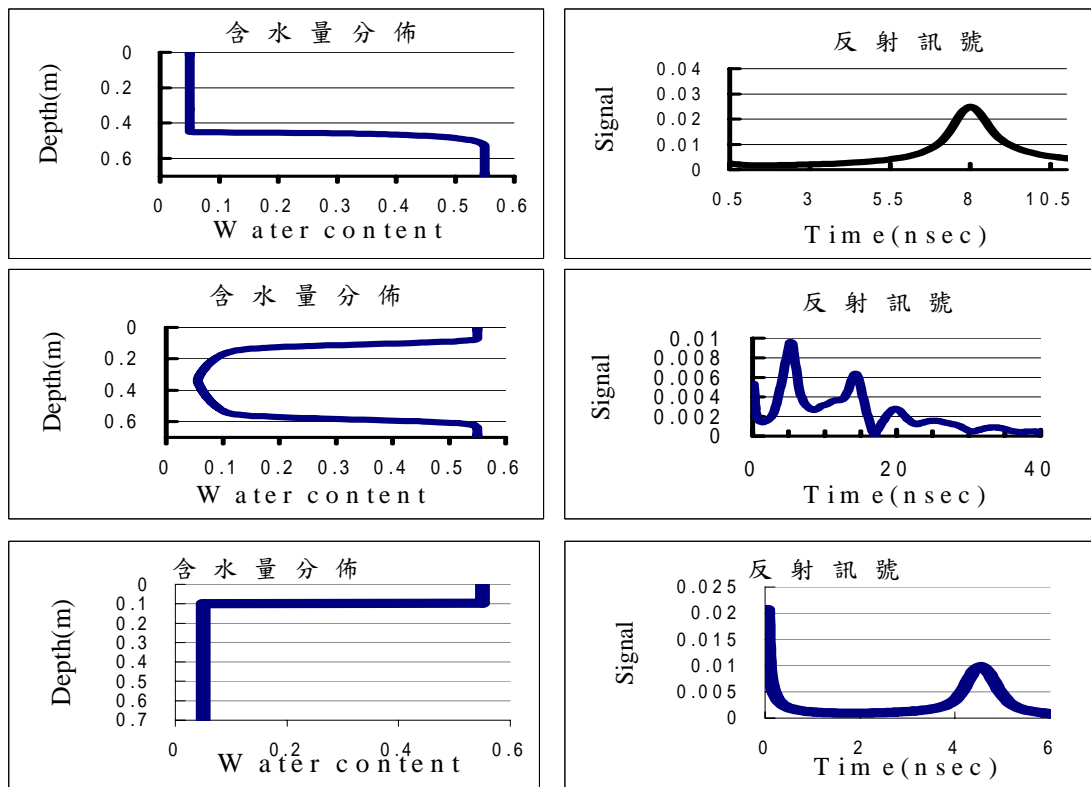


圖 4.2 含水量分佈與反射訊號之對比模組

4.4.3.2 探測水位變化與水位之真實位置

如果能對水位上升的速度作準確的預估，便可掌握住發佈警報的時效性，讓下游的居民有較充分的撤離時間，確保生命安全。由於電磁波可做到即時的測量，如何從不同發射時間所得之不同反射訊號中，估計出水位上升的速度，也是非常重要的。上升速度之估計對防災而言，比準確測出地下水剖面還重要。

如前節所述，我們將測得的反射訊號經由對比模組的比對後，便可得到土壤中的含水量隨深度的分佈情形，配合著已知的土壤種類分佈及其孔隙率，來判斷出何處的土壤水分是飽和的，如此便可得到地下水水位的位置。不同時間有不同的地下水水位位置，便可估計水位上升的速度。以下舉一個例子來說明。如圖 4.3 所示，我們以 3DFEMWATER 來模擬砂箱中水位上升的情形。分別記錄下 $t=10\text{sec}$ 及 $t=20\text{sec}$ 時砂箱中的含水量剖面，並且，以層狀介質法計算出，發射脈衝波(pulse)後這兩個含水量剖面下的反射訊號。假設我們實際上所量測到的訊號便是這兩個，經由對比模組的比較可得到圖 3 中的兩個含水量剖面。若由含水量剖面來看，在 $t=10\text{sec}$ 及 $t=20\text{sec}$ 時地下水水位分別位於地表下 0.53m 及 0.45m 之處，也就是水位在十秒內上升了 0.08m，這便是水位的上升速度。

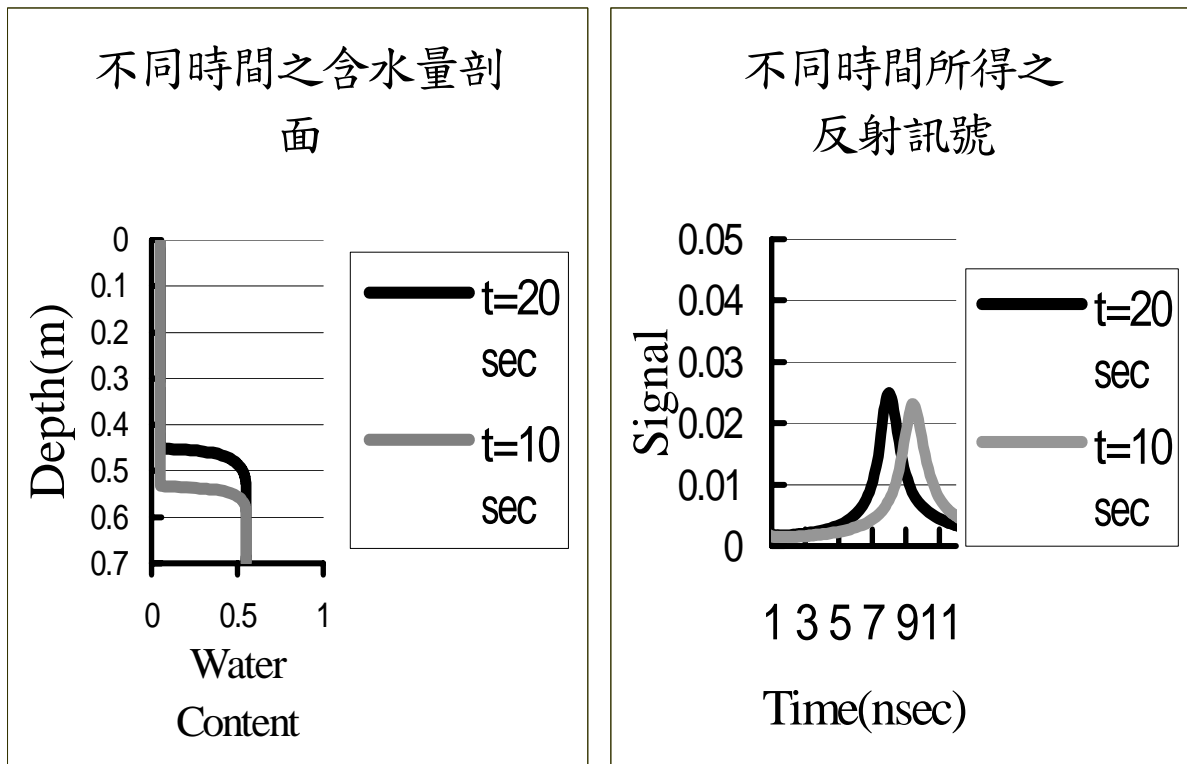


圖 4.3 不同時間之含水量剖面及模擬之反射訊號

4.5 洪峰之反射

地下水之探測是為了預測邊坡穩定，一旦邊坡崩塌後，溪水與其之混合就轉為監測重點，而許多其他的天然災害如洪水、土石流等，河道中水位與地表之變化也都是重點。我們若能準確的估計這些現象之形成與傳輸，將可在下游提前做好防範的準備（例如洪水來臨前先關閉閘門或是讓居民疏散等等），以減少損失。在本研究中所使用的雷達技術，亦可以達到這個目的。我們可將天線置於河道兩側，當得知上游有土石流或洪水發生時，便可以開始監測，其示意圖如圖 4.4 所示。

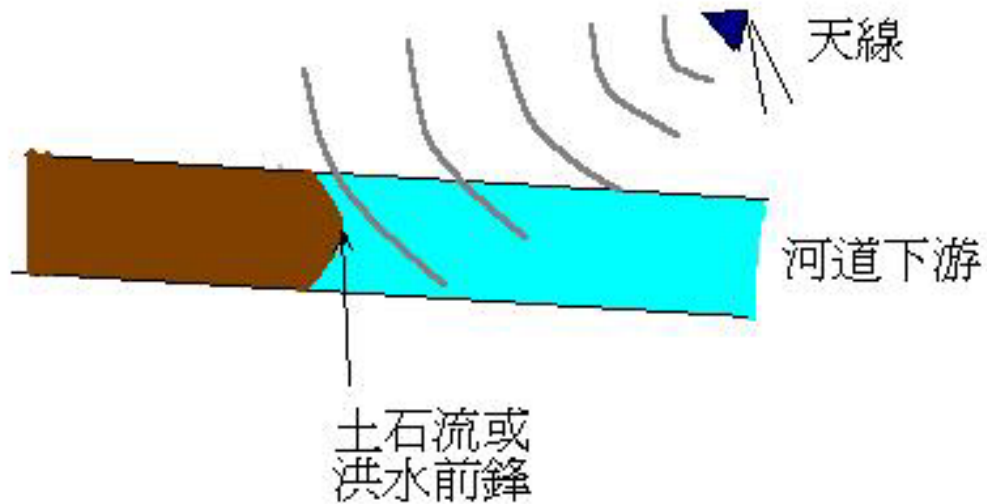


圖 4.5 利用微波偵測土石流或洪水前鋒之示意圖

假設洪水前鋒距離河道中某監測點 75 公尺時，我們同樣發射 1GHz 到 4GHz 的電磁波，記錄下其反射訊號，如圖 4.5 所示。由於天線架設於河岸之上，所以入射波會有一入射角，假設為 15 度。因土石流之前峰並非垂直於電磁波，同時訊號寬為 3GHz 之脈衝，因此反射訊號每隔一段時間便會出現一個小小的峰值 (peak)，但於 525nsec 時出現的峰值則遠大於其它的峰值，這便是代表洪水前鋒位置的反射訊號。若以光速將時間 525nsec 換算成距離則為 78.75 公尺，再乘上入射角 15 度的餘弦值，得到其沿著河道的距離為 76 公尺，相當接近實際的 75 公尺。由於天線與洪水或土石流前鋒之間的介質是空氣，而電磁波在空氣中的速度並不受到入射波頻率的影響，所以，我們可以準確的計算出前鋒目前的位置。在不同時間發射的電磁波，得到不同的前鋒位置，我們便可估計出土石流或洪水前鋒的速度。

因單點測量需時極短，因此雷達可以 360 度旋轉來做全域之測量，因地面反射訊號與水面或土石流表面之反射訊號不同 (水面反射為一 very narrow band peak)，因此可區分出此兩種表面。所以可用反射訊號來做該地區高程之探測，地下水位與河道水位的變化均可獲得。因此此種儀器可對局部地區進行整體、同步區域性之地表、地下水位與河川之監測。

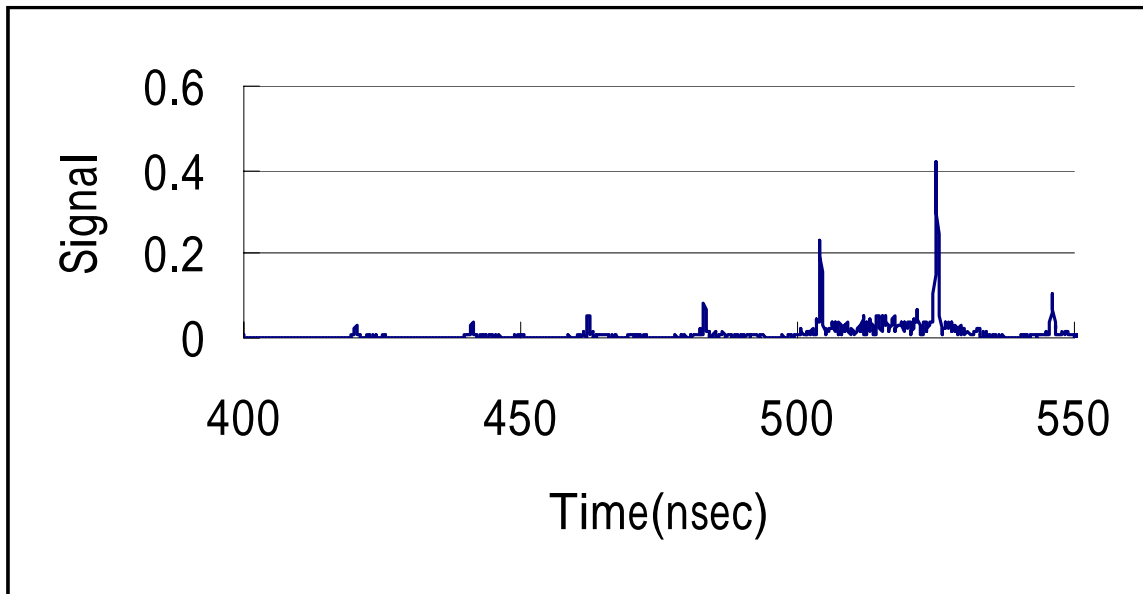


圖 4.6 洪水前鋒之反射訊號

4.6 電磁波探測器製作

電磁波探測器之規格已設計並委託廠商製作完成，設計規格為

瓦數：1-2W

波頻：發射 4GHz, Pulse 波

聚焦：1 公尺~200 公尺，聚焦點不大於 50 公分 x50 公分

損失：小於-10dB@4GHz

3dB 頻寬：大於 90MHz

機座：360° 水平旋轉，上下 90° 垂直，每秒 6°

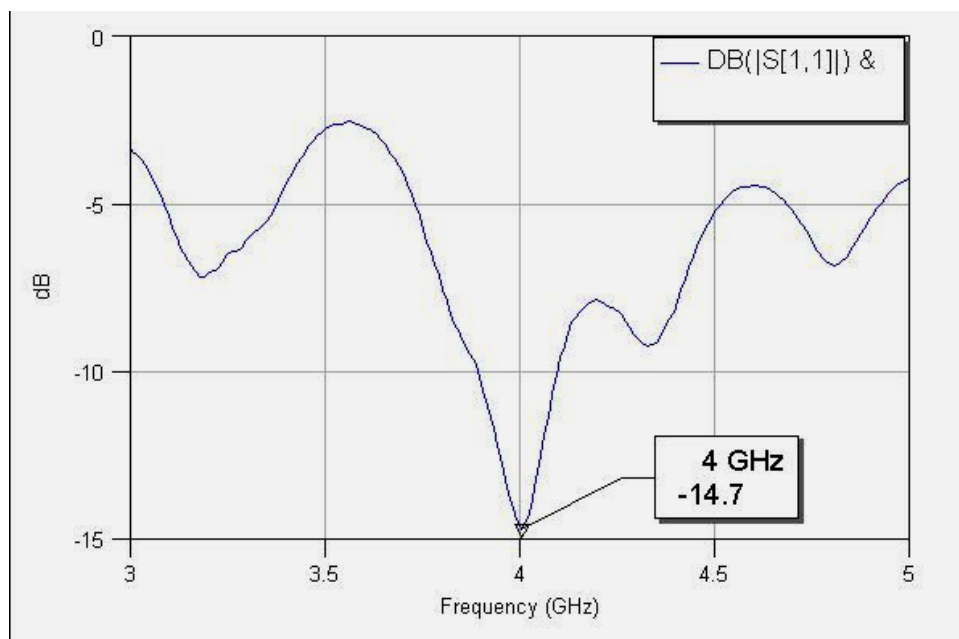


圖 4.7、電磁波探測器測試特徵曲線

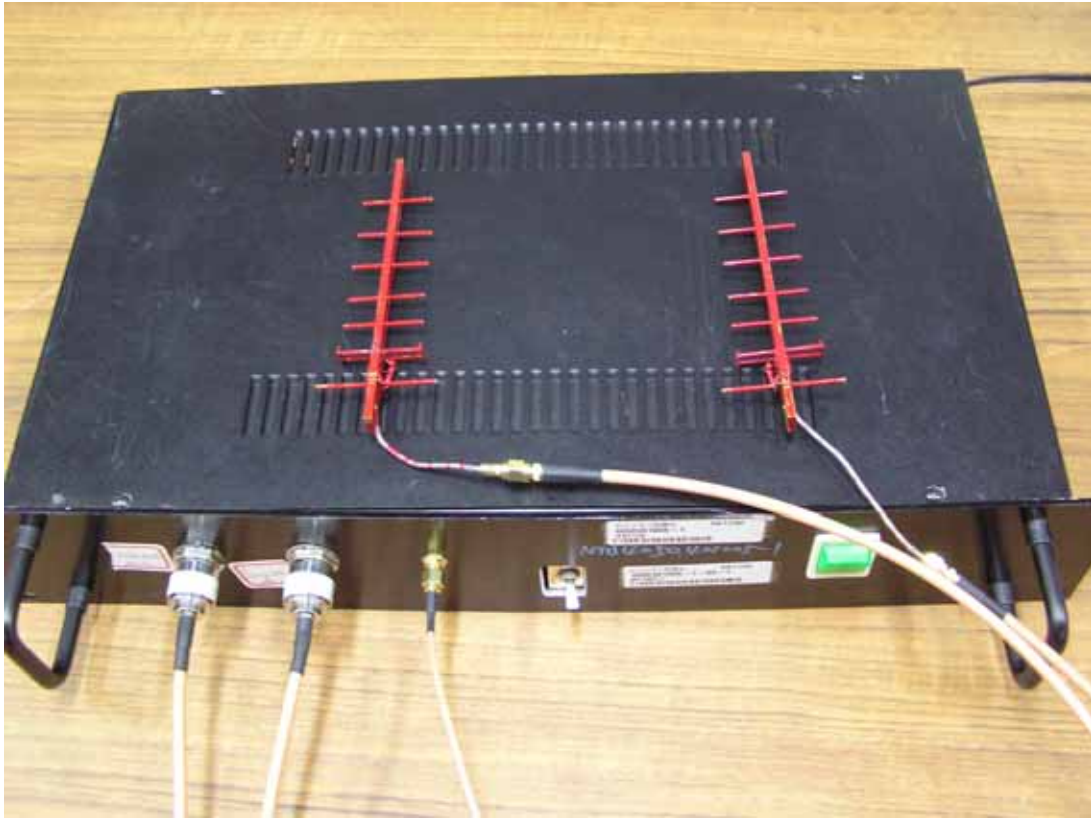


圖 4.8 全套設備上方為天線，天線之形狀採一般通用的 Yagi-Uda Antenna，下方為訊號產生、放大與接收之機器

4.7 結論

我們之研究顯示 1GHz 左右之波在入射能量不大時(0.01W)都可穿透約 50 公分以上之土層。若將能量提高到 1W，則對砂層之穿透能力可達 10 公尺，而微波對表面植生在 30 公分以下時亦具有穿透之能力，但對岩層則效果不佳。初步的室內試驗已證實用微波測得地下水位技術上可行。在現地測量地下水位時，我們將用地下水模擬來提供反射訊號之比對，將電磁波打入土壤後，即可由反射訊號得到其相對應的含水量分佈。同時，此技術將可應用於對洪水或土石流前鋒速度的估計。但未來所面臨的技術問題為雷達的聚焦功能現地調整所帶來之測點誤差如何克服。

第五章 結論

經過三年的計畫，各項工作都已完成，監測系統方面，我們建立完成了一個結合各設備的監測系統，雖然並未完成結合各設備的預報系統，但是已經跨出了一大步，本計畫提出後，水保局也接著在台灣各地建立監測站，目前已建立了 13 各監測站的設備，這種成效，部分也是由於有國科會本群研究群的刺激作用。

地聲探測器的應用部分，本計畫也已將之延伸到系統地聲的探測理論工作，雖然理論應用與實際應用還有一段差別，但也是國內首先朝此方向研究的領先理論。

國內第一個電磁波探測器，也在計畫經費支援下，總算理論工作與實際設計的設備都完成了，將來即可朝向設備的多方向應用來做研究。

為了能讓監測預報的研究進一步領先國際，希望有更多的研究人員加入本群，進行更深入的、更實際的應用工作。

參考文獻

- 劉格非，黃名村，徐浩仁，(2000)「微波探測淺層地下水位應用於邊坡穩定」，第二屆海峽兩岸山地災害與環境保育學術研討會論文集，第 269-278 頁。
- Cheng D.K., (1989), "Field and wave electromagnetics", Addison Wesley .
- Debye, P., (1929), "Polar Molecules", Dover, New York.
- Dobson M.C. , F.T. Ulaby, M. Hallikainen, and M. El-Ray, (1985), "Microwave dielectric behavior of wet soil-part II : four-component dielectric mixing models" , *IEEE Trans. Geosci. Remote Sensing*, GE-23, pp35-46.
- Ho, W. and W.F. Hall, (1973), "Measurements of Dielectric Properties of Seawater and NaCl Solutions at 2.65 GHz" , *J. Geophys. Res.* , 78, pp.98-103.
- Ho, W., A.W. Love and M.J. VanMelle, (1973), "Measurements of the Dielectric Properties of Sea Water at 1.43 GHz" , *NASA Contractor Re. CR-2458*, NASA Langley Research Center, Langley, VA..
- Klein, L.A., and C.T. Swift, (1977), "An Improved Model for Dielectric constant of Sea Water at Microwave Frequencies" , *IEEE Trans. Antennas Propag.* , AP-25, pp. 104-111.
- Lane J. and J. Saxton, (1952), "Dielectric Dispersion in Pure Polar Liquids at Very High Radio Frequencies, III. The Effect of Electrolytes in Solution" , *Proc. Roy. Soc.* , 214A, pp. 531-545.
- Shutko A.M. and E.M. Reutov, (1982), "Mixture formula applied in estimation of dielectric and radiative characteristics of soils and grounds at microwave frequencies" , *IEEE Trans. Geosci. Remote Sensing*, GE-20, pp. 29-32.
- Sitar N., S.A. Anderson and K.A. Johnson, (1992), "Conditions for initiation of rainfall-induced debris flow" , *Stability and performance of slopes and embankments: proceedings of a special conference at U.C. Berkley, ASCE*.
- Stogryn, A., (1971), "Equations for Calculation the Dielectric Constant of Saline Water" , *IEEE. Trans. Microwave Theory Techn.* , MIT-19, pp.733-736.
- Ulaby F. T., R. K. Moore and A. K. Fung, (1986), *Microwave Remote Sensing* , vol .1, vol.2, and vol. 3, Dedham, MA : Artech House.
- Yeh G. T., (1987), "3DFEMWATER: A Three-Dimensional Finite Element Model of WATER Flow through Saturated-Unsaturated Media" , *Environmental Sciences Division Publication No. 2904*.