84

行政院國家科學委員會專題研究計畫成果報告

條件權利金選擇權與定期存款提前解約之處罰

Contingent Premium Option and the Penalty on Premature Deposit Withdraw

計畫編號：NSC 87-2416-H-002 -011

執行期限：86 年 8 月 1 日至 87 年 7 月 31 日

主持人：李存修教授　國立台灣大學財務金融學系

摘要

國內銀行現行定存制度中的解約條款及質借條款使得固定利率之定存存戶擁有一套利機會(亦即銀行在其存入的同時，就送給存戶一個免費的美式新奇利率買權)：在存單存續期間，若存戶發現市場定存利率高於其原定存之約定固定利率，便可解約或質借以將錢取出、再存到利率較高的新定存，而得到無風險利得。(從另一角度來看，存戶手上之存單有如「可賣回債券」(puttable bond) 一般：在市場利率上漲時，存戶可將此一跌價之証券賣還給銀行，以取得資金再投資)。當各銀行之牌告利率調整愈頻繁，此一權利之價值便愈高；且當所存之定存期間愈長、或存入當時之定存殖利率曲線愈陡(正斜率)、或開口向上的情況下，執行此權利的可能收益便愈大。而稱此為一美式新奇選擇權的原因是：1. 存戶在存單存續期間皆可執行，2. 執行時可選擇質借選擇權及解約選擇權兩者中價值較高者，3. 解約選擇權之執行價格會隨時間變動。

本文以 Black, Derman, and Toy (1990) 所提出之利率模型為基礎，利用其利率二元樹進行此內含選擇權權利金的計算，並在不同的環境設定下進行情境模擬分析，以瞭解此內含選擇權之各種性質。

由於銀行所面對的是廣大的存戶，故此一權利被執行而損失的總金額將是一筆可觀的數字。故銀行若要挽回此一劣勢，則應在存戶存入當時向其收取權利金、或降低定存之牌告固定利率、或推出本文中所提出之新定存工具。政府亦應配合修改法令，以從制度上消除此一不公平的現象。

I. 緒論

定期性存款(包括定期存款及定期儲蓄存款)可說是個人及法人重要的理財工具之一，且在國內經濟金融佔有相當重要的地位，然而卻極少有文獻探討相關的議題，可能是大家一直認為定存和活存是最簡單的理財工具，而不覺有任何探討的必要。然而台大蔡策申在 1996 年所著"定期存款解約及質借條款之研究—訂價、制度與策略"(曾獲當年度中國財務學會全國優等論文獎)一文點出：原來定存在台灣特有的行政規定及銀行處理習慣下，事實上其附帶有一利率買權在內。例如當銀行定存利率高於存款人當初所約訂的定存利率時，其便可能考慮將其解約或質借，並轉存新的定存以獲取更高的收益;而在銀行定存利率低於定存利率時，其便不會有任何行動(除非有臨時的流動需求)。因此定存之解約權及質借權在本質上近似於美式利率買權。而稱其"美式"是因為在存單到期前任何一天都可行使此權利。這個觀點使得大家開始對此一傳統工具有了一個新

的視野。

而既然定存中內附有選擇權，就有其評價的問題。然而蔡文中由於對國內銀行處理定存解約及質借的辦法有所誤解、忽略了選擇權償付型態之時間價值，且對權利金給付方式之認定有疏漏，因而產生了錯誤的評價及結論。因此本文旨在於台灣邁向亞太金融中心之際，對這項影響層面深遠的傳統工具作一番徹底的檢視，以及：

1. 對此內含選擇權提出一個可行之評價方法。
2. 藉由情境模擬分析的方法，探討解約選擇權及質借選擇權之相關特性。
3. 分別對存戶、銀行，以及政府目前的定存制度提出建議，作為其行為及決策之參考。

本文利用機動利率定存與固定利率定存相對照，以清楚看出此內含選擇權之特性。接著提出三種新定存工具，分別是只含有質借選擇權之「M 型定存」、只含有解約選擇權之「E 型定存」、及沒有內含任何選擇權之「Pure 型定存」。如此可分別拆解出解約選擇權及質借選擇權來加以組合及研究。

最後本文使用 Black, Derman, and Toy (1990)之利率模型建構出二元利率樹，以作為評價及情境模擬分析之工具。並以台灣企銀之牌告定存利率為例，以說明計算及分析之結果。

II. 定存所隱含之選擇權

蔡策申（1996）觀察到在國內的定存制度下，當存款利率走高時，存款人擁有一套利機會：將定存解約或質借，再將錢轉存至利率較高的新定存(到期日和原定存相同)—只要此多獲得的利息大於解約或質借的成本即可獲利。

例如在時間為 t，且尚未扣除解約時利息的折扣損失(打八折)及質借時的利率加碼損失(1.5%)前，存戶所面對之償付型態(以本金之比例表示)為：

$$\max(0,\ (R_{t,T}-R_d)(T-t)) \qquad (1)$$

其中 T 為到期日；R_d 為原定存利率；$R_{t,T}$ 是在 t 時「到期日為 T」之定存利率。此一型態類似一個美式利率買權。其認為存戶對此選擇權所付出之權利金即為「解約時利息的折扣損失，或質借時所多付的加碼利率」。且其所不同於一般利率選擇權者，乃在於不論投資人所行使者為解約權或質借權，其只須在行使權利當時給付權利金即可，而非如一般選擇權無論未來出象如何，均必須在期初給付權利金。

若考慮成本，則在投資人行使解約權(early termination)時，其所面對的償付如下：

$$Ce = \max(0,\ (R_{t,T}-R_d)(T-t)-wR_d t) \qquad (2)$$

其中 w 為解約時利息被扣除之比例。現行規定是解約時利息打八折，故 w = 0.2。

而在投資人行使質借權(mortgaging)時，由於質借的利率為原定存利率加上一加碼利率(通常為 1.5%)，故其償付為：

$$Cm = \max(0,\ M(R_{t,T}-R_d-Rm)(T-t)) \qquad (3)$$

其中 M 為可質借金額佔原定存本金之比例(通常是九五成，即 M = 0.95)；Rm 為質借時之加碼利率，Rm = 1.5%。

而由於投資人在執行時可任選解約或質借其中之一，故其在 t 時完整的償付型態為：

$$Cme = \max(Cm,\ Ce) \qquad (4)$$

且由於是在執行時才付權利金，且權利金的多寡是依執行當時的條件而定，故此屬

於一種「條件權利金選擇權」(Contingent Premium Option or Pay-later Option)。

所謂條件權利金選擇權，意指「選擇權的雙方除了選擇權的標準償付形態以外，另外在權利的存續期間或到期日時，依照選擇權標的物的價格或價格變動的途徑(path)決定額外的現金流量」，意即其可分為兩種主要的形態：path-independent 及 path-dependent。path-independent 是指此條件權利金是決定於執行時的標的物價格，而與其所經途徑無關，如本例即是。

例如某「歐式」買權執行價格為 X，在期初不必付權利金，但到期末時若為價內(P_T>X)，則須付出權利金;若為價外(P_T < X)則免付。因此其買方之償付圖形如圖 1。

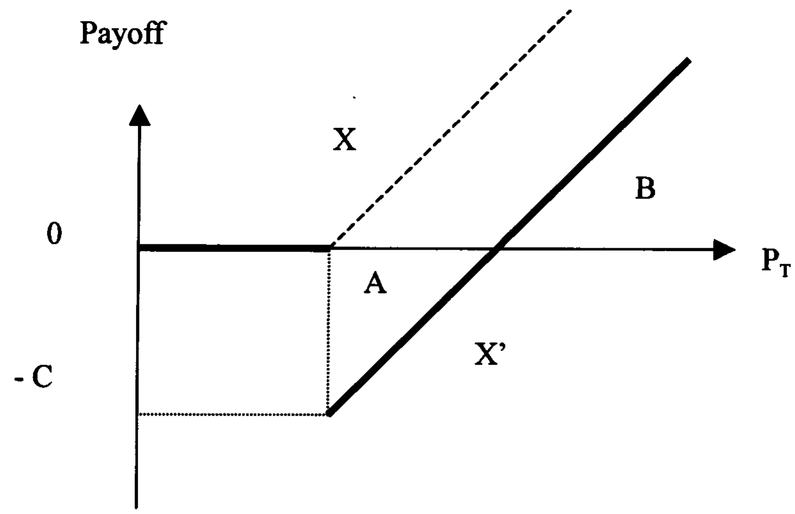

圖 1 歐式條件權利金買權

條件權權利金選擇權一般為歐式，且在到期時只要投資人在價內，必須要強迫其執行。例如若 X < P_T < X' ，則其須認賠了結; 當 P_T> X'，其才真正有獲利。A，B 兩部分之期望值會相等，使得此權利之淨現值為零，故期初時買方確實不必付權利金。

然而蔡 (1996) 認為定存的解約權及質借權(為美式)並沒有要求存戶在權利到達價內時必須立刻執行，因而理性的投資人必會等到利率水準高至可以彌補解約利率折扣或質借加碼的損失以後，(如在圖中之 X'點右方)，方願意執行此一權利; 若是 P 一直都小於 X'，則其必不會執行，因而圖 1 中之償付便只剩下 B 的部分(為正值)，如此此權利金之淨現值為正，故其認為如此造成了存戶套利的機會。

而且在其推論下，則無論銀行之解約折扣及質借加碼利率(即權利金)多高，只會使 X'向右移動而已，B 部分的預期價值仍恆大於零，亦即永遠找不出一個權利金水準可使雙方之權利淨價值為零，而造成評價模型永遠無法達成均衡的結果。

因為蔡無法解釋此一奇怪現象，而為了能夠繼續評價，只好假設此美式條件權利金選擇權在到期日以前並不要求強制執行，但要求在到期日時處於價內者必須執行(即強迫存戶解約)(因為在期末時質借已不可行，所以必然是解約)，如此就能使 A 部分圖形存在，而可找出一權利金水準 Rm 及 w 使權利淨價值為零。故其評價的目標是要解出 Rm 及 w。但顯然其假設

與現況差距太大且不合理，因此使得根據此假設而發展之評價模式及結論之參考價值大為下降。

在詳細瞭解問題的背景之後，在此先提出本研究之假設，再檢視機動、固定利率定存之質借權及解約權是否確實內含選擇權之性質，最後探討權利金給付的問題，並提出兩個新的定存工具以輔說明。

在評價此選擇權之前，必須再做一些設定以簡化問題。以下是對貨幣市場及投資人所作之假設：

（1） 無交易成本及稅。

（2） 無資訊成本。

（3） 投資人為理性，以利潤極大化為目標。

（4） 銀行存款無違約風險，(故其牌告定存固定利率即為無風險利率 Rf)。

（5） 貨幣市場是完整的(complete)。

1. 固定利率存單之質借權

設存單開始生效的時點為 0，約定之定存固定利率為 K_T，期限為 T 年，在 t 時辦質借(t < T)，且當時從 t 到 T (期間長度為 T － t)之牌告固定利率為 R_{T-t}，則此質借權使其可在 T 時產生之額外損益 (payoff) 若以本金之比例表示則為：

$$M(T-t)(R_{T-t}-K_T-Rm) \qquad (5)$$

其中 M = 0.95 為最高之可質借成數、Rm = 1.5% 為質借加碼利率、各(利率)符號之下標表示期間的長短。

顯然理性的存戶只會在 $R_{T-t} > K_T + 1.5\%$ 時才會作此選擇：將原有之定存質借，轉而存放至較高的新固定利率 R_{T-t} 之定存(期間為 T － t)來套利。因此上式應重寫為：

$$M(T-t)\max(0,\ R_{T-t}-(K_T+Rm)) \qquad (6)$$

前曾述及，蔡文所犯的第二個錯誤，即為其忽略了此一償付乃是在 T 時才能實現。故若要將上式表示為在 t 時之價值，則應為：

$$Cm = M(T-t)\frac{\max\{0, R_{T-t}-(K_T+Rm)\}}{1+R_{T-t}(T-t)} \qquad (7)$$

故可看出此質借權的確為一美式利率買權，以下便將此一美式利率買權稱為「質借選擇權」。其標的利率為 R_{T-t} (即再投資利率)；執行利率為：

$$Xm = K_T + Rm \qquad (8)$$

因為在存戶存入當時(即 t = 0)時的標的利率 R_{T-0} 即為 K_T，且 K_T < Xm，故可見在期初時存戶手上之質借選擇權為一個價外(out-of-money)買權。

2. 固定利率存單之解約權

設在 t 時辦理解約，且在存入當時期間為 t'之牌告定存固定利率為 $K_{t'}$，（t' 為小於t、且最接近t之牌告期間，t' ∈{1/12, 3/12, 6/12, 9/12}；若 t' <1/12, 則 $K_{t'}$ =0），則此解約權使其可在 T 時產生之額外損益為：

$$\max\{0, (1+DtK_{t'})(1+R_{T-t}(T-t))-(1+K_TT)\}$$

其中 D = 0.8 表示利息被打八折(即 D 為可取回之利息比例)，$(1+DtK_{t'})(1+R_{T-t}(T-t))$表示解約後將本利和$(1+0.8tK_{t'})$轉存新定存(固定利率為 R_{T-t})，且存到 T 時所得之本利和。由此式亦可對照出蔡(2)式設定之錯誤，且其未考慮現金流量之時間價值。

將上式整理後可得：

$$\max\{0, (1+DtK_{t'})(T-t)R_{T-t}-(K_TT-DtK_{t'})\} \qquad (9)$$

若表示為在 t 時之價值則為：

$$Ce=\frac{\max\{0,(1+DtK_{t'})(T-t)R_{T-t}-(K_TT-DtK_{t'})\}}{1+R_{T-t}(T-t)} \qquad (10)$$

可見解約權為一較複雜之美式利率買權，標的利率為 R_{T-t}，執行價格為

$$Xe=\frac{(K_TT-DtK_{t'})}{(1+DtK_{t'})(T-t)} \qquad (11)$$

而且此執行價格會隨時間 t 而變動，而非一常數。以下便將此一美式利率買權稱為「解約選擇權」。

因為在存戶存入當時(即 t = 0)時的標的利率 R_{T-0} 即為 K_T，且 $Xe = K_T$，故可見在期初時存戶手上之解約選擇權為一個價平(at-the-money)買權。

3. 權利金之給付

綜合以上之分析，可知存戶因同時擁有解約選擇權及質借選擇權，使其可在 t 時產生之額外損益為：

$$Cme = \max(Cm, Ce) \qquad (12)$$

由於執行時存戶可選擇兩個選擇權(標的利率皆為 R_{T-t})中較有價值者，且如前如述，「解約選擇權」之執行價格會隨著時間而改變，故此屬於一種美式新奇利率買權。然而此選擇權是銀行免費送給存戶的嗎?

蔡所犯的第三個主要錯誤，就是其認為存戶「在解約時所損失利息的兩成」，或「質借時所要額外負擔的加碼利率(1.5%)」，便是付給銀行的權利金。且因只有在執行時才須付，故其認為此為一「條件權利金選擇權」。然而在其後續的推論上出現了如本章第一節末所述之矛盾。

事實上條件權利金選擇權為歐式而非美式、且在期末時只要是在價內，必要強迫執行，並付出權利金。而此性質顯然和此所討論的解約及質借選擇權差異頗大---因為銀行在存單到期時，不可能以任何理由要求存戶解約，而使其損失利息。故看來圖 1 中買方之償付型態圖形只有 B 部分而無 A 部分，似乎存在套利機會。然而銀行只要在「期初」時向存戶收取權利金，便可使雙方皆獲得公平。這點也是蔡所疏忽的。

換句話說，蔡將(2)，(3)視為是(1)在扣除權利金以後的償付型態(即仍為同一選擇權之償付型態，只是表示方法不同)，且其評價的目標是要找出 Rm 及 w。然而從(8)，(11)可看出：(2)，(3)，和(1)實際上是執行價格各不相同的選擇權；亦即 Rm 及 D 只是決定各選擇權「執行價格」的因素之一，雖然其會間接影響到期初權利金的多寡，但不應直接將其視為「條件權利金」。更何況 Rm = 1.5% 一直是業界的慣例; D = 0.8 也是法令所規定，故不宜將其設為變數。

故本文將 Rm 及 D 設為外生變數，而評價的目標則是要解出期初權利金 C_0 (以年利率表示)。由於現今之定存利率 K_T 並未考慮到解約選擇權及質借選擇權之價值，故若將其納入，則存戶所能享有的定存固定利率應只有：

$$K_T' = K_T - C_0 \qquad (13)$$

亦即銀行應將目前之牌告固定利率 K_T (即無風險利率)減去 C_0 ，才是公平的定存利率。故就現況而言，此選擇權可說是免費送給存戶的(即 $C_0 = 0$)，亦即存戶有套利的空間。

4. 新定存工具

因為在進一步評價之前，在此需要兩種新的定存工具來輔助說明，並且因為金融機構應提供多樣化的金融工具 ，以滿足對未來現金流量型態(future cash flow pattern)需求不同的各種投資人，故建議銀行可將解約選擇權及質借選擇權拆解

開來，推出以下兩種新定存工具：

第一種新定存為「不可解約之固定利率定存」，由於此定存只剩下質借權(及其所衍生之質借選擇權)，故以下簡稱為「M 型定存」。設其期初權利金為 $C_0(M)$，由於 M 型定存之選擇權利較少，故 $C_0(M) < C_0$，因此其公平之定存固定利率 K_M 應為：

$$K_M = K - C_0(M) > K - C_0 = K' \quad (14)$$

第二種新定存工具類似 M 型定存，但其質借的辦法比照機動利率定存—以辦理質借當日與存單同期間之牌告定存機動利率加上 1.5%作為質借利率，(而非以 M 型定存之約定固定利率加上 1.5%)。此型定存雖有質借權，但理性存戶(除非有流動需求)必不會辦理質借—因為質借利率比當時的利率還高。因此其沒有包含任何選擇權在內，在此稱之為「Pure 型定存」。故此種新定存之牌告固定利率 K_P 應等於無風險利率 K (即目前之牌告固定利率)：

$$K_P = K \quad (15)$$

綜合上述之設定可得到以下之關係式：

$$K' < K_M < K_P = K \quad (16)$$

因此若存戶確定在期間內「不會解約」，則其可將錢存入 Pure 型定存，而不必忍受傳統定存之低利率。而若其同時預期利率可能上揚，則可存入 M 型定存。因雖然其固定利率較 Pure 型定存低，但當利率上升時，其可辦質借並轉存到新利率之定存以獲取較高的收益。

而若存戶預期在此期間可能有資金需求(如購屋、買汽車……)而須解約，則可使用傳統之定存(含有解約選擇權及質借選擇權)。

至於願意承擔風險之存戶，則可選擇機動利率之定存，以獲得較高之期望收益率。

另外銀行亦可將傳統定存中之質借選擇權去除而成為「E 型定存」--即其質借方法如同 Pure 型定存一般比照機動利率定存。故 E 型定存中只有解約選擇權而無質借選擇權。故至此銀行可使用上述之技巧將質借選擇權及解約選擇權自由拆解，而創造出各種不同的定存，以吸引不同的投資人。

III. 利率模型之探討

若要評價前述之美式新奇利率選擇權，則需要選擇一適當的利率模型。在實務上有三類主要的模型可供選擇：

1. Black and Scholes 模型之延申
2. 均衡模型：如 Vasicek(1997)與 Cox, Ingersoll and Ross(1985)等。
3. 無套利模型：如 Hoand Lee(1986), Hull and White(1990, 1994), Black Derman and Toy(1990)等。

一般將 2, 3 通稱為殖利率曲線模型(yield Curve Models)或利率期間結構模型(Term Structure Models)。

由於 Black and Scholes 之延申模型無法應用於美式選擇權，故在此不予考慮。另外由於傳統的均衡模型所求出的殖利率曲線並不會自動與目前所觀察到的真實狀況吻合，且在衍生性金融商品的高槓桿特性下，在評價選擇權時可能會產生數十倍於在評價標的物時的誤差，故均衡模型在此亦不適用。因此在此主要探討各種無套利模型之優缺點。在本節皆設現在的時點為 0。

1. 無套利模型

無套利模型共通的特色就是把現行的利率期間結構當做模型的輸入(input)，藉此再求出後續的利率期間結構。其可調整模型中的 $\theta(t)$ 使模型能正確無誤地與目前的殖利率曲線相吻合，所以不會有任何套利機會產生，故稱為'No Arbitrage

Models'，又被稱為「參數隨時間變動之模型」（Time-Dependent Parameters Models），或 'Initial Yield Curve Models'。

通常這類模型都只有一個變數，隨機過程也極為類似，主要的差別在於其與時間相關的參數結構及變數的指定。以下將分別介紹 Ho and Lee Model（1986）、Hull-White Model（1990）、Black-Derman-Toy（BDT）Model（1990）、Black-Karasinski Model（1991）與 Heath-Jarrow-Morton（HJM）Model（1992）。

表 1　主要無套利利率結構模型間之比較

模型	特色	主要優點	主要缺點
Ho and Lee Model（1986）	單因子模型，二元樹	瞬時利率為馬可夫過程，具可解析性，計算效率高	無均數回歸特性，且其假設利率瞬時標準差均為一致並不合理。
Hull-White Model（1990）	單因子模型，三元樹	馬可夫過程、具可解析性、具均數回歸特性、訂價與避險係數求算能力強、計算效率高。	模型較複雜、短期利率可能為負，且其利率波動性結構僅為一均數回歸過程的結果，而非目前市場資訊的輸入。
Black-Derman-Toy Model（1990）	單因子對數常態模型，二元樹	馬可夫過程、建構簡單、瞬時利率必不為負、訂價與避險係數求算能力強。	無法考慮嚴重負斜率之殖利率曲線、無可解析性。
Black-Karasinski Model(1991)	單因子對數常態模型，二元樹	同上	同上
Heath-Jarrow-Morton Model（1992）	一般化模型，二元樹	可將主要的影響因素完全納入考慮。	模型複雜、瞬時利率為非馬可夫過程，計算效率不高。

根據以上的介紹，我們可以發現，各個模型各有其優缺點。我們很難指出何種模型才是最佳模型，這必須要看使用者之偏好及用途而定。

一般而言，上述某些模型所具有之可解析性(analytic tractability)是指其對零息債券或其衍生之歐式買權有公式解(close form solution)。然而本文所要評價的為一「美式新奇」利率買權，故在選擇適用的利率模型時，模型是否能做格狀分析(lattice analysis ，如二元樹、三元樹等)比是否有可解析性重要。在各種可做格狀分析的模型中，HJM 由於計算效率不高，故不予採用。另外 HW 的模型可能會產生負的短率，對本文所討論的定存利率而言不合理，且其模型建構的過程複雜，不如 BDT 的方便及具直覺。而雖然 BDT 無法考慮殖利率為嚴重負斜率的情形，然而因國內定存殖利率極少有此狀況發生，故仍可適用於本例。故本文選用 BDT 模型來做為評價及分析的工具。

IV. 模型之建立

前曾提及，質借時之加碼利率 Rm 及解約時可取回之利息比例 D 為決定選擇權執行價格的因素，故以下要探討其影響的幅度及方向，並討論存戶對於此選擇權之

履約決策。

1. 質借選擇權

在質借選擇權方面，由(8)可知：

$$\frac{\partial Xm}{\partial Rm} = 1 > 0$$

故若銀行提高質借加碼利率 Rm，則質借選擇權的執行價格便會同幅調高，而使在 t 時質借選擇權的價內價值下降：(由(7)，並假設為價內)

$$\frac{\partial Cm}{\partial Rm} = \frac{-M(T-t)}{(1+\mathrm{R}_{\mathrm{T-t}}\,(\mathrm{T-t}))} < 0$$

另外最高可質借成數 M 對執行價格雖無影響，但其會直接影響在 t 時質借選擇權的價內價值：(由(7)，並假設為價內)

$$\frac{\partial Cm}{\partial M} = \frac{(T-t)(R_{T-t}-K_T-R_m)}{(1+\mathrm{R}_{\mathrm{T-t}}\,(\mathrm{T-t}))} > 0$$

故 M 對 Cm 有正向的影響。

2. 解約選擇權

在解約選擇權方面，由(11)可知：

$$\frac{\partial Xe}{\partial D} = \frac{-tK_{t'}(1+K_T T)}{(T-t)(1+\mathrm{D}t\mathrm{K}_{t'})} < 0$$

故若銀行提高解約時可取回之利息比例 D，(如由 0.8 調為 0.9)，則解約選擇權之執行價格便會降低，而使在 t 時解約選擇權的價值上升：(由(10)，並假設為價內)

$$\frac{\partial Ce}{\partial D} = t\ K_{t'} > 0$$

由此可看出：若期初之定存殖利率曲線為正斜率，(即 $\frac{\partial K_{t'}}{\partial t} \geq 0$)，則當 t 愈大時，Ce 對 D 的敏感性會愈大。此乃因存得愈久時，所累積的利息愈多，因此存戶會對 D 的變動愈敏感。

3. 履約決策

前曾提及，質借選擇權之執行價格為一固定值(由(8))，故

$$\frac{\partial Xm}{\partial t} = 0$$

而在價內(即 $R_{T-t} > K_T + Rm$)時，假設 R_{T-t} 在 t 微小變動時不改變，則由(7)：

$$\frac{\partial Cm}{\partial t} = \frac{-M(R_{T-t}-K_T-R_m)}{(1+\mathrm{R}_{\mathrm{T-t}}\,(\mathrm{T-t}))^2} < 0$$

可知隨著時間的進行，質借選擇權的價內價值會變小。因此若在價內時預期 R_{T-t} 將持平或不會變高，且當時之執行價值大於持有價值，則存戶應儘早執行，轉存到利率較高的新定存，以累積較多的利息收入。

而解約選擇權由於償付型態較複雜，且執行價格會隨著時間不規則變動，故無法得到如質借選擇權般之明確結論。若從直覺而言，在 R_{T-t} 相同之下，早一點解約可取出的本利較少，但可轉存在利率(R_{T-t})較高的新定存較久的時間； 反之若較晚解約，所取出的本利和較多，但可轉存於高利率 R_{T-t} 的期間則較短，因此沒有一定較佳的解約策略，要視實際的情況而定。

以上是將質借選擇權及解約選擇權分別檢視。而存戶在每一個時點 t 實際做決策時，則是要考慮「持有價值」及「執行價值」何者孰大，其中「執行價值」為解約選擇權價值及質借選擇權兩者中之較大者，故：

Cme = max (Holding Value , Cm, Ce)

若是「持有價值」較大，則繼續持有，待下一期再做決策。

V. 評價與實證

1. 資料來源與初始配置

為簡化分析，假設存戶在質借或解約後，仍將錢轉存至原存款銀行，而非他家銀行。如此則存戶考慮的是同一家銀行之牌告定存利率(或定存殖利率曲線)之波動性。

本文以台灣企銀為例，採用其在民國 86 年 12 月 31 日之牌告利率，假設某存戶在當日存入一筆一百萬、一年期之固定利率定存。在建構 BDT 模型之利率樹時，除了要輸入當時之定存殖利率曲線外，另外還需要其波動性曲線(spot rate volatility curve or volatility term structure)。由於要評價的選擇權期間為一年，故要以存入當日之前一年間每日之歷史牌告利率來估計各期間(1、3、6、9、12 個月)之定存利率波動性。故本文採用台灣企銀自民國 85 年 12 月 31 日至 86 年 12 月 31 日間每日之牌告定存利率資料(來源：台灣經濟新報資料庫(TEJ))，估計出如下的波動性結構：

表 2　台灣企銀 86.12.31 牌告定存年利率及估計之年波動性

期間長度	牌告利率(%)	估計波動性(%)
1 個月	5.05	21.0081
3 個月	5.25	11.6622
6 個月	5.7	9.9324
9 個月	5.95	5.842
1 年	6.05	2.5978

然而以上的利率期間結構及波動性期間結構仍只是點資料，因此要用插補法將其配適成通過各點之連續圓滑曲線，才能用來建構出切割細密的利率樹。本研究使用多項式插補法來配適出兩條所需的曲線：

$$at^5 + bt^4 + ct^3 + dt^2 + et + f = 0 \quad , \quad 0 \leq t \leq 1 \ (年)$$

表 3　配適之殖利率及波動性多項式

coefficient	yield curve	volatility curve
a	0.07796363569	2.967611378
b	-0.145842423	-5.053652432
c	0.05321212057	.9202685303
d	0.02242424254	2.153877626
e	0.002642424237	-1.262127102
f	0.0501	0.3

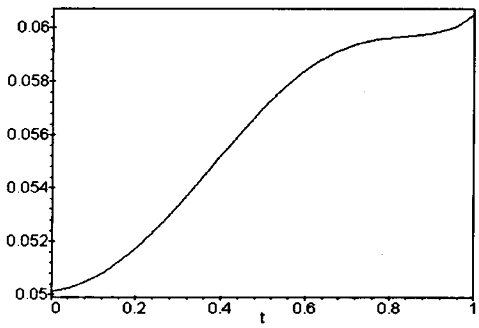

圖 2　多項式插補法所配適之定存殖利率曲線

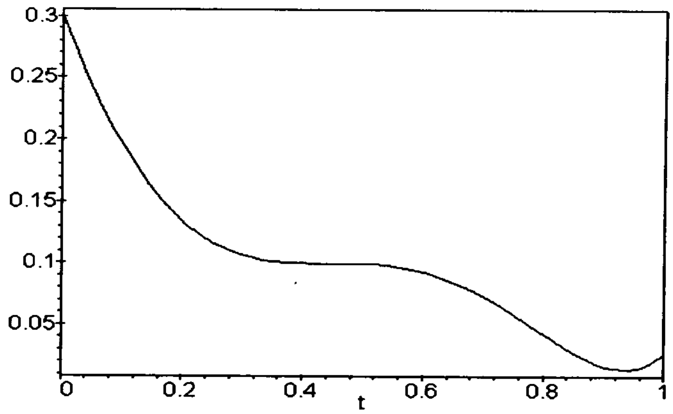

圖 3 多項式插補法所配適之定存利率波動性曲線

2. 評價方法與實證結果

在求出所需的兩條期間結構曲線後，本文使用 Bjerksund and Stensland (1996) 之方法建構出 BDT 之短率二元樹。此方法可大量減少運算的程序，尤其當期間切割數 N 很大時更為明顯。

由於在時點 t 時，存戶藉以決策的是 R_{T-t}，(即標的利率)，而非各節點上之短率，因此要先使用 backward induction 的方法，以各節點上之短率來折現，求出在該節點上「到期日為 T、面額為一元」之零息債券價格 St，再由以下關係式：

$St = 1 / (1 + R_{T-t})^{T-t}$

將 St 轉為在該節點上從 t 到 T 之遠期利率 R_{T-t}。如此便可求出在各節點上質借選擇權及解約選擇權之償付。再根據前一章所述存戶的履約決策方法，決定出各節點上選擇權之價值，再以 backward induction 的方法折現到期初，便可得到傳統定存在「單位本金」下此內含選擇權(包含質借選擇權及解約選擇權)之現值 Vme。

3. 內含選擇權之價值

本文使用 C++語言撰寫程式，所有之計算皆於筆者之個人電腦上執行，其規格為：Pentium133, 32Mb RAM, 256KB Cashe, 在 Window95 作業環境下以 Borland C++ Builder 來編譯及執行。以下為計算的結果：

表 4 M 型定存及傳統定存之內含選擇權之現值佔名目本金之比例及其計算效率

期間切割數 N	Vm	Vme	計算效率 (millisecond)
40	0.02355%	0.06131%	16.60
80	0.02464%	0.06305%	55.20
120	0.02503%	0.06360%	113.75
160	0.02519%	0.06401%	192.38
200	0.02527%	0.06411%	295.38

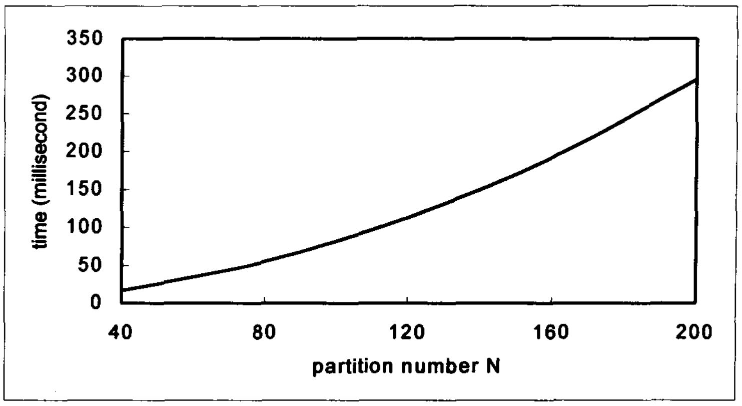

圖 4 計算時間與期間切割數之關係

上表中 Vm 表示在單位名目本金下，M 型定存所內含質借選擇權之現值。在此 Vm 及 Vme 皆以本金之百分比表示。兩者在 N 逐步提高至 200 期時，皆收斂到小數點後第 6 位，且從計算效率一欄可看出，雖然在 200 期以前所需的時間皆不到 1/3 秒，然而從上圖可看出，所需的時間約略和 N^2 成正比。故若再增加 N ，將會大幅降低計算效率，卻無法顯著地加速收斂，因此往後之分析皆以 200 期之切割數為準。

從 Vme 的計算結果可看出，當存戶存入一筆一百萬、一年期之定存時，其相當於同時獲得了一個銀行免費贈送的美式新奇利率買權，價值 641 元。而由 Vm 可看出質借選擇權的價值為 253 元。(然而解約選擇權的價值並非兩者之差，因兩者間並不具可加性。)但是存戶在轉存新定存時，並不一定存回原存款銀行，而是會選擇各銀行同期間中牌告利率最高者。因此以上所得之結果應只是一個下界(lower bound)，正確的價值應更為提高。且銀行所面對的是廣大的存戶，故此一被套利損失的累計金額將是一個可觀的數字。

若要將以上所計算而得的選擇權現值轉為以年利率來表示，則由以下關係式：

$C_0 = V (1 + K_T T) / T$

可求得：

$C_0 = 0.06411\% (1 + 6.05\%) / 1 = 0.068\%$

$C_0 (M) = 0.02527\% (1 + 6.05\%) / 1 = 0.0268\%$

其中 C_0 (M)為 M 型定存之內含質借選擇權以年利率表示之價值。

故此一年期定存之公平牌告固定利率應為：(由(13))

$K' = 6.05\ \% - 0.068\ \% = 5.982\ \%$

而若為 M 型定存，則其公平之牌告利率應為：(由(14))

$K_M = 6.05\ \% - 0.0268\ \% = 6.0232\ \%$

而若為 Pure 型定存，則其公平之牌告利率應為：(由(15))

$K_P = K_T = 6.05\ \%$

4. 履約決策

下圖為當期間分割數 N = 50 時，存戶在利率二元樹上每個節點的決策結果：

其中'~'代表存戶決定在該節點「繼續持有」、'e'代表其決定「解約」、'm'則代表其決定「質借」(以轉存至新定存)。每一列代表不同的時點；右方代表利率上漲，左方代表利率下跌。故執行區皆出現在圖形右方。

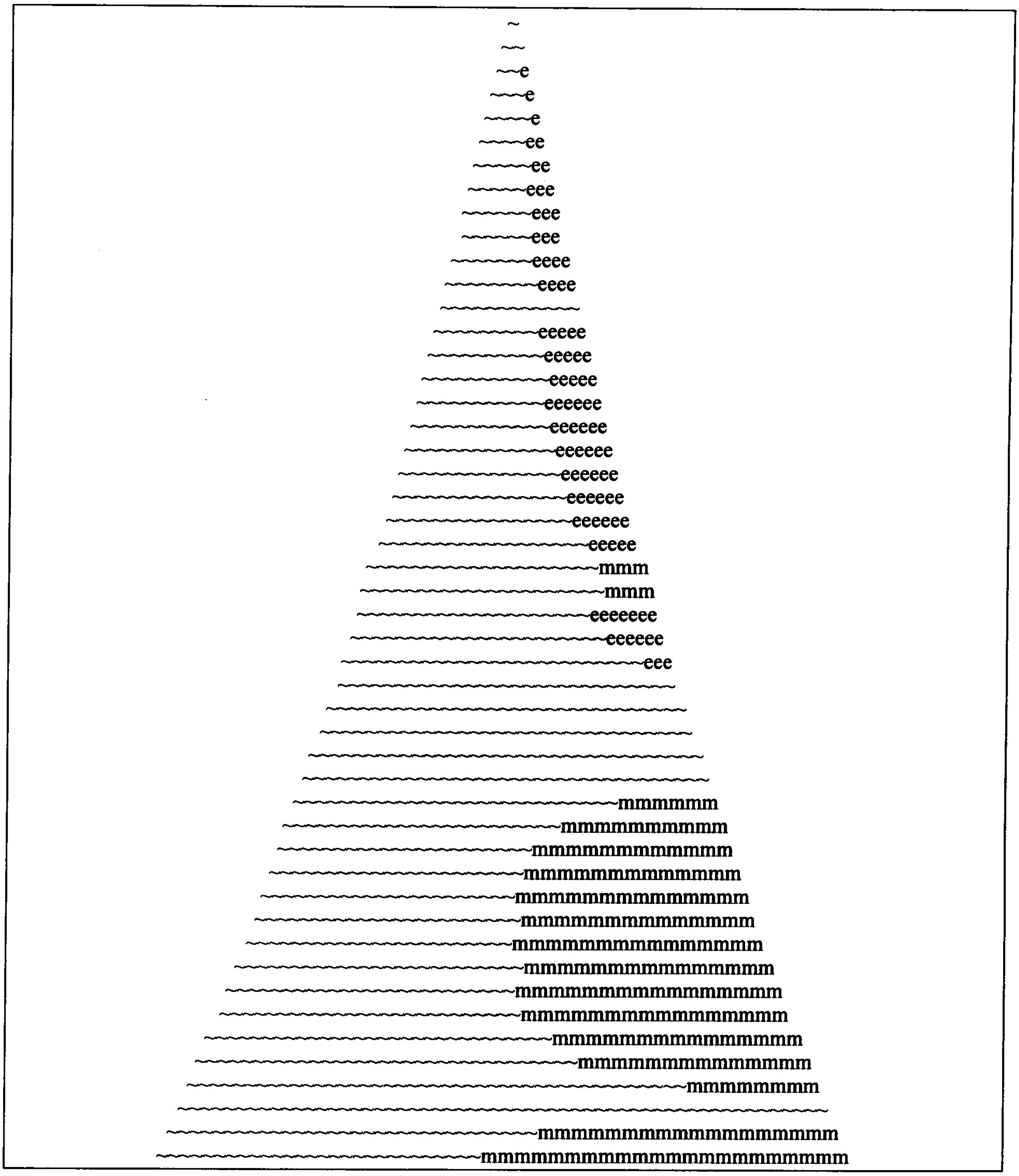

圖 5 當 N＝50 時存戶之履約決策圖

從此圖可看出，存戶在初期時，若在價內且想要執行，則會選擇解約，而非質借；若在後期則會選擇質借。這與一般的直覺相符—若是在靠近後期時解約，將會損失較多的利息；若是質借，則只需在一段較短的時間內(到 T 為止)多付加碼利率 1.5%。反之在初期時解約所損失的利息較少；但若質借，則要在較長的期間內負擔

質借的加碼利率 1.5%。因此會有這樣的結果。

另外在圖形中間附近的第 24 及 25 兩期(皆選擇'm')之所以會產生和附近其他期不同的選擇(‘e’)，是因為前曾述及定存解約利息的計算方法為：「存滿三個月未滿六個月時，照存款銀行三個月牌告利率八折計息。」而在本例中三個月的利率為 5.25%，較六個月的利率 5.7%要低許多，故會在快存滿六個月之前(即第 24 及 25 兩期)產生此狀況。(因為若選擇解約，則相對損失較高。)而在圖形中有數期之履約策略為全部選擇「繼續持有」(即'~')，此亦反應了其美式選擇權的特性－若此刻非為執行的最佳時機，則繼續觀望。例如在期中時若選擇解約，則會損失較多的利息(相對於期初而言)；若選擇質借，則要質借將近半年，成本亦不小。故不如觀望到幾期之後再來行使質借選擇權，反而較為有利。

故銀行可利用此模型來預測存戶未來的解約和質借，以提高資金調度及運用的效率。

VI. 敏感度分析

在本節要討論在 D、M、Rm、利率波動性、期初定存殖利率曲線之斜率及曲度分別變動的情形下，對此內含選擇權現值的影響。同時由此亦可更加透徹地了解其各種性質。

1. 利率波動性

在此將之前所配適的波動性曲線分別往上平移 3%、6%……15%，再求算其對 M 型定存及傳統定存之內含選擇權現值的影響：

表 5 利率波動性對內含選擇權現值的影響

volatility added	Vm	Vme
0%	0.02527%	0.06411%
3%	0.02522%	0.07262%
6%	0.02735%	0.08371%
9%	0.03122%	0.09719%
12%	0.03631%	0.11298%
15%	0.04260%	0.13124%

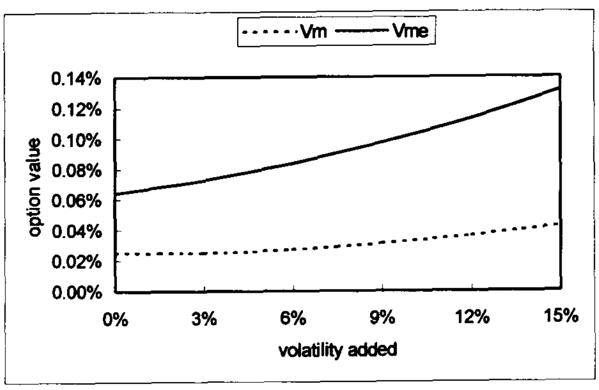

圖 6 利率波動性對內含選擇權現值的影響

由上圖可看出，在增加波動性時，Vme 會快速上升。當波動性增加 15%時，其現值會增加到本金的 0.1312%，約為原來價值的 2 倍。故當各銀行之牌告利率調整愈頻繁，存戶的套利機會便愈多。

2. 質借加碼利率

藉由改變 Rm 的值，可得到：

表 6 質借加碼利率 Rm 對內含選擇權現值的影響

Rm	Vm	Vme
0.0%	0.242810%	0.242810%
0.5%	0.096080%	0.100360%
1.0%	0.044630%	0.071430%
1.5%	0.025270%	0.064110%
2.0%	0.015820%	0.061180%
2.5%	0.010680%	0.059670%
3.0%	0.007590%	0.058790%
3.5%	0.005550%	0.058220%
4.0%	0.004130%	0.057850%
4.5%	0.003100%	0.057590%
5.0%	0.002340%	0.057420%
5.5%	0.001770%	0.057300%
6.0%	0.001350%	0.057220%
6.5%	0.001030%	0.057170%
7.0%	0.000800%	0.057130%
7.5%	0.000620%	0.057100%
8.0%	0.000480%	0.057080%

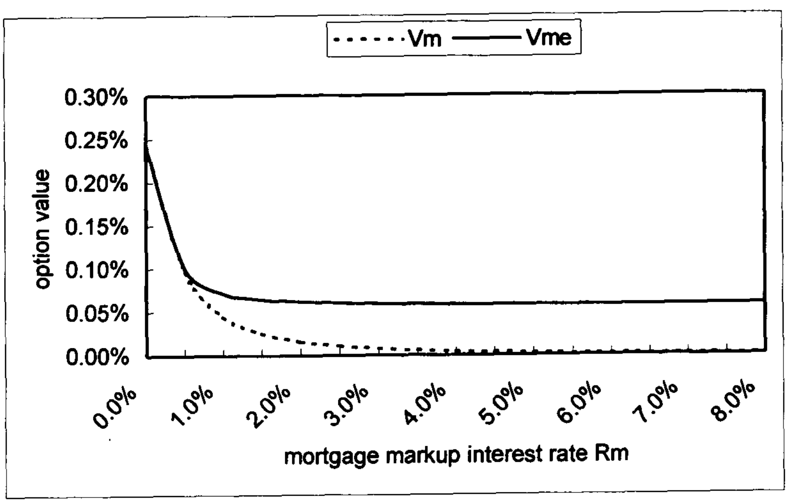

圖 7 質借加碼利率 Rm 對內含選擇權現值的影響

由上圖可看出 Rm 對 Vm 及 Vme 亦有明顯的影響，但由於 Rm 對變動對解約選擇權的現值不會造成影響，因此 Vme 的變動主要來自於質借選擇權現值的變動。

當 Rm 在小於約 0.05%時，Vm 和 Vme 是相等的，表示存戶若要執行，必然選擇質借而非解約，(因為質借的成本很低)。在此情形下，相對而言解約選擇權的價值幾乎為 0 ，因此傳統定存及 M 型定存兩者之內含選擇權現值會相等。

當 Rm = 0 時，Vme 可達 0.24281%，為原價值的四倍。然而當逐漸調高 Rm 時，Vm 及 Vme 會快速下降。尤其當 Rm = 8%時，Vm 幾乎為 0，只剩下解約選擇權的價值為 0.05708%，表示質借的成本太高，沒有人會選擇質借的方式來執行。而在此處及之前(當 M = 0 時)所計算而得之解約選擇權現值皆約為 0.057％，而得到有力的印証。

因此在現階段(Rm = 1.5%)若銀行將 Rm 調低，將會大幅增加質借選擇權的價值。若將 Rm 調到 2.5%以上，則可有效降低質借選擇權的價值。

3. 其他參數之改變

我們亦可改變 D 值（解約可領回之利息比率，原為 0.8)，質借成數（現為 95%)，定存利率曲線之斜率與曲變，而得不同之選擇權價值，大致之結果如下：

（1）D 值愈大，解約權之價值便愈大，例如若 D 調整為 1，(即解約時利息不會被打折扣)，Vme 將可達 0.1737%，約為原現值的三倍。若將 D 調為 0.5（即解約利息打對折），則可有效降低解約選擇權的價值。

（2）質借成數對 Vm 及 Vme 有線性之影響，且由於其對解約選擇權的現值沒有影響，故 Vme 的斜率小於 Vm 的斜率。當 M = 0 時，(即不可質借)，M 型定存所內含質借選擇權的現值自然為 0 ；而由此時的 Vme 可看出解約選擇權單獨的價值為本金的 0.05704%，且大於前述質借選擇權的現值 (0.02527%)。因此目前的解約選擇權對存戶而言比質借選擇權更有價值。(約為其 2 倍)

（3）當定存利率曲線斜率愈大時，內含選擇權的現值會快速上升。如當殖利率曲線為水平（即斜率為 0 ）時，Vme 為 0.03962%，但當斜率為+0.04（即 4％）時，Vme 可達 0.40319%，為前者之十餘倍。而當期初之定殖利率曲線為負斜率時，Vme 幾乎為 0 。故當銀行所牌告之定存殖利率曲線斜率為正時，會受到較嚴重的被套利損失。

（4）當定存利率曲線之曲度愈大時，Vm 及 Vme 便會愈大（但其影響不如斜率變動的影響大），故當銀行所牌告之定存殖利率曲線為開口向上時，會受到較嚴重的被套利損失。

V. 結論

在現行制度下，固定利率之定存存戶在存入定存時，就獲得一個免費的美式新奇利率買權：在存單存續期間，若存戶發現市場定存利率(即再投資利率)高於其原定存之約定固定利率，便可解約或質借以將錢取出、再存到利率較高的新定存。而稱此為一美式新奇選擇權的原因是：存戶在存單存續期間皆可執行，且執行時可選擇質借選擇權及解約選擇權兩者中價值較高者，並且解約選擇權之執行價格會隨時間變動。

本文以台灣企銀為例，假設存戶於民國 86 年 12 月 31 日存入一筆一百萬元、一年期之固定利率定存，且假設其將來若要轉存新定存，仍存入同一家銀行。如此則可計算出此內含選擇權之價值為 641

元。而解約權所衍生而出之解約選擇權單獨的價值為 570 元；質借權所衍生而出之質借選擇權則為 253 元。(然而以上所計算之數目只是一個下限，因為當存戶轉存新定存時，未必仍存入原存款銀行，而是會選擇同期間牌告利率最高者。)此內含選擇權之價值若以年利率表示，則為 0.068%。故銀行若要挽回此一被存戶套利的劣勢，便應在存戶存入當時向其收取權利金 641 元。但此法似乎不可行，較可行的方法則是將此一年期之牌告定存固定利率調低 0.068 %。

此外，以上所述內含選擇權之價值並非一個固定之數值。在定存期間愈長、定存牌告固定利率波動性愈高、各家銀行間牌告利率之差距愈大、期初定存殖利率曲線之斜率及曲度愈大(即正斜率且愈陡、曲線之開口朝上)時，其現值便會上升。亦即在此情形下，對存戶愈有利，對銀行愈不利。

本文亦詳細討論了存戶之履約決策，可提供存戶在選擇解約或質借時一個可量化的決策方法。一般而言，在存單存續期間的初期時選擇解約較有利；在後期時則選擇質借較有利。

本文中的利率模型亦提供了銀行一個預測存戶何時質借或解約的方法，可提高資金調度及運用的效率。

由於眾多的存戶皆有套利的機會，且在利率逐漸上升時，此一系統性的行為便會更明顯。故銀行若單以傳統的方式來計算定存的資金成本，則會有低估的現象。且銀行若要免除被眾多存戶套利的機會，固然可如前所述向存戶收權利金，或降低定存之固定利率。但此一計算過程複雜，且隨時要重新計算，故一勞永逸的方法是從制度上將此套利機會消除。

在解約權方面，由於解約時可取回之利息成數 D(= 0.8)為法律所規定，故銀行無法控制。在質借權方面，由於可質借之最高成數 M(= 0.95)與質借選擇權現值 Vm 為線性比例關係(圖 9)，故無法藉由降低 M 來顯著地降低 Vm。而文中曾分析，質借之加碼利率 Rm(= 1.5%)對 Vm 有很大的影響(圖 10)。若將 Rm 調為 2.5%或以上，將可幾乎完全消除質借選擇權的價值。但缺點則是仍殘留著解約選擇權。

另一種方法則是推出文中所述之新定存工具。此方法可將解約選擇權及質借選擇權如積木般從傳統定存中拆解出來，並可任意組合。若想將質借選擇權消除，則可將質借利率的計算方法由「原定存固定利率加上 Rm」改為如機動利率定存一般，為「將在質借當日之與原存單同期間之牌告機動利率加上 Rm」，亦即成為所謂之 E 型定存--只含有解約選擇權，而雖有質借權，卻無質借選擇權。若想消解約選擇權，則可規定不可解約，只能質借，即成為所謂的 M 型定存--只含有質借選擇權。若想將兩者完全去除，則可合併 E 型及 M 型定存之條款，而成為 Pure 型定存--沒有內含任何選擇權，(故其牌告固定利率即為無風險利率，而不需往下調整)。故存戶可根據其個別之需求來選擇適合的類型來存款。

由於定存的解約權是導致銀行倒閉風險上升的來源之一，故 Pure 型定存將存戶之解約權去除之後，此一資金來源對銀行而言便相當安全。而 Pure 型定存存戶雖無解約權，但仍有質借權，故當急需用錢時仍可向銀行辦理質借，平時則可享有較高之固定利率。故此一新定存工具對雙方而言均有利。

Pure 型定存對銀行而言幾乎沒有風險，因此此類存款之法定準備率便應較傳統定存低。如此銀行體系便可釋出更多的

貨幣，而增加其流動效率。

最後，Pure 型定存(而非傳統定存)的牌告固定利率才是真正的無風險利率(因為其不含任何選擇權)，故其報價可作為金融市場的重要參考及指標。

參考文獻

1. 蔡策申，"定期存款解約及質借條款之研究—訂價、制度與策略"， 民國 85 年，台灣大學財金所碩士論文
2. Bjerksund,P., and Stensland, G. "Implementation of the Black-Derman-Toy Interest Rate Model, "The Journal of Fixed Income, September 1996, pp 67-75
3. Black, F., and P. Karasinski. "Bond and Option Pricing when Short Rates are Log-normal," Financial Analysts Journal, 47(July-Aug. 1991), 82-59.
4. Black, F., E. Derman, and W. Toy. "A One-Factor Model of Interest Rates and its Application to Treasury Bond Options," Financial Analysts Journal, January-February 1990,pp.33-39.
5. Brennan, M., and E. Schwartz. "A Continuous-Time Approach to the Pricing of Bonds," Journal of Banking and Finance 3,1979,pp. 133-155.
6. Cox, J., J. Ingersoll, and S. Ross. "A Theory of the Term Structure of Interest Rates," Econometrica 53,1985,pp. 385-407.
7. Heath, D., R. Jarrow, and A. Morton. "Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A Discrete Time Approximation," Journal of Financial and Quantitative Analysis,25, 1990,pp.419-440.
8. ---."Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A New Methodology," Econometrica, 60,1(1992), pp.70-105
9. Ho, "Evolution of Interest Rate Models: A Comparison," Journal of Derivatives, Summer 1995, pp.9-20
10. Ho, T., and S. Lee. "Term Structure Movements and Pricing Interest Rate Contingent Claims." Journal of Finance 42(5),1986,pp. 1229-1142.
11. Hull, J. , Options, Futures, and Other Derivative Securities, 3rd edition. Prentice-Hall, 1997
12. Hull, J., and A. White , "Pricing Interest-Rate Derivative Securities," Review of Financial Studies, 4 (1990), pp. 573-592
13. ---. "One Factor Interest-Rate Models and the Valuation of Interest-Rate Derivative Securities," JFQA, 28, No.2 (June 1993), pp.235-253
14. ---. "One Factor Interest-Rate Models and the Valuation of Interest-Rate Derivative Securities," JFQA, 28, No.2 (June 1993), pp.235-253
15. ---."Numerical Procedures for Implementing Term Structure Models I: Single-Factor Models," Journal of Derivatives, 2,1(Fall 1994a), pp.7-16
16. ---."Using Hull-White Interest Rate Trees," Journal of Derivatives, Spring 1996, pp. 26-36
17. Rebonato, R., Interest-Rate Option Models, 1996, John Wiley&Sons
18. Tian, Y. , "A Simplified Binomial Approach to the Pricing of Interest Rate Contingent Claims," Journal of Financial Engineering, 1, no.1 (June 1992), pp. 14-37
19. Vasicek, O. "An Equilibrium Characterization of the Term Structure," Journal of Financial Economics 5,1977, pp. 177-188.