

利用有限元素波譜法建立河海三維水理水質數值模式

Finite element spectral method applied in 3-D nearshore numerical model

計畫編號：NSC89-2213-E-002-074

執行單位：國立台灣大學土木工程研究所

研究期間：88年8月1日至89年7月31日

計畫主持人：劉格非 國立台灣大學土木工程研究所

中文摘要（關鍵詞字：波譜元素法，數值模擬）

本研究的重點在於發展波譜元素法，此方法同時包含快速計算與可求得空間中任一點的優點。本方法的基礎建立於波譜法與有限元素的原理，其為權重餘數法（MWR）的一種。波譜法為一整體近似（global approximation），其重點在於選取一適合的基函數。在本研究中所選取的基函數為Chebyshev多項式，其優點在於可處理非週期性的邊界問題。並在研究中利用有限元素的概念將問題的定義域（domain）分割成數個次定義域（sub-domains），以加快計算的收斂速度及增加計算時的精度。

經應用後，證實此方法具有快速收斂與不需非常大的mode數即可得高精度的優點。但當增加元素與mode的數目時，矩陣數目亦會成倍數增加。所以次定義域的數目需就問題的定義域來決定出最佳的數目，並且根據所要求精度決定mode的數目，以免矩陣過於龐大。

英文摘要(KEY WORDS : Finite element spectral method, Numerical simulation)

The purpose of this research is to develop the Spectral Element Method. The trial functions that we chose is Chebyshev function, and it can deal with non-period boundary problem. And we use

the concept of the Finite Element Method to divide computational domain to several sub-domains. It can speed up the convergence rate and the accuracy .

It can be seen from application that this method converges very fast and gets high accurate. The numbers of modes and sub-domains must be chooser so as to achieve the maximum computational effeciency.

The development of slope land in Taiwan is rapidly growing, so is the potential hazard for debris flow. Therefore, identification of these potential hazard area will be an important task. The flowbility of debris flow is a control factor in estimating the size of these area. This study develops a numerical model utilizing nonlinear constitutive law and fluid conservation laws. Model can be used in field and the values of all parameters used in the model will be obtained through simple in situ tests.

一、前言

近年研究水理之數值模式比較常見的有有限差分法（例如王順賢 1999）、有限解析法（例如蘇怡中 1998）、有限元素法（例如簡紹欽 1998）、邊界元素法（例如葛家豪）、有限體積法（例如經濟部水資源統一規劃委員會）和波譜法（例如郭佳虹 1997）。基本上分為局部近似與整體近似，而空間分割為其重要的步驟之一。

總括以上之數值方法中的有限差

分、有限解析法與有限體積法皆採局部近似 (local approximation) 的觀念，即處理空間微分時將其離散化。而邊界元素法、有限元素法和波譜法是採取整體近似 (global approximation)。如郭 (1997) 所採用之波譜法，又稱配置法 (collocation method) 或稱假波譜法 (pseudospectral method)。波譜法在導數計算中以解析處理，可在空間微分的計算上相當準確，但卻需考量其所使用的展開級數的自由度和空間的取點時需利用富利葉轉換 (Fourier transform)，增加此法在數值方法上的繁雜。而有限元素法亦是將空間分割成數個小空間，再加以整合做整體的計算。但若要求得準確的值，則必須大量的分割空間。故其在空間向微分如同波譜法，都採取將空間離散，以便求取該點的解。而若要計算其他無計算點的物理性質時需以內差方式來求得或是取大量的點來描述此空間的物理特性。其優點乃是取點後可直接求得該點之值，故方便於數值上的計算。而其缺點為為求精確的空間的物理特性，而取大量的點浪費計算時間與記憶體。

本研究是利用 Chebyshev method 以一展開級數來求解整個空間的物理特性。後者只需考慮自由度 N 的選取，看需要多大的自由度就足以表現此空間的物理量。免去取點的繁雜與 Fourier 轉換的麻煩，並且當展開級數求得後，空間的任一點的值都可求得，為此法中優點之一。且將整個定義域 (global domain) 分割成數個次定義域 (sub-domains) 分別計算。可依據物理變化的幅度分割次定義域，將物理變化較大的次計算域做加強，以增加計算效率。

離散空間的技巧已在有限差分與有限元素法上使用多年，而應用在波譜法上，是在 1970 年代末期。Delves 和 Hall (1979) 提出一個整體元素法 (global element method)。Orszag (1980) 推導連接面的結合。Morchoisne (1984) 發展的方

法建立於多個定義域的疊合 (overlapping multiple domains)。Patera (1984) 乃是利用變分方程式 (variational formulation) 應用於波譜元素法。Patera 所採取的方法，建立於配置點法 (collocation method)。即為將定義域分割之後，再將次定義域以 Gauss-Lobatto 積分的方式以離散 Chebyshev 權重函數，離散空見後，再予以積分並乘上權重函數來求出問題之解。

而國內的研究，有顏瑞和 (1996) 使用寬頻元素法應用於熱傳與燃燒問題，汪吉昌 (1997) 交錯格點應用於寬頻元素法解二維不可壓縮 Navier-Stoke 方程式之研究，布紹揮 (1996) 寬頻元素法應用於熱傳問題之研究，陳效吾 (1996) 寬頻元素法應用於火焰燃燒之研究。其所使用的方法皆為採取配置點法 (collocation method) 來解問題，其理論基礎與 Patera 相同皆為選取 Chebyshev 權重函數所產生之點來作分析。需使用 Gauss Lobatto 將空間離散再予以結合。

本研究之波譜元素法的基礎為權重餘數法 (Method of Weighted Residuals) 的觀念。並採用 Chebyshev Method，乃為求取整個定義域，而不將 Chebyshev 多項式以 Gauss-Lobatto 積分來離散，而是直接以積分方式求得其全部的係數，再求出整個計算域物理值。免去配置法取點與轉換 (Orszag, 1969 and Eliassen, Machenhauer and Rasmussen, 1970) 的麻煩。

再以切割的方式將空間離散後，將個別的次定義域以波譜法計算，最後將次定義域結合起來求整個定義域的物理特性。而能達到整體空間物理值的求取。波譜元素法採取積分的型式，即整體的近似 (global approximation)，進而計算全計算域的物理特性。其基礎建立於權重餘數法 (MWR, Method of Weighted Residuals) 與有限元素法的基礎上，所用的方法乃是權重餘數法中的

scheme。在空間方面其精度在於使用者所取之基函數 (trial functions) 權重函數 (weighting functions) 與所取的展開係數 (expansion coefficients) 的自由度的多寡與所切割的次定義域的數目有關。

因為波譜法的收斂速度是呈指數型的收斂，其誤差的大小為 $O(e^{-rN})$ ，為一正數 (Fulton & Schubert, 1987)，N 為基函數的自由度。而有限元素法的優點則是可將計算域分割成數個次計算域，可計算各個元素的物理值。可將變化較劇烈的計算空間個別獨立出來，以較多

二、基本理論

若有一微分方程如下：

$$L(u)=0 \quad (1)$$

其中 L 為一操作因子 (operator)，包括空間與時間的微分。於該微分方程式中，我們將 u 以一基函數 (trial functions) 來展開。即 $u = \sum_{n=0}^{\infty} a_n w_n$ 。而其中 a_n 為待定係數， w_n 為基函數。再將微分方程式乘上一權重函數 ζ_k (weighting functions) 後，對空間加以積分而得一新的微分方程。

$$\int L(\sum a_n w_n) \zeta_k dx = 0, \quad k=0,1,2,\dots \quad (2)$$

其中 ζ_k 為一權重係數。

再搭配邊界條件或起始條件求解，即可求得式中所有未知之待定係數 a_n 。在此需要說明的是，基函數與權重函數並不一定相同，只是在本文中，所使用的方法是取基函數與權重函數相同。本研究將採取 scheme 來求解微分方程式。

本研究中所採用的數值方法為 Chebyshev method，此方法的基函數與權重函數皆取 Chebyshev 多項式。

Chebyshev 多項式乃是定義於 1 與

-1 之間的一個函數。若現有問題其定義域在 $[-1, 1]$ ，則以 Chebyshev 多項式對變數的展開可表示為

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{u}_k T_k(x) \quad \hat{u}_k = \frac{2}{c_k \mathcal{F}} \int_{-1}^1 u(x) T_k(x) w(x) dx \quad (3)$$

其中權重係數 (weighted coefficient)

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

。假設函數 $u(x)$ 的導數以 Chebyshev 多項式展開，則函數導數根據 (3) 可以表達成下列形式

$$u' = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{u}'_k T_k \quad (4)$$

其中

$$\hat{u}'_k = \frac{2}{c_k} \sum_{\substack{p=k+1 \\ p+k=\text{odd}}}^{\infty} p \hat{u}_p \quad (5)$$

$u^{(1)}$ 代表 u 的一階導數。

如有一維定義域被分離為兩個次計算域。則在相交處連接點的值與其一階微分的值需相同。

若一二維的定義域，由於 scheme 並不在空間裡取點，故需將邊界條件以權重餘數法的觀念將邊界條件積分，但積分後所求得之方程式中會出現相依的方程式。為了避免這個問題，本研究於二維空間的連接面取點，以避免相依方程式所帶來之問題。所以為了符合方程式的需要，在此引入 collocation 的觀念，以 collocation 取點。其方式如下

$$x_j = \cos \frac{j\pi}{N} \quad (6)$$

其中 j 為我們所選取的點的數目，N 為我們所選取的基函數所展開的數目，即為基函數的自由度。使這些點的值相同，並且其連接點的 n-1 階導數相等。即

$$X_{1,j} = X_{2,j} \quad 1 \leq j \leq N-1 \quad (7)$$

$$\Gamma_{1,j} = \Gamma_{2,j} \quad 1 \leq j \leq N-1 \quad (8)$$

其中 $X_{i,j}$ 為連接面所取的點的值，而 $\Gamma_{i,j}$ 為連接面所取的點的導數的值。

本研究裡所討論的最高空間導數階數為二階導數，所以以另一種說法來說明的話，即是於連接面所取的點的值必須是連續 (continue) 而且平滑的 (smooth)，以求次計算域連結時的正確性。

三、理論應用

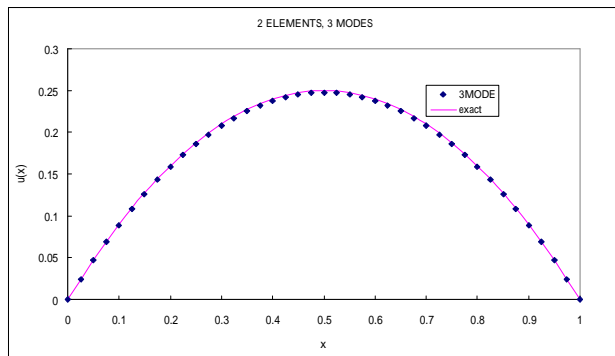
3.1 一維常微分方程

$$\frac{d}{dx} \left[(1+x) \frac{du}{dx} \right] + (1+4x)u = 0 \quad (9)$$

邊界條件為

$$u(0) = 0$$

$$u(1) = 0$$



圖一 兩個次定義域、3 個 modes 數值解與解析解之比較

所得的結果與有限元素法 (其基函數為線性函數) 來做比較。如圖一。因為兩者都是整體近似的數值方法，所以求出來的值都趨近解析解的值。但先就有限元素法四個元素 (其所解的矩陣為 6×6) 的解，雖然其所取的節點上的非常接近但其他空間的值，皆為內插所得，其最大誤差為 6%。波譜元素法取 3 個 modes 的矩陣為 6×6 ，但是空間上的每一個解都非常接近解析解，誤差約為 1%。

當 mode 漸增時，誤差逐漸遞減，其

關係式為 $error = 0.0005N^{-0.0025}$ ，N 為 mode 數。次定義域遞增時誤差的變化。發現當次定義域等於 2 時，其誤差達 1.4%。但次定義域增加時誤差快速遞減，例如 4 個次定義域時誤差為 0.4%。其關係式為 $error = 0.0119E^{-1.9306}$ ，E 為次定義域數目。故必須針對問題所要求的精度來決定所需的次定義域的數目或者是 mode 數。故選擇次定義域數的大小可減少運算時間與記憶體的使用。

3.2 一維波浪方程式

若有一維波浪方程式如下所示：

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad 0 \leq x \leq 2f \quad (10)$$

$$\text{邊界條件為：} u(x,0) = \sin(f \cos(x)) \quad (11)$$

$$\text{起始條件為：} u(0,x) = \sin(f \cos(x)) \quad (12)$$

隨著 mode 的增加誤差呈指數遞減，其關係式為 $error = 0.2002N^{-0.0049}$ ，N 為 mode 數。當 mode 固定時，次定義域數增加，誤差呈指數遞減，其關係式為 $error = 1.0904E^{-1.196}$ ，E 為次定義域數目。

3.3 Poisson 方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -1 \quad (13)$$

其邊界條件為

$$\begin{cases} u_x(0,y) = 0 \\ u_y(x,0) = 0 \\ u(1,y) = 0 \\ u(x,1) = 0 \end{cases} \quad (14)$$

解析解為

$$\frac{1}{2} \left\{ (1-y^2) + \frac{32}{f^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos[(2n-1)f/2] \cosh[(2n-1)fx/2]}{(2n-1)^3 \cosh[(2n-1)f/2]} \right\}$$

首先對波譜元素法與有限元素法做比較。波譜元素法以兩個次定義域取 3×3 個 mode 和 4×4 個 mode 與有限元素法取 4 個與 16 個三角元素做比較，可發現波譜

元素法 4×4 個 mode 所求得之解 (誤差約為 3%) 與有限元素法 16 個元素所求得之解 (誤差約為 1%) 比較顯然較不理想。

若單就矩陣大小的比較 4×4 個 mode 就有 32×32 矩陣, 矩陣隨 mode 數增加非常快, 浪費了計算的時間與電腦記憶體。有限元素法的 4 個元素來看, 因為其矩陣為對稱型態僅需取 6×6 矩陣, 而 16 個元素所取的矩陣為 15×15 。就此一方面, 波譜元素法比有限元素法略遜一籌。但就整體來說, 有限元素僅僅能對所選取的點求出解, 如四個元素只能對空間中 9 個點求解, 其他的空間的解皆採用內差求得。而波譜元素法則是將空間的每一點的值算出。

所以假設有限元素法是以線性函數作為基函數與權重函數, 則其他未取計算點的所求得之解皆為線性內差, 其誤差將比波譜元素法所求得之值的誤差來得大。所以波譜元素法在此佔了很大的優勢。換句話說, 若有限元素法要與波譜元素法一樣能完全算出物理空間的值且誤差相同, 則有限元素法所選取的矩陣將大大增加。

再來對取相同數目的次定義域的波譜元素來做比較, 可發現 mode 數增加, 誤差快速遞減, 其關係式為 $error = 6.2285N^{-4.5038}$, N 為 mode 數。但是矩陣卻急遽增加, 如 8×8 個 mode 時, 矩陣為 128×128 。

再對固定 mode 而不同次定義域的個數做比較。可發現當 mode 不變而次定義域的數目增加時, 誤差以指數遞減, 其關係式為 $error = 0.1235E^{-1.7723}$, E 為次定義域數目。但是其矩陣的大小也相對的成倍數增加, 增加計算時的時間與所需的記憶體。

四、結論與建議

波譜法所採用的基函數為 Chebyshev 多項式, 為整體近似的方法。對空間微分項是採用解析的方法, 所以對空間微分項

的處理可得非常好的解。其誤差的遞減關係式為一指數遞減的關係。例如一維問題時其誤差與 mode 數的關係式為 $error = 0.0005N^{-0.0025}$, N 為 mode 數。其收斂的速度為 mode 數的 -0.0025 次方。而一維波浪方程式其誤差與 mode 數的關係式為 $error = 0.2002N^{-0.0049}$, 而 Poisson 方程式誤差與 mode 數的關係式為 $error = 6.2285N^{-4.5038}$, 其因為才切割為 2 個次定義域所以其誤差的收斂也就較劇烈, 其收斂的速度就高達 mode 數的 -4.5038 次方。

隨著空間分割的數目越多, 其精度越高。例如一維之常微分方程式固定 8 個 mode 時其誤差與次定義域的關係式為 $error = 0.0119E^{-1.9306}$ 。而一維波浪方程式, 固定 16 個 mode 時其誤差與次定義域的關係式為 $error = 1.0904E^{-1.196}$ 。而 Poisson 方程式固定 3×3 個 mode 時其誤差與次定義域的關係式為 $error = 0.1235E^{-1.7723}$ 。可發現當固定 mode 時其誤差的遞減隨著次定義域數目的 -1 至 -2 次方在遞減。故當空間切割的越多其收斂也越快速, 即更能增加計算時的精度。

參考文獻

1. 楊德良 (1994) : “ 三維淺水流場基本解與邊界積分法之研究 ” 國立台灣大學土木工程學研究所
2. 劉格非 (1996) : “ 波譜法應用於二維波浪模擬之探討 ”, 國立台灣大學土木工程學研究所
3. 郭佳虹 (1997) : “ 波譜法應用於擬三維河海水理模式 ”, 國立台灣大學土木工程學研究所
4. 簡紹欽 (1998) : “ 大區域海岸水域非線性波浪數值模式之研究 ”, 國立台灣大學土木工程學研究所
5. 葛家豪 (1998) : “ 邊界元素法對三維水沖激問題之數值方法 ” 國立台灣

- 大學造船及海洋工程學研究所
6. 經濟部水資源統一規劃委員會 (1994) : “有限體積元素法在河川二維水理演算之應用” 經濟部八十三年度研究發展專題
 7. 陳效吾 (1996) : “寬頻元素法應用於火焰燃燒之研究”, 國立台灣大學機械工程研究所
 8. 汪吉昌 (1996) : “交錯格點應用於寬頻元素法解二維不可壓縮 Navier-Stoke 方程式之研究”, 國立台灣大學機械工程研究所
 9. Canuto C. (1986): “Boundary conditions in Legendre and Chebyshev methods”, SIAM J. Numer. Anal. 23, pp815-831.
 10. Canuto C., A. Quarteroni (1981b): “Spectral methods for hyperbolic equations”, R. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino 39, pp21-31
 11. Orszag, S. A. (1970): “Transform method for calculation of vector couple sums. Application to the spectral form of the vorticity equation.”, J. Atmosph. Sci. 27, pp890-895.
 12. Orszag, S. A. (1969): “Numerical methods for the simulation of turbulence.” Phys Fluids, Suppl. II, 12, pp250-257
 13. Patera, A. S. (1986): “Fast direct Poisson solvers for high-order finite element discretizations in rectangularly decomposable domains.”, J. Comp. Phys., 65, pp474-480
 14. Quarteroni, A., and G. Sacchi-Landriani. (1988): “Domain decomposition preconditioners for the spectral collocation method”, J. Sci. Comput., 3, pp45-76