綜論

結構方程模型的基本原則及符號

姚 開 屏

中文摘要

本篇簡介一種目前被廣泛應用於社會行爲科學、經濟、教育等學界的研究方法——結構方程模型法(structural equation models)。結構方程模型是迴歸分析(regression analysis)的一種延伸，它同時分析一個封閉理論模型中一組線性迴歸方程式，以了解模型中變項間的因果關係。這種方法可提供給職能治療研究一個新的資料分析法，提昇職能治療的研究水準。(中華民國職能治療學會雜誌 11:79-94，1993)

Key words: causality, regression analysis, structural equation models, LISREL, latent variables.

前 言

假設你想研究某一問題而收集了數個變項(variable)的資料，當你想知道變項A與變項B之間的關係時，最常用到的統計方法是求二變項間的相關係數(correlation coefficient)。當你想知道是否可用變項A來預測(predict)變項B時，最常用到的統計方法則是迴歸分析(regression analysis)。但是你若想知道爲研究問題所設計的假想模型(models)中各變項間之「因果關係」(causality)時，你該用什麼方法來探討變項間之複雜關係呢？筆者在這篇文章中將介紹一個目前非常被廣泛應用於社會行爲科學、經濟、教育、統計界，處理假想模型中變項間因果關係的方法，我們稱之爲結構方程模型(sturctural equation models)。筆者的目的是希望藉由介紹新的研究方法給職能治療界，進而提昇職能治療研究的水準、拓展職能治療研究的領域，使能更有效的利用所收集到的資料做最有效的解釋。在筆者的下一篇文章中，將實際應用此方法於職能治療的研究上。

美國伊利諾大學香檳校區心理系博士班研究生

受文日期：82年8月9日
接受刊載日期：82年11月8日
最後修正稿接受日期：82年12月3日
索取抽印本聯絡人：姚開屏小姐，603 E. Daniel St. Champaign, IL 61820, U.S.A.

結構方程模型實際上是迴歸分析的一種延伸，而二者間的差別在於：迴歸分析只分析一個方程式，而結構方程模型卻同時分析一組（含有數個）迴歸方程式[1]。筆者將先從最基本的迴歸分析開始介紹，再進入本篇的主題——結構方程模型。本篇將只介紹結構方程模型最基本的理論及其所用的符號(notation)，至於如何實際的操作測試模型及解決此模型特有的問題，將不在此篇中討論，讀者可參考文獻[(1)-(4)]。讀者若有基本的矩陣代數 (matrix algebra) 知識，則有助於對本文的了解。讀者可參見附錄對此方面的基本介紹。使用矩陣代數的目的是得以方便處理未來較複雜的分析。

一、迴歸分析(regression analysis)

當我們欲了解自變項(predictor or independent variable) 與依變項 (criterion or dependent variable) 間的關係，迴歸分析是個常被使用的統計方法。以下將依照變項的複雜程度而介紹，由最簡單的單迴歸分析 (simple regression analysis)，再而複迴歸分析 (multiple regression analysis)，最後是多變項複迴歸分析 (multivariate regression analysis)。

1.單迴歸分析(simple regression analysis)：

只用一個自變項 x 預測另一個依變項 y (見圖一)。箭頭指向的終端是依變項。實際例子是：用大學入學考成績預測入學後第一年學業成績。若我們寫出變項間關係的迴歸方程式則是：

$$y = xb + e$$

x ：自變項

y ：依變項

q ：自變項數目 (q=1)

p ：依變項數目 (p=1)

b ：迴歸係數

$$\boxed{Y_{nx1}=X_{nx1}B_{1x1}+E_{nx1}}$$

$$x \xrightarrow{b} y \leftarrow e$$

矩陣：

$$Y_{nx1}=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{bmatrix}, \quad X_{nx1}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$B_{1x1}=(\,b\,), \quad E_{nx1}=\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ e_n \end{bmatrix}$$

圖一、單迴歸分析 (simple regression analysis)

b 是我們欲評估的迴歸係數(regression coefficient)，因爲自變項只有一個，因此 b 也只有一個，e 是誤差(error)，因此依變項是等於自變項乘以迴歸係數再加上誤差。假設我們收集了 n 個人的資料，則含此 n 筆資料的變項間關係方程式則變成

$$
\begin{aligned}
y_1 &= x_1 b + e_1 \\
y_2 &= x_2 b + e_2 \\
&\vdots \\
y_n &= x_n b + e_n
\end{aligned}
$$

χ n指第 n 個人的自變項值，y n爲其依變項值。我們可簡化此方程式爲向量（或矩陣）模式

$$\mathbf{Y}_{nx1}=\mathbf{X}_{nx1}\mathbf{B}_{1x1}+\mathbf{E}_{nx1}$$

大寫字體表示向量，其內的成份以小寫字體表示，例如 Y 是一個向量，其內則含有 n 個 y 成份。Y 底下的 nx1 表示此向量的維度數(dimension)，由向量的行數(row) x 向量的列數(column)組成。迴歸分析的目標是求出 B（即迴歸係數)。

2.複迴歸分析(multiple regression analysis)：

用多個自變項 χ 預測一個依變項 y（見圖二)。實際例子是：用大學入學考成績、高中成績、性別、家庭經濟狀況等預測第一年學業成績。假設有 q 個自變項，則變項間關係迴歸方程式爲

$$y=x_1b_1+x_2b_2+\dots+x_qb_q+e$$

同前，b 乃欲評估的迴歸分係數。含 n 筆資料變項間關係用向量（或矩陣）符號則可寫成

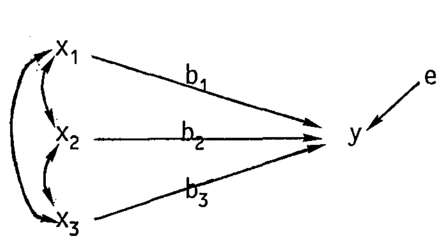
$$\mathbf{Y}_{nx1}=\mathbf{X}_{nxq}\mathbf{B}_{qx1}+\mathbf{E}_{nx1}$$

x_1, x_2, x_3：自變項
y：依變項

q：自變項數目 (q=3)
p：依變項數目 (p=1)

b_1, b_2, b_3：迴歸係數

$$\boxed{Y_{nx1}=X_{nx3}B_{3x1}+E_{nx1}}$$



矩陣：

$$Y_{nx1}=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{pmatrix}, \quad X_{nx3}=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{n1} & x_{n2} & x_{n3} \end{pmatrix}$$

$$B_{3x1}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \quad E_{nx1}=\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ e_n \end{pmatrix}$$

圖二、複迴歸分析 (multiple regression analysis)

模式類似前者但維度數改變。例如矩陣 X 的維度數是 nxq ，也就是此矩陣含有 n 筆資料，每筆資料由 q 個自變項組成。而向量 B 由 q 個迴歸係數組成， 因此維度數是 qx1 。複迴歸分析法就是收集 n 個人的資料，每人資料中含有 q 個自變項(χ)及一個依變項(y)，用此資料去找出 q 個迴歸係數，由此可了解這 q 個自變項是如何的預測依變項。

3. 多變項複迴歸分析 (multivariate regression analysis)：

用相同的多個自變項 χ 預測多個依變項 y [見圖三(a)]。實際例子是：用大學學業成績、 TOFEL 成績、 性別、 年齡等來預測 GRE 中三項分測驗 (verbal 、 quantitative and analytic subtests) 。假設有 q 個自變項及 p 個依變項，則含 n 筆資料變項間關係用矩陣可表示成

$$Y_{nxp}=X_{nxq}B_{qxp}+E_{nxp}$$

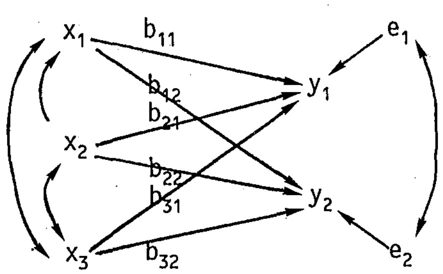
同樣地，此模式類似前者但維度數改變。矩陣 Y (維度數 nxp) 表示有 n 筆資料，每筆資料由 p 個依變項組成。 矩陣 X (維度數 nxq) 表示有 n 個資料，每筆資料由 q 個自變項組成。 矩陣 B (維度數 qxp) 則是我們欲評估的迴歸係數矩陣，其係數乃是 q 個自變項預測 p 個依變項的迴歸係數值。多變項複迴歸分析收集 n 個人的資料，每人資料中含有 q 個自變項(χ)及 p 個依變項(y)，用此資料去尋找自變項與依變項之間的迴歸係數值

x_1, x_2, x_3 ：自變項
y_1, y_2 ：依變項

q: 自變項數目 (q=3)
p: 依變項數目 (p=2)

b_{11}, b_{12}, b_{21}, b_{22}, b_{31}, b_{32}: 迴歸係數

$$\boxed{Y_{nx2}=X_{nx3}B_{3x2}+E_{nx2}}$$



矩陣：

$$Y_{nx2}=\begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \\ \vdots & \vdots \\ y_{n1} & y_{n2} \end{pmatrix},\quad X_{nx3}=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & x_{n3} \end{pmatrix}$$

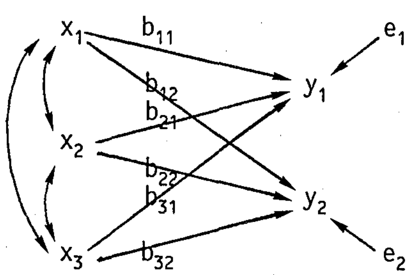
$$B_{3x2}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix},\quad E_{nx2}=\begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \\ \vdots & \vdots \\ e_{n1} & e_{n2} \end{pmatrix}$$

圖三(a)、多變項複迴歸分析 (multivariate multiple regression analysis)

，由此了解這 q 個自變項是如何的預測那 p 個依變項。

有些讀者可能會提出：爲什麼不能使用 p 次的複迴歸分析，在每一個複迴歸分析中，都用相同的 q 個自變項去預測 p 個依變項之中的一個 y。換句話說就是用多次的複迴歸分析來取代多變項複迴歸分析。這問題的答案可用圖三(a) 及圖三(b) 來說明。比較此二圖的差異，我們可知道多變項複迴歸分析允許依變項間關係的存在，而多次的複迴歸分析則否。實際上除非研究者非常確定或假設依變項間沒有任何關係存在，否則研究者應考慮使用多變項複迴歸分析，而不是使用多次複迴歸分析。

由以上各迴歸分析法得知變項間的關係方程式皆爲Y＝XB＋E，即依變項是等於自變項乘以迴歸係數再加上誤差，但Y、X、B及E隨著使用自變項及依變項數目的不同而維度數也不同。究竟我們如何評估出適當的B (其內含迴歸係數)呢？在統計中最常用到的方法叫做最小平方估計法 (least squares estimation method)。用最小平方估計法所求得的B，會使得所「預測」的依變項值(稱



圖三(b)、兩個複迴歸分析

爲 $\hat{y}$)與實際觀察依變項值(y)之間的差距最小。若是針對所有 n 個人的資料，我們的目標是減小 $\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i - y_i)$ 的值以求得適當的迴歸係數。換句話說，即是減小這 n 筆資料中，其估計依變項與實際依變項之間差距的總和。

二、結構方程模型 (Structural equation models)

當研究的目的不是只限於現象的描述，而是建構一個假想理論模型並分析模型中變項之間的因果關係時，結構方程模型提供了很好的研究途徑。你可能聽過類似處理此問題的名稱，例如：因徑分析(path analysis)、共變量結構分析(covariance structure analysis)、潛在變項模式 (latent variable models) 等，而「結構方程模型」可說是目前最被廣泛稱呼的[5]。它是迴歸分析的一種延伸，藉由同時分析一個封閉理論模型中一組（多個）線性迴歸方程式，而了解模型中變項間之因果關係。在本質上，它不是用來「證明」變項間之因果關係的存在，它僅具回溯功能，即是被用來「檢驗」一個假想理論模型的準確或可靠度，以看出是否這個假想的模型與實際收集的資料一致[1, 2]。因此「如何」找出一適當的假想模型，定出變項間假想的關係，再檢驗這關係的準確度，而後找出最終的模型是非常重要的。假想理論模型的建立最主要的根據是基於研究人員對研究問題的理論架構及研究經驗而設計出來的，文獻回顧可幫助研究人員了解變項間之關係。例如：兩變項間的關係是否存在；若關係存在，則兩變項間之因果關係如何；若是變項A影響變項B，則這影響是直接的影響， 還是透過中介變項 (intervening variables)，或二者皆有。

一些常見的理論模型如：學業成就模型、消費者行爲模型、精神病人回歸社會模型等。讀者可就自己有興趣的研究問題經文獻的回顧後，設計出假想理論模型，並經由結構方程模型研究方法，來探討變項間之因果關係。由於結構方程模型同時分析所有變項間之關係，因此它著眼於變項間共變量(covariance)的關係，而不像迴歸分析中分析個體(individual observations)。若又如同迴歸分析法，爲了求得最適當的模型，研究人員的目標是要減小「預測」共變量與實際觀察共變量間之差距[2]。這裡所所說的「共變量」是指兩變項間偏差值(deviation score)的乘積，而變項與自己本身的共變量稱爲變異量(variance)。

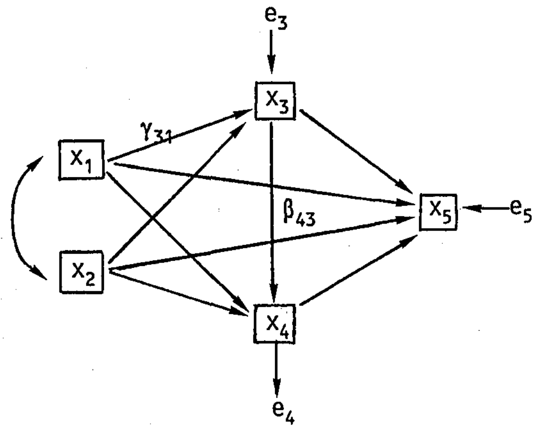
在正式介紹結構方程模型前，筆者先談幾個重要的名詞：

1. 觀察變項(observed variable)：指可被直接觀察到的變項。例如：性別、年齡、測驗分數等。
2. 潛在變項(latent variable)：結構方程模型法的一大特色是它探討了潛在變項的可能性。所謂「潛在變項」是一種不可直接觀察得到但卻假設其存在的變項。在社會及行爲科學的研究中，常會發現有很多概念(concept)是沒辦法被具體定義出來的[6,7]，例如：動機(motivation)、智力(intelligence)、焦慮(anxiety)、外向個性(extrovert personality)，這些都是比較抽象的概念。人們所發展出來測量這些概念的測驗或量表，只是一種指標(indicator)而非概念本身。例如「智力」這個概念，人們可發展出多種不同的測驗方法，但沒有一種能完全說明「智力」究竟是什麼，這是因爲這概念本身較難被定義清楚之故。
3. 外衍變項(exogenous variable)：在因果模型中，只扮演「因」(cause)的角色，卻從不扮演「果」(effect)的角色的變項，它不受模型內任何其他變項的影響。當一個模型中有兩個或兩個以上的外衍變項存在時，則二外衍變項間可能有相關，也可能彼此獨立。迴歸分析中的自變項即扮演類似的角色。
4. 內衍變項(endogenous variable)：在因果模型中，此變項受到外衍變項、其他內衍變項或誤差變項(error)的影響。外衍變項與內衍變項最大的不同點在於前者只可是「因」，而後者可以是「因」也可以是「果」。
5. 誤差變項(error variable)：是除了所有自變項外，可能影響依變項變化的所有外在可能因素。這個概念相當於迴歸分析中「誤差」的概念。

因果模型即由上述變項組合而成。圖四是一個假想的因果模型，可用以說明各變項。例如：圖中χ_1及χ_2是外衍變項，χ_3、χ_4、及χ_5是內衍變項，而e_3、e_4及e_5是誤差變項。

1.因徑圖(path diagram)[2]：

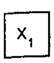
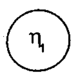
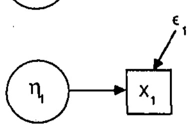
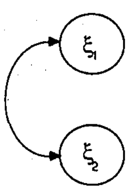
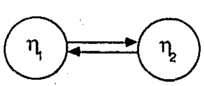
當依據文獻回顧及自己的研究經驗而設計出假想的理論模型後，下一步就是要將變項間的因果關係繪成類似圖四的圖形，我們稱之爲因徑圖(path diagram)。因徑圖乃表示了一個封閉的模型中，各變項間因果關係及方向的情形。因徑圖常提供給研究人員對研究問題非常清楚且直接的概念。下面將介紹繪因徑圖所慣用的表達方法（讀者可參見表一）：



x_1，x_2 ： 外衍變項(exogenous variables)
x_3，x_4，x_5 ：內衍變項(endogenous variables)
e_3，e_4，e_5 ：誤差變項(error variables)

圖四、假想因果模型

表一、因徑圖 (path diagram) 所使用的符號

	rectangular or square box signifies an observed or manifest variable
	circle or ellipse signifies an unobserved or latent variable
	unenclosed variable signifies a disturbance term (error in either equation or measurement) straight arrow signifies assumption that variable at base of arrow "causes" variable at head of arrow
	curved two-headed arrow signifies unanalyzed association between two variables
	two straight single-headed arrows connecting two variables signifies feedback relation or reciprocal causation

用四方形或長方形表示觀察變項，用圓形或橢圓形表示潛在變項，不用任何形圍住的變項是誤差變項。變項與變項間之關係用有方向的箭頭表示，單向箭頭的開端是「因」，而箭頭的終端是「果」。若兩變項相關(association)但非因果關係，則用雙向曲線箭頭表示。兩變項間相關可能有數種原因，其一是兩變項皆受到第三變項的影響，其二是變相間可能有某種程度的因果關係，但這關係還未被清楚的認定 (unspecified) 。 若兩變項間互相成爲因果關係，利用兩個直單反方向的箭頭表示其反饋(reciprocal or feedback)的情形。變項間的關係用有方向的箭頭表示，不論是單向、雙向、或直、或曲，皆會有一係數值來表示這個關係的大小，這就有如迴歸分析中的迴歸係數，結構方程模型就是要去評估這些係數值的大小，以了解變項間的假設關係是否成立，若不成立則必須修改變項間的關係，直到找到最適當的關係爲止

2.使用符號(notation)：

在因徑圖中，變項間的係數皆用一代號表示，這就有如在迴歸分析中用代號b_1、b_2……表示迴歸係數一樣。當我們在寫出變項間關係的方程式時，結構方程模型習慣上用希臘文字 (Greek) 來表示變項以及變項間之迴歸係數，這其實與迴歸分析法中用英文字母(例如：x、y、b、e)來表示變項及迴歸係數没有差別。希臘文字只是結構方程模型的習慣用法。本篇以下所用到的希臘文字符號將依照目前最被廣泛使用的 LISREL (Linear Structural Relations)符號用法。在所寫出的關係方程式中，用希臘文的大寫字體表示向量或矩陣， 其中含有小寫字體的成份 (components)。這就如同在迴歸分析中用y_1、y_2……y_n組成Y一樣。用來代表兩個變項間迴歸係數的代號，除了希臘小寫字體外，右下方會有兩個阿拉伯數字(例如：γ_{31}或β_{43})，第一個數字表示模型中「果」的一方變項號碼，第二個數字則表示模型中「因」的一方變項號碼。 例如：圖四中χ_1爲「因」而χ_3爲果，則二變項間的迴歸係數是爲γ_{31}。

3.如何寫出變項間關係方程式(2)：

就如同在迴歸分析中寫出變項間的方程式一樣，我們要寫出因果模型中所有變項間所有因果關係之方程式。迴歸分析只分析一個方程式，而結構方程模型要同時分析這一組所有的方程式。假如我們的因果模型中含有許多變項且含有潛在變項，則變項間的關係可能會相當複雜，要寫出變項間的關係方程式也會很複雜。這時若將各變項間的關係集合成以矩陣的方式表出，則會使我們比較清楚了解這因果模型中，變項間之關係。這是我們使用矩陣代數的原因。

當我們要寫出變項間關係方程式時，要考慮分成兩部分來寫。第一部分是針對模型中潛在變項所寫成的方程式，我們稱爲結構模型 (sturctural model) 。 另一部分則是針對模型中觀察變項所寫成的方程式，我們稱爲測量模型(measurement model)。

(1)結構模型(sturctural model)：

表二用矩陣符號寫出潛在變項所有關係之集合。方程式中用η表示潛在內衍變項(latent endogenous variable)矩陣， 用ξ表示潛在外衍變項 (latent exogenous variables) 矩陣， 而用ζ表示潛在誤差 (latent error) 矩陣。 B及Γ則分別是我們欲評估

的迴歸係數矩陣。表二中也列出了此模型的假說 (assumptions)、各矩陣之維度數 (dimension) 及共變量矩陣 (covariance matrices)。m 是潛在內衍變項的數目，而 n 是潛在外衍變項的數目。

(2)測量模型(measure model)：

表三用矩陣符號寫出觀察變項所有關係之集合。觀察變項又分成兩類，一是與潛在內衍變項(η)連上關係的觀察變項，我們以Y來代表。另一是與潛在外衍變項(ξ)連上關係的觀察變項，我們以X來表示。要分別就此二類觀察變項寫出二個方程式。ε 及 δ 則是此二方程式的誤差變項矩陣。Λ_y 及 Λ_x 是我們欲評估的迴歸係數矩陣。表三中也同樣列出了此模型之假說、各矩陣的維度數及誤差之共變量矩陣。p 是觀察變項 y 的數目，而 q 則是觀察變項 χ 的數目。

4.例子說明

現在我們用一個例子來說明。圖五是一個假想的因果模型因徑圖。有兩個潛在變項(ξ 及 η)分別用圓形表示，ξ 是潛在外衍變項，因爲它只扮演因的角色，也就是說只有從此變項指出箭頭到別的變項，它並不接受由別的變項指過來的箭頭。η 是潛在內衍變項，因爲它受到外衍變項 ξ 及誤差變項 ζ 的

表二、結構模型 (structural model)

Notation for Latent (Unobserved) Variable Model— structural model

Structural Equation for Latent Variable Model

$$\boldsymbol{\eta} = \mathbf{B}\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\zeta}$$

Assumptions

$E(\boldsymbol{\eta}) = 0$
$E(\boldsymbol{\xi}) = 0$
$E(\boldsymbol{\zeta}) = 0$
$\boldsymbol{\zeta}$ uncorrelated with $\boldsymbol{\xi}$
$(\mathbf{I} - \mathbf{B})$ nonsingular

Symbol	Name	Dimension	Definition
		Variables	
$\boldsymbol{\eta}$	eta	$m \times 1$	latent endogenous variables
$\boldsymbol{\xi}$	xi	$n \times 1$	latent exogenous variables
$\boldsymbol{\zeta}$	zeta	$m \times 1$	latent errors in equations
		Coefficients	
$\mathbf{B}$	beta	$m \times m$	coefficient matrix for latent endogenous variables
$\boldsymbol{\Gamma}$	gamma	$m \times n$	coefficient matrix for latent exogenous variables
		Covariance Matrices	
$\boldsymbol{\Phi}$	phi	$n \times n$	$E(\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi}')$ (covariance matrix of $\boldsymbol{\xi}$)
$\boldsymbol{\Psi}$	psi	$m \times m$	$E(\boldsymbol{\zeta}\boldsymbol{\zeta}')$ (covariance matrix of $\boldsymbol{\zeta}$)

表三、測量模型 (measurement model)

Notation for Measurement Model

Structural Equations for Measurement Model

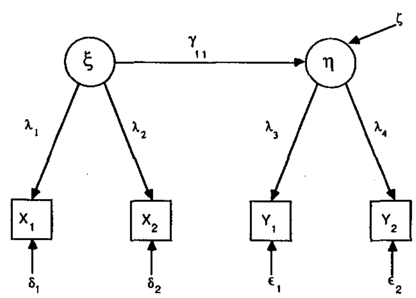
$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\Lambda}_x\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\delta}$$
$$\mathbf{y} = \boldsymbol{\Lambda}_y\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\epsilon}$$

Assumptions

$E(\boldsymbol{\eta}) = 0$, $E(\boldsymbol{\xi}) = 0$, $E(\boldsymbol{\epsilon}) = 0$, and $E(\boldsymbol{\delta}) = 0$
$\boldsymbol{\epsilon}$ uncorrelated with $\boldsymbol{\eta}$, $\boldsymbol{\xi}$, and $\boldsymbol{\delta}$
$\boldsymbol{\delta}$ uncorrelated with $\boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{\eta}$, and $\boldsymbol{\epsilon}$

Symbol	Name	Dimension	Definition
		Variables	
$\mathbf{y}$	—	$p \times 1$	observed indicators of $\boldsymbol{\eta}$
$\mathbf{x}$	—	$q \times 1$	observed indicators of $\boldsymbol{\xi}$
$\boldsymbol{\epsilon}$	epsilon	$p \times 1$	measurement errors for y
$\boldsymbol{\delta}$	delta	$q \times 1$	measurement errors for x
		Coefficients	
$\boldsymbol{\Lambda}_y$	lambda y	$p \times m$	coefficients relating y to $\boldsymbol{\eta}$
$\boldsymbol{\Lambda}_x$	lambda x	$q \times n$	coefficients relating x to $\boldsymbol{\xi}$
		Covariance Matrices	
$\boldsymbol{\Theta}_\epsilon$	theta-epsilon	$p \times p$	$E(\boldsymbol{\epsilon}\boldsymbol{\epsilon}')$ (covariance matrix of ϵ)
$\boldsymbol{\Theta}_\delta$	theta-delta	$q \times q$	$E(\boldsymbol{\delta}\boldsymbol{\delta}')$ (covariance matrix of δ)

影響，它並指出箭頭去影響別的變項。圖五中有四個觀察變項用四方形表示，其中兩個受潛在外衍變項ξ指過來箭頭的是X_1及X_2，另外兩個受潛在內衍變項η指過來箭頭的是y_1及y_2。這二類觀察變項又分別受誤差變項δ及ε的影響。因爲這些觀察變項受潛在變項指過來的箭頭，我們稱這些觀察變項爲這些潛在變項的指標 (indicator) 。意思是：當我們沒辦法直接觀察及測量一些概念 (concept)或建構(construct)時，我們藉由可觀察變項來了解這些潛在的變項。潛在變項ξ與η之間習慣用γ (gamma) 表示，潛在變項η與另一η之間習慣用β (beta) 表示。圖五



$$\eta = \gamma_{11}\xi + \zeta$$

$$x_1 = \lambda_1\xi + \delta_1\ , \quad y_1 = \lambda_3\eta + \epsilon_1$$

$$x_2 = \lambda_2\xi + \delta_2\ , \quad y_2 = \lambda_4\eta + \epsilon_2$$

$\Longrightarrow$ m=1, n=1, p=2, q=2

$$X_{2x1} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad , \quad Y_{2x1} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

$$\Lambda_{X\ qxn} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \quad , \quad \Lambda_{Y\ pxm} = \begin{bmatrix} \lambda_3 & 0 \\ 0 & \lambda_4 \end{bmatrix}$$

$$\delta_{2x1} = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix} \quad , \quad \epsilon_{2x1} = \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \end{bmatrix}$$

$$\eta_{1x1} = \eta \quad , \quad \xi_{1x1} = \xi\ , \ \zeta_{1x1} = \zeta$$

$$B_{1x1} = 0 \quad , \quad \Gamma_{1x1} = \gamma_{11}$$

圖五、假想因果模型的因徑圖

中只有一個ξ及一個η，因此二者間之關係用γ_{11}表示。潛在變項與觀察變項之間慣用γ (lambda) 表示。每一個迴歸係數代號右下角皆有數字表示不同的係數。

依據圖五的因徑圖，我們可分別就潛在變項及觀察變項寫出它的結構模型及測量模型。圖五中除了列出各個可能的因果關係方程式外，也列出結構模型及測量模型中各矩陣的情形。這些是我們在用結構方程模型法時要做的。

結構方程模型的另一項特點是它不僅可以評估一變項對變另一變項直接影響度 (direct effect)，也可評估變項間之間接影響度 (indirect effect)。例如圖五中ξ對η是直接的影響，其程度是迴歸係數值的大小即γ_{11}，而ξ對y_1的影響是間接的，其程度大小乃是所經過路徑關係係數值的乘積即$\gamma_{11}\lambda_3$。一變項對另一變項的影響有可能包括直接及間接的方式，若將此直接及間接影響度相加即得一變項對另一變項之總影響度 (total effect)[2]。

當我們將因果模型變項間的關係用矩陣的方法表示清楚後，也就是說將所決定要評估的迴歸係數及變項用矩陣的方式寫出來後，就可以用處理此問題的電腦軟體來分析這因果模型的正確度。通常你必須輸入電腦你要評估那些矩陣中的那些值，則電腦即依照你所提供的觀察資料來評估出那些值。例如：圖五的例子中，你必須告訴電腦你要評估Λ_x中的λ_1及λ_2，Λ_y中的λ_3及λ_4，Γ中的γ_{11}等。

正如迴歸分析中用最小平方估計法 (least squares estimation method)來估計迴歸係數，

結構方型模型也有用不同的估計法來計估迴歸係數，例如：極大可能估計法 (maximum likelihood estimation method, MLE)、未加權最小平方估計法 (unweighted least squares estimation method, ULS)、概化最小平方估計法(generalized least squares estimation method, GLS)，其中以第一種最常用。

本篇只介紹結構方程模型最基本的理論及所使用的符號，在實際操作模型可能會碰到的特別問題，例如：認定問題 (identification)、測量誤差 (measurement error) 問題、測量尺度問題等，讀者可進一步參考所列出之參考文獻。以下我將簡單總結：

操作結構方程模型的步驟[1]：

1. 根據文獻回顧選擇變項，及決定變項間的因果關係方向，設計出假想理論模型。
2. 畫出此模型之因徑圖。
3. 寫出此模型中變項間之關係方程式。包括了針對潛在變項的結構模型及針對觀察變項的測量模型方程式。
4. 選擇適當的估計法(MLE, ULS, GLS等)來估計變項間關係數值。依據電腦分析結果來決定此假想模型是否能很好的解釋現有之資料。
5. 若模型不好，則必須修改現有模型中變項間之關係，再重覆前述的考驟，直到發現了適當的模型爲止。

結　論

結構方程模型是迴歸分析的一種延伸，它同時分析一個封閉的理論模型中一組線性迴歸方程式，著眼於變項間之共變量(covariance)關係，以了解變項間之因果關係及方向。它不能被用來證明(prove)或發現(discover)變項間之因果關係，而是被用來「檢驗」理論模型的準確或可靠度，看是否這模型與資料的結果一致。若模型與資料結果一致，這並非證明了因果關係的存在，而是顯示出我們對模型所設的假說並沒有與資料相違背，而「可能」是妥當的 (valid)。在此用「可能」二字是因爲有可能發現其他的假說模型與資料結果也一致。讀者可參考文獻(2)及(7)對「因果關係」(causality) 有更深入的討論。由於結構方程模型可提供研究人員對資料有更深且更廣的了解，雖然它的理論及符號稍微複雜了一點，但仍不失爲一相當好的研究工具。

參考文獻

1. 葉啓政：因徑分析。楊國樞、文崇一、吳聰賢、李亦園(合編)：社會及行爲科學研究法下册。台北：東華書局，1987。
2. Bollen KA: Structural Equations with Latent Variables. John Wiley & Sons. 1989.
3. Hayduk LA: Structural Equation Modeling with LISREL. Maryland: The Johns Hopkins University Press. 1989.
4. Jöreskog KG: Analysis of covariance structures. In Nesselroade JR & Cattell RB (eds): Handbook of Multivariate Experimental Psychology, ed 2, New York: Plenum Press. 1988. pp207-280.
5. Bentler PM: Causal modeling via structural equation systems. In Nesselroade JR & Cattell RB (eds): Handbook of Multivariate Experimental Psychology, ed 2, New York: Plenum Press. 1988. pp317-335.
6. Everitt BS: An Introduction to Latent Variable

Models. London: Chapman and Hall. 1984.
7. Pedhazur EJ: Multiple Regression in Behavioral Research: Explanation and Prediction, ed 2, New York: Holt, Rinehart and Winston. 1982.

附 錄

A. 本篇所用之英文字、詞及 Greek

anxiety
association
assumption
causality
cause
coefficient matrix
column
components
concept
construct
correlation coefficient
covariance
covariance matrix
covariance sturcture analysis
criterion/dependent variables
dimension
direct effect
effect
endogenous variables
error
exogenous variables
extrovert personality
dimension
direct effect
generalized least squares estimation methods(GLS)
Greek
identification
indicator
indirect effect
individual observations
intelligence
intervening variables
latent variable
latent variable models
least square estimation method
linear algebra
LInear Structural RELations (LISREL)
matrix/matrices
maximum likelihood estimation method (MLE)
measurement model
measurement error
models
motivation
multiple regression analysis
multivariate regression analysis
notation
observed variables
path analysis
path diagram
predictor/independent variables
reciprocal/feedback relations
regression coefficient
row
scalar
simple regression analysis
structural equation models
structural model
total effect
unspecified

unweighted least squares estimation method (ULS)
variance
vector

B. 結構方程模型中所使用的 Greek (用圓圈圈住者)：LISREL 符號

大寫字體	Β	Γ	Δ	Ε	Ζ	Η	Θ	Λ	Ξ	Φ	Ψ
小寫字體	β	γ	δ	ε	ζ	η	θ	λ	ξ	φ	ψ
發音	beta	gamma	delta	epsilon	Zeta	eta	theta	lambda	xi	phi	psi

C. 矩陣代數 (matrix algebra)

一、符號及定義

1. 單一的數值我們稱爲數量(scalar)，例如：χ_1、y_2、a_{12}、b_{31}等。
2. 由兩個或兩個以上的數量組合成一行(row)或一列(column)，我們稱爲向量(vector)，例如：$X_{1\times3}=[X_1\ X_2\ X_3]$ 爲行向量

$$Y_{3\times1}=\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{bmatrix}$$ 爲列向量

3. 由一組數量組合成多個行及列，我們稱爲矩陣(matrix)，例如：$A_{3\times3}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

$$B_{3\times2}=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}$$

4. 通常用大寫字母表示向量或矩陣，其內的數量用小寫字母表示。
5. 寫於向量或矩陣底下的是該向量或矩陣的維度數(dimension)由 (行數×列數)組成。例如：Y_{3x1} 由三行一列數量組成，B_{3x2} 由三行二列數量組成。
6. 向量或矩陣中各數量右下角之號碼表示該數量在向量或矩陣中的位置，例如：Y_{3x1} 向量中y_2是占該向量中第二個位置，B_{3x2}矩陣中 b_{32}是占該矩陣中第三行第二列的位置。

7. $I=\begin{bmatrix}1&0&\cdots\cdots&0\\0&1&\cdots\cdots&0\\\cdot&\cdot&&\cdot\\\cdot&&\cdot&\cdot\\\cdot&&&0\\0&0&\cdots\cdots 0&1\end{bmatrix}$ ， $O=\begin{bmatrix}0&0&\cdots\cdots&0\\0&0&\cdots\cdots&0\\\cdot&\cdot&&\cdot\\\cdot&&\cdot&\cdot\\\cdot&&&0\\0&&\cdots\cdots 0&0\end{bmatrix}$

二、矩陣的運算(matrix operations)

1. 兩個矩陣相加（或相減）時，該二矩陣必須有相同的維度數，而相加（或相減）的結果矩陣也有相同的維度數，其內之數量值乃相對於前二個矩陣數量值之和（或差），例如：

$$A_{2\times2}=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}，B_{2\times2}=\begin{bmatrix}3&4\\5&6\end{bmatrix}\rightarrow A+B=\begin{bmatrix}1+3&2+4\\3+5&4+6\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}4&6\\8&10\end{bmatrix}_{2\times2}$$

$$C_{3\times2}=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{bmatrix}，D_{3\times2}=\begin{bmatrix}7&8\\9&10\\11&12\end{bmatrix}\rightarrow C+D=\begin{bmatrix}8&10\\12&14\\16&18\end{bmatrix}_{3\times2}$$

2. 兩個矩陣相乘時，第一個矩陣的列數必須等於第二個矩陣的行數，而相乘的結果矩陣的維度數等於（第一個矩陣行數×第二個矩陣列數），其內之數量值乃是相對於第一個矩陣的行向量與第二個矩陣的列向量乘積，例如：

$$A_{2\times2}=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}，B_{2\times2}=\begin{bmatrix}3&4\\5&6\end{bmatrix}\rightarrow$$

$$A_{2\times2}+B_{2\times2}=\begin{bmatrix}(1\times3)+(2\times5)&(1\times4)+(2\times6)\\(3\times3)+(4\times5)&(3\times4)+(4\times6)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}13&16\\29&36\end{bmatrix}_{2\times2}$$

$$C_{3\times2}=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{bmatrix}，E_{2\times3}=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{bmatrix}\rightarrow C_{3\times2}\quad E_{2\times3}$$

$$=\begin{bmatrix}9&12&15\\19&26&33\\29&40&51\end{bmatrix}_{3\times3}$$

J Occup Ther Assoc ROC
Volume 11, 1993

The Basic Principles and Notation of Structural Equation Models

Kai-ping Grace Yao

English Abstract

This paper introduces the basic theory and notation of a data analysis method, "structural equation modeling", which is an extension of regression analysis. This method is being widely used in behavior science, economic, and educational research. Structural equation models estimate the parameters of a set of linear structural equations representing the cause-and-effect relationship hypothesized by the investigator, and they test whether a relevant set of observed data is consistent with the proposed theoretical process hypothesis. This method can be used for the analysis of causal models with multiple indicators of latent variables, reciprocal causation, measurement errors, and correlated errors. This method provides a new method for analysis in occupational therapy research and, therefore, elevate the level of research. (J Occup Ther ROC 11:79-94, 1993)

doctoral candidate
Department of Psychology
University of Illinois at Urbana-Champaign
Champaign, Illinois
U.S.A.

Received Aug 9, 1993.
Accepted for publication Nov 8, 1993.
Final revision received Dec 3, 1993.
Address reprint requests to: Ms. Kai-ping Grace Yao, 603 E. Daniel St. Champaign, IL 61820, U.S.A.