

含腱機構之構造分析及合成

劉靈，林英隆

台灣大學 機械工程學研究所，台北 106

摘要：含腱機構是機構中除了剛體桿件外，亦具有撓性之線元件，並可由線之收放傳遞動力及驅動機構桿件運動。腱驅動平台機構即為含腱機構之簡單應用實例。本研究首先探討撓性線元件之特殊力學性質，進而推導含腱機構之力學模型與運動學限制，發展含腱機構之自由度分析原則，並探討幾種不同腱驅動平台機構的實施例作為驗證，最後提出合成含腱機構的基本原則。

關鍵字：腱、含腱機構、構造分析、構造合成、自由度

撓性腱元件是指柔軟且只能負載張力的機械元件，如腱(tendon)、鋼索(wire)、細繩(string)、纜線(cable)等。機構中含有腱元件者即稱為含腱機構。使用腱的好處有工作空間大、慣性小、速度快等優點，目前已有實際應用[2-9]。但撓性腱元件之性質與一般剛體桿件不同，無法以一般的方法分析或合成機構。因此本研究經由撓性線元件之特殊力學性質推導含腱機構之力學及運動學限制，發展含腱機構之自由度分析方法，提出系統化分析及合成含腱機構的基本原則。

1 基礎理論

機構中之腱元件係利用其縮放對其連接之剛體桿件產生力學及運動學限制，但腱與剛體桿件不同之處為：在緊縮狀態時才能對剛體桿件產生運動限制且傳遞力，但無法抵抗外力及外力矩。腱元件及剛體桿件作用時之特殊性質探討如下。

1.1 腱上之張力限制及運動學限制

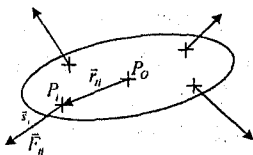
機構中之腱有三種狀態：緊縮不可調、緊縮可調及鬆弛。腱在鬆弛狀態時無法對連接之剛體桿件產生運動限制，亦無法傳遞力。當腱為緊縮狀態時可對連接之剛體桿件產生運動限制，並傳遞力。以下討論皆以腱為緊縮狀態論之。

腱只能有張力作用於其上，如圖 1 所示，描述第 i 腱之力學方程式可表示為式(1-1)，其中 \bar{s}_i 為單位方向向量，且恆為張力方向， f_{i1} 為腱上之張力大小且恆大於 0。

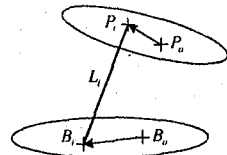
$$\bar{F}_i = f_{i1} \cdot (\bar{s}_i), \quad f_{i1} > 0 \quad i=1,2,\dots,n \quad (1-1)$$

連接在兩個剛體桿件之第 i 腱在緊縮時之運動限制為式(1-2)。如圖 2 所示，其中標示 B 表示剛體桿件 B 之座標空間，標示 P 表示剛體桿件 P 之座標空間，R 為旋轉轉換矩陣， ${}^B R_P$ 即表示由座標空間 P 轉換至座標空間 B 之旋轉轉換矩陣。當腱為緊縮不可調時腱長 L_i 為定值，當腱為緊縮可調時， L_i 為輸入變數。

$$\begin{aligned} {}^B(P_i)_{i1} &= {}^B(B_0 P_0) + {}^B R_P(P_0 P_i) \\ \bar{B}_i P_i &= L_i \cdot (\bar{s}_i) \end{aligned} \quad (1-2)$$



▲圖 1 力向量示意圖



▲圖 2 運動向量示意圖

1.2 剛體上受純張力作用之靜力平衡方程式

當一個剛體桿件有 n 個腱張力作用於其上時，靜力平衡方程式可以表示成矩陣形式如式(1-3)，簡化表示成式(1-4)。

$$\begin{bmatrix} [\bar{s}_i]_{\lambda \times n} \\ [r_{ii} \times s_i]_{\lambda_0 \times n} \end{bmatrix}_{\lambda \times n} [f_{i1}]_{n \times 1} = [0]_{\lambda \times 1} \quad (1-3)$$

$$[S]_{\lambda \times n} [f_{i1}]_{n \times 1} = [0]_{\lambda \times 1} \quad (1-4)$$

式(1-3)中 \bar{r}_{ii} 為剛體桿件上重心至第 i 個腱張力施力點之位置向量， λ 為空間可動度(degree of freedom of the space)[1]，即該剛體所處空間之運動分量數目，再予以細分平移可動度為 λ_x ，旋轉可動度為 λ_0 ，且 $\lambda = \lambda_x + \lambda_0$ 。矩陣下標 $p \times q$ 表示一 p 列 q 行之矩陣。

當一個剛體桿件有 n 個腱張力作用於其上時，由式(1-4)推論，如欲得解， n 與 λ 之關係如下：

(1) 若 $n = \lambda$ ，當 $\det[S] \neq 0$ 時， $[f_{i1}] = [0]$ ；當 $\det[S] = 0$ 時， $[f_{i1}]$ 為無解或無限多組解。

(2) 當 $n \geq \lambda + 1$ 時， $[f_{i1}]$ 將有非平凡解(nontrivial solution)。

(3) 當 $n \leq \lambda - 1$ 時， $[f_{i1}]$ 將有非平凡解。

若矩陣 $[S]$ 為滿秩，則由 $\text{rank}[S] = (n, \lambda)$ 得知：當腱張力數 n 為 $\lambda + 1$ 或 $\lambda - 1$ 時 $[f_{i1}]$ 有無限多組解；當腱張力數 $n = \lambda$ 且 $\det[S] = 0$ 時 $[f_{i1}]$ 亦有無限多組解。當 $n \geq \lambda + 1$ 時，剛體桿件為完全拘束，可以對具有 λ 可動度的剛體桿件完全控制，即該剛體桿件運動空間中的各運動分量皆可由腱所控制。當 $n \leq \lambda$ 時，剛體桿件為非完全拘束，即無法完全控制該剛體桿件的 λ 可動度運動分量。除了以上條件， $[f_{i1}]$ 之解還必須滿足為張力解，即 $[f_{i1}]$ 中之元素皆必須大於零。

2 自由度分析

含腱機構之自由度分析是以自由度通式(general equation of DOF)[1]為基礎，配合等效運動鏈轉換，以計算含腱機構之自由度。

2.1 等效運動鏈

等效運動鏈是將撓性腱元件依照不同狀態以及不同的運動空間轉換成剛體桿件組的表示方式。當腱為鬆弛時，腱的作用不存在，而無等效運動鏈轉換之存在。

對一緊縮不可調腱而言，在平面機構中($\lambda = 3$)可將該

鏈視爲一剛體桿件，其兩端以旋轉對與其他剛體桿件連接。鏈之等效運動鏈自由度爲-1，見式(2-1)。而在空間機構中($\lambda=6$)，可將鏈視爲一剛體桿件，兩端以球接頭與其他剛體桿件連接，但因為兩端皆爲球接頭所產生之脩轉自由度(Redundant degree of freedom)必須扣除。經過脩轉修正的鏈之等效運動鏈自由度爲-1，見式(2-2)。

$$F = \lambda(n-j) + \sum f_i = 3(1-2) + (1+1) = -1 \quad (2-1)$$

$$F = \lambda(n-j) + \sum f_i = 6(1-2) + (3+3-1) = -1 \quad (2-2)$$

對一緊繃可調鏈而言，在平面機構中，可將鏈視爲兩個剛體桿件以滑動對連接，剛體桿件另兩端以旋轉對與其他剛體桿件連接，鏈之等效運動鏈自由度爲0，見式(2-3)。而在空間機構中，可將鏈視爲兩個剛體桿件以滑動對連接，剛體桿件另兩端以球接頭與其他剛體桿件連接，且需扣除脩轉自由度。鏈經過脩轉修正之等效運動鏈自由度爲0，見式(2-4)。

$$F = \lambda(n-j) + \sum f_i = 3(2-3) + (1+1+1) = 0 \quad (2-3)$$

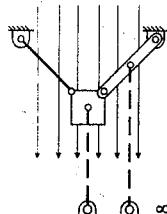
$$F = \lambda(n-j) + \sum f_i = 6(2-3) + (3+3+1-1) = 0 \quad (2-4)$$

由以上對鏈之等效運動轉換及自由度計算可知：

- (1) 當鏈爲緊繃不可調時，連接之剛體桿件會因此減少1個自由度；
- (2) 當鏈爲緊繃可調時，剛體桿件之自由度不受影響。

2.2 虛擬力鏈

當剛體桿件在一固定力場中操作，且受力場影響時，可以一虛擬力鏈模擬力場對該剛體桿件之影響。但虛擬力鏈與實體鏈不同，只能對機構中之剛體桿件產生力學限制，而無法產生幾何限制。



▲圖3 重力場對含鏈機構之影響及虛擬重力鏈示意圖

當重力對含鏈機構產生影響時，即可將重力的影響視爲一虛擬重力鏈，此虛擬力鏈的一端作用點爲剛體桿件之重心，另一端在重力方向無限遠處，力值大小爲剛體桿件在重力場中之重量，力的方向爲重力場方向，且該虛擬力鏈可視爲一緊繃可調鏈。另外，當有外力作用於一剛體時，所有外力之總和則可視爲一虛擬力鏈。但是一剛體桿件僅能有一個淨虛擬力鏈作用於其上。

2.3 含鏈機構之自由度分析

2.3.1 簡單含鏈機構之自由度分析

簡單含鏈機構係指機構中僅含兩個剛體桿件，一爲基座一爲平台，以及數條鏈連接在剛體桿件間。當簡單含鏈機構中含有 p 條緊繃不可調鏈， q 條緊繃可調鏈時，平面簡單含鏈機構自由度爲 $(3-q)$ ，經過脩轉修正之空間簡單含鏈機構自由度爲 $(6-q)$ ，因此當機構僅含緊繃可調鏈時，在平面中自由度恆爲3，在空間中恆爲6。當機構加入 q 條緊繃不可調鏈後將減少 q 個自由度。

2.3.2 複合式含鏈機構之自由度分析

複合式含鏈機構係指機構中有兩個剛體桿件，其中一爲基座一爲平台，基座與平台不直接相連接，而以 p 條緊繃可調鏈， q 條緊繃不可調鏈及 r 條剛性運動鏈連接，自由度分析如下：

- (1) 在 r 條剛性運動鏈中之第 k 條剛體桿件數爲 n_k ，接頭數爲 j_k ，接頭包含剛性運動鏈兩端；計算第 k 條剛性運動鏈之自由度，計算時需扣除脩轉自由度 d_k ；
平面第 k 條剛性運動鏈之自由度：

$$F_k = 3(n_k - j_k) + \sum_{i=1}^{j_k} f_i \quad (2-5)$$

空間第 k 條剛性運動鏈之自由度：

$$F_k = 6(n_k - j_k) + \sum_{i=1}^{j_k} f_i - d_k \quad (2-6)$$

- (2) 計算機構整體自由度

平面複合式含鏈機構之自由度：

$$F = 3 - q + \sum_{k=1}^r F_k \quad (2-7)$$

經過脩轉修正之空間複合式含鏈機構之自由度：

$$F = 6 - q + \sum_{k=1}^r F_k \quad (2-8)$$

含鏈機構即機構中含有一個以上的簡單含鏈機構或複合式含鏈機構之組合，由自由度分析可推論在計算較複雜之含鏈機構自由度時，可以將撓性鏈元件先除去，由剩下的剛體桿件及接頭計算出來之自由度減去緊繃不可調鏈數即爲機構之自由度。

3. 含鏈機構之構造分析

含鏈機構之構造分析是以鏈的等效運動鏈轉換爲分析工具，由機構中鏈的不同狀態以及剛體桿件的連接方式分析含鏈機構的自由度，並配合鏈的張力限制條件，判斷含鏈機構的可控制性。含鏈機構之構造分析步驟闡述如下。

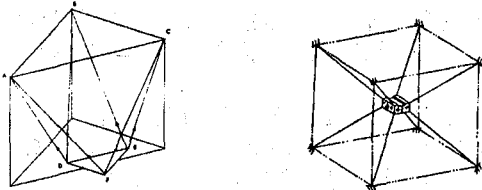
- (1) 判斷含鏈機構運動所在之空間可動度 λ ；
- (2) 由機構中之剛體桿件數判斷含鏈機構爲簡單含鏈機構或複合式含鏈機構；
- (3) 計算含鏈機構中之緊繃可調鏈以及緊繃不可調鏈數；
- (4) 判斷含鏈機構之剛體桿件是否受力場影響，若有，則每一剛體桿件皆有一條虛擬力鏈連接其上；
- (5) 若機構爲簡單含鏈機構時：
 - (a) 若有 q 條緊繃不可調鏈作用，則機構之自由度爲 $(\lambda - q)$
 - (b) 若機構中至少使用 $(\lambda - q + 1)$ 條緊繃可調鏈，其中可包含虛擬力鏈，則含鏈機構爲完全控制。若緊繃可調鏈數 p 小於等於 $(\lambda - q)$ ，則機構爲非完全控制；
- (6) 若機構爲複合式含鏈機構時：
 - (a) 先計算由除了鏈以外的剛體桿件以及接頭所構成之機構自由度；
 - (b) 計算機構中欲以鏈驅動的剛體桿件之自由度 F_p ；
 - (c) 若機構中至少使用 $(F_p + 1)$ 條緊繃可調鏈，其中可包含虛擬力鏈，則含鏈機構爲完全控制。若緊繃可調鏈數 p 小於等於 F_p ，則此剛體桿件爲非完全控制。
 - (d) 若有鏈以外的輸入，先計算輸入之自由度影響爲 F_{ip} ，則至少需 $(F_p - F_{ip} + 1)$ 條緊繃可調鏈驅動並完全控制此

剛體桿件；若緊繃可調鍵數 p 小於等於 $(F_p - F_{ip})$ ，則此剛體桿件為非完全控制。

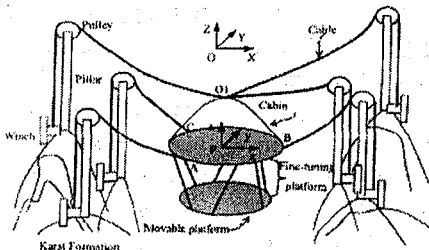
經由以上步驟，可以計算出含鍵機構之自由度，由驅動機構之操控鍵數及剛體桿件輸入數目可以判斷機構是否可達到完全控制。

3.1 含鍵機構之構造分析範例

以下舉三個實施例進行含鍵機構之構造分析。



▲圖 4 ROBOCRANE[2、3] ▲圖 5 CHARLOTTE[4]



▲圖 6 LT[9]

- (1) ROBOCRANE 是由美國國家標準局(NIST)的 Dagalakis, N 與 G. Albus 於西元 1992 年設計發展，此含鍵機構使用六條線，需在重力場中進行操作[2、3]。
- (2) CHARLOTTE™ 是由波音公司於西元 1993 年研發，由八條線進行操控，可在無重力場運作[4]。
- (3) LT (Large Radio Telescope) 是由 B. Y. Duan 於西元 1999 年開始發展，將機構中之油壓缸置換成鋼纜拉動大型天線，並於西元 2001 再做改進提高運動精度[8、9]。

範例	運動空間	類型	自由度	使用鍵數		虛擬力鍵	完全控制
				緊繃可調	緊繃不可調		
CHARLOTTE	空間	簡單	6	8	0	0	是
ROBOCRANE	空間	簡單	6	6	0	1	是
LT	空間	複合式	12	12	0	2	是

4. 含鍵機構之構造合成

含鍵機構之合成是以鍵之力學與運動學限制為基礎，配合等效運動鏈轉換，在特定之運動空間中，由簡單含鍵機構或複合式含鍵機構等基本構造合成出含鍵機構。

4.1 簡單含鍵機構之構造合成

簡單含鍵機構係以一剛體桿件為基座，另一剛體桿件作為輸出之平台，基座與平台間以緊繃可調鍵及緊繃不可調鍵連接，機構之構造合成步驟如下。

- (1) 先確立含鍵機構之運動空間型態，即空間可動度 λ 。
- (2) 簡單含鍵機構之自由度應為 λ ，至少需要 $(\lambda + 1)$ 條緊繃可調鍵，其中可包含虛擬力鍵，以達成完全控制；
- (3) 若有 q 條緊繃不可調鍵，則至少需要 $(\lambda + 1 - q)$ 條緊繃可調鍵，其中包含虛擬力鍵，以達成完全控制。

4.2 複合式含鍵機構之構造合成

複合式含鍵機構係以一剛體桿件為基座，另一剛體桿件作為平台，基座與平台間以 p 條緊繃可調鍵、 q 條緊繃不可調鍵及 r 條剛體運動鏈連接，機構之構造合成步驟如下。

- (1) 先確立含鍵機構之運動空間型態，即空間可動度 λ ；
- (2) 設定平台之自由度為 F_p ，其他連接在基座與平台間之 r 條剛體運動鏈之自由度總和為 $\sum_{k=1}^r F_k$ ；
- (3) 緊繃可調鍵至少需要 $(F_p - \sum_{k=1}^r F_k - q + 1)$ 條，其中可包含虛擬力鍵，以達成完全控制；

以上兩種基本形式之含鍵機構可再與其他含鍵機構或剛體桿件組連接，以合成出不同之含鍵機構。

5. 結論

本研究由撓性線元件之特殊力學性質推導含有鍵元件之機構之力學模型與運動學之限制，再以含鍵機構之特殊限制為基礎，分析含鍵機構之自由度，並以三種鍵驅動平台機構的實施例作為探討之驗證。最後推衍兩種合成基本含鍵機構的原則，據此原則可以繼續合成出較複雜之含鍵機構以達成特定的設計標的。本研究之結果可以作為設計含鍵機構時依據，並達成含鍵機構之非完全以及完全控制。

參考文獻

- [1] F. Freudenstein, E. R. Maki, "The creation of mechanisms according to kinematic structure and function", International J. of Architecture and Design, Environment, and Planning B, Vol.6, 1979, pp.375-391
- [2] James Albus, Roger Bostelman, and Nicholas Dagalakis, "The NIST ROBOCRANE," Journal of Robotic Systems 10(5), pp. 709-724, 1993.
- [3] Roger Bostelman, James Albus, Nicholas Dagalakis, Adam Jacoff, "Application of The NIST ROBOCRANE," Robotics and Manufacturing, Vol. 5, 1994.
- [4] P. D. Campbell, P. L. Swaim, and C. J. Thompson, "Charlotte Robot Technology for Space and Terrestrial Applications," SAE Technical Series paper 951520, 1993.
- [5] Aiguo Ming, Makoto Kajitani, Toshiro Higuchi, "On the Design of Wire Parallel Mechanism," Int. J. Japan Soc. Prec. Eng., Vol. 29, No.4 (June 1995).
- [6] S. Kawamura, W. Choe, S. Tanaka, S. R. Pandian, "Development of an Ultrahigh Speed Robot FALCON using Wire Driven System," IEEE International Conference on Robotics and Automation, 1995.
- [7] Kiyoshi Maeda, Satoshi Tadokoro, Toshi Takamari, "On Design of a Redundant Wire-driven Parallel Robot WARP Manipulator," proceedings of the 1999 IEEE International Conference on Robotics and Automation.
- [8] Duan, B. Y., "A new design project of the line feed structure for large spherical radio telescope and its nonlinear dynamic analysis", Mechanism 1, 1999.
- [9] Y. X. Su, B. Y. Duan, R. D. Nan, B. Peng, "Development of a large parallel-cable manipulator for the feed-supporting system of a next-generation large radio telescope", Journal of Robotic System 18(11), 2001.
- [10] 陳昆甫著，"含線機構之分析與合成"，台灣大學機械工程學研究所碩士論文，1999。