

行政院國家科學委員會專題研究計畫成果報告
理論解析與實驗量測二維層域系統的暫態應力波傳
Theoretical Analysis and Experimental Measurement of Two
Dimensional Transient Wave Propagation in a Layered Medium

計畫編號：NSC89-2212-E-002-018

執行期限：88年8月1日至89年7月31日

主持人：馬劍清

國立台灣大學機械工程學系

計畫參與人員：李瑞貞、陳熙洪、呂欣泰、鄭志丕

一、中文摘要

本研究計劃擬以理論解析及實驗的量測相互配合驗證，以了解層域系統受動力載荷的暫態應力波傳。計畫中將利用射線展開法，建立二維層域(包括平面及反平面問題)波傳問題的數學模型解析解；本問題為應力波在有限域中的波傳，故有無窮多波的特性，本計畫主要以解析解作為基礎進行層域系統內的暫態應力及位移數值計算；在實驗方面將建立一套完整系統以模擬理論分析的邊界條件及動力加載方式。本實驗主要量測自由表面之暫態位移以與理論分析作比較，在確定了理論計算結果與實驗完全符合後，最後並利用實驗的結果及理論正解進行反算，求出層域系統的機械性質。計畫中所使用的波源由毛細玻璃管或鉛筆芯斷裂所產生的動力加載模擬為步階函數之點波源量測自由表面之位移，並利用simplex反算程序，再配合二維點波源作用於層域上的理論正解，如此可求得最佳化之材料參數。

關鍵詞：反算、層域問題、射線展開法、動力載荷、暫態應力波

二、英文摘要

In this research project, the theoretical analysis as well as experimental

measurement will be conducted on the dynamic responses of a layered medium. We will construct the theory of transient wave propagation in a two dimensional configuration (in-plane and anti-plane motions) by the ray expansion method. Furthermore, the exact theory will be compared with the experimental results. We measure the vertical displacement of the layered medium on the top surface by applying a point force with step time function, which is obtained by the fracture break of a capillary or pencil lead. A optimization method based on the simplex algorithm together with the theoretical analysis is developed to obtain the material properties of the layered medium system from the waveform of the experimental measurement. A complete methodology of using the transient wave theory in estimating the configuration and material properties will be developed in this project.

Keywords: Inverse problem, Layered medium, Ray Expansion method, dynamic loading, transient wave

三、緣由與目的

在微機械領域中，利用積體電路製造過程所做成之微小器械，其封裝、鍍膜等過程，薄膜之幾何特性(如鍍層厚度)、材料性質及其受機械載荷所產生的動態響應，均是值得研究的重要課題。故探討應力波在層域內傳播的現象，不僅可研究動力載荷作

用下層域中暫態應力的分佈，且其一些波動基本特性更可被應用於量測層域系統之材料參數、幾何特性等非破壞檢測方面。

當對結構體施加一動力衝擊載荷時，結構體內部的質點將有劇烈的運動而產生應力波的傳遞，此應力波若遇到自由邊界將會反射，通過界面則會折射，若碰到幾何不連續處時，則會產生繞射，其間之情況相當複雜。自 1950 年來關於彈性體內應力波之暫態波傳的理論解析已有相當的成果[1,2]。

自 1904 年 Lamb[3]提出半無窮域(half-space)平面上施加一點載荷的波傳問題，固體內應力波的探討開始被廣泛的討論。然而 Lamb 所求得的僅是轉換域中的解，而 Cagniard(1958)將拉普拉斯域轉換的積分映射到 Cagniard 路徑中，解決了波傳問題在拉普拉斯域中逆轉換的問題。在 Lamb 的同篇論文中還求得半無窮域受一線載荷(line loading)之轉換域中的解。Garvin(1955)[4]求解了半無窮域受線載荷的問題。Chao(1960)[5]則解得半無窮域受剪力的問題。Pekeris(1955)[6][7]則解得表面下受徹體力及半無窮域垂直施加一點波源的問題。在 1970 年及 1974 年，Gakenheimer[8]和 Mooney[9]曾以數值的方法求解 Lamb 問題。Pao(1979,1981)[10][11]則以廣義射線理論解得半無窮域受點波源之問題。

對於薄板中的波傳問題，由於波的數目會隨反射次數的增加而急劇增加，使得在理論解析上增加許多困難度。Davids(1959)[12]求得板受載荷時，施力軸上的暫態分析。Miklowitz(1962)[13]使用殘值定理及 stationary phase 分析無限域層板之暫態波傳現象。Alterman and Karal(1968)[14]曾以有限差分法來求得層板中的彈性波傳問題，但這在數

值分析上過於複雜。Norwood (1975) [15]則以轉換矩陣的方法解得板內的暫態響應。本研究計劃所要處理之問題為二維層域問題的波傳，故需處理自由邊界的反射波以及界面產生的反射及折射波，這個問題的解析在波動力學中是相當重要，且有很大的實際應用價值。是故本研究計劃的完成，不但在學術領域上有所突破且在工程應用上亦有其發展之價值。

本研究計劃除了在理論方面的發展之外更希建立實驗的量測技術以與理論推導的結果相互印證，而本實驗的設立最主要是量測自由表面的垂直位移，因為此處之位移是最易量測且較有發展為實際應用之潛力。本實驗的系統為經由錐形感應換能器(NBS Conical Transducer)接收波傳訊號，經由前置放大器，數位類比轉換器送至個人電腦，直接由理論結果與實驗結果作比較。而感應換能器所量測之物理量為垂直於量測面之位移。本實驗所需儀器設備之經費並不多但本實驗系統之設立可作相當多重要且有深度的應力波傳之探討，是相當值得設立研究之實驗。最後希望藉由實驗所得的資料，進行反算的問題，以求材料特性以及幾何形狀。唯有進行反算工作才能有較實際的應用價值。

四、結果與討論

以二維單層板為例，我們可以射線展開法將其解析解求出。對二維問題而言，勢能可不失一般性地表示為

$$\begin{aligned}\phi &= \phi(x, y), \\ \bar{\psi} &= (0, 0, \psi(x, y)).\end{aligned}$$

故位移場可簡化為

$$\begin{aligned}u &= \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ v &= \frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x}\end{aligned}$$

平面上之應力場為

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \mu \left[(s_T^2 - 2s_L^2) \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + 2 \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right) \right] \\ \sigma_{yy} &= \mu \left[(s_T^2 - 2s_L^2) \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + 2 \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right) \right] \\ \sigma_{xy} &= \mu \left[2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right]\end{aligned}$$

而純量勢能場 ϕ 、 ψ ，分別滿足二維縱波與橫波波動方程式

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} &= s_L^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} &= s_T^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}.\end{aligned}$$

其中縱波與橫波波速 c_L ， c_T 分別為

$$c_L^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \equiv \frac{1}{s_L^2}, \quad c_T^2 = \frac{\mu}{\rho} \equiv \frac{1}{s_T^2}.$$

我們對時間取單邊拉氏轉換，空間取雙邊拉氏轉換可得其於拉氏域的通解為：

$$\begin{aligned}\hat{\phi} &= \phi_+ e^{-p y_L y} + \phi_- e^{+p y_L y}, \\ \hat{\psi} &= \psi_+ e^{-p y_T y} + \psi_- e^{+p y_T y}\end{aligned}$$

此表示式中，所有下標含正號的部份可視為沿正 y 方向傳遞的波，而負的為沿負 y 方向傳遞的波。利用邊界條件找出代定係數 ϕ_+ 、 ϕ_- 與 ψ_+ 、 ψ_- 即可求得問題之解。

勢能與位移、應力關係可以矩陣式表示如下：

$$\mathbf{d} = \mathbf{R}_{cv}(\mathbf{y}) \mathbf{c},$$

其中我們定義了位移應力向量 \mathbf{d} 如下：

$$\mathbf{d} = (\hat{u}, \hat{v}, \hat{\sigma}_{xx}, \hat{\sigma}_{yy}, \hat{\sigma}_{xy})^T,$$

係數向量 \mathbf{c} 又可細分為 \mathbf{c}_+ (往正方向傳的波)、 \mathbf{c}_- (往負方向傳的波)：

$$\mathbf{c} = (\mathbf{c}_+^T, \mathbf{c}_-^T)^T; \quad \mathbf{c}_+ = (\phi_+, \psi_+), \quad \mathbf{c}_- = (\phi_-, \psi_-).$$

而 \mathbf{R}_{cv} 接收矩陣

為了方便邊界條件的代入，我們整理出對於平行於 y 平面的位移 u 、 v 與相關應力 σ_{yy} 、 σ_{xy} 以係數向量 \mathbf{c} 來表示的矩陣形式：

$$\mathbf{f}(\mathbf{y}) = \mathbf{M}(\mathbf{y}) \mathbf{c}$$

或

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u}(\mathbf{y}) \\ \mathbf{t}(\mathbf{y}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{11}(\mathbf{y}) & \mathbf{M}_{12}(\mathbf{y}) \\ \mathbf{M}_{21}(\mathbf{y}) & \mathbf{M}_{22}(\mathbf{y}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{c}_+ \\ \mathbf{c}_- \end{pmatrix}$$

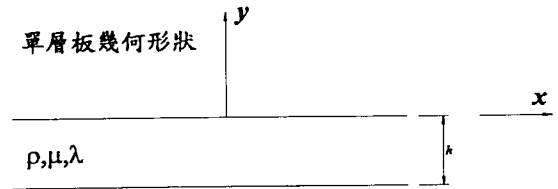
其中位移-曳力向量 \mathbf{f} ；位移向量 u ； y 平面上曳力向量 \mathbf{t} 。係數矩陣 \mathbf{M} 則被分割為四個二乘二的小矩陣 \mathbf{M}_{11} 、 \mathbf{M}_{12} 、 \mathbf{M}_{21} 和 \mathbf{M}_{22} 。注意對任何一個 y 平面上的曳力，可以曳力向量 $\mathbf{t}(\mathbf{y})$ 表示之，

$$\mathbf{t}(\mathbf{y}) = \mathbf{M}_{21}(\mathbf{y}) \mathbf{c}_+ + \mathbf{M}_{22}(\mathbf{y}) \mathbf{c}_-.$$

而此面上的位移量則為

$$\mathbf{u}(\mathbf{y}) = \mathbf{M}_{11}(\mathbf{y}) \mathbf{c}_+ + \mathbf{M}_{12}(\mathbf{y}) \mathbf{c}_-.$$

對於單層板問題，其邊界條件可述如下：



邊界條件於 $y = 0$ 和 $y = -h$ 可表為

$$\sigma_{xy}(x, 0, t) = \sigma_1 \delta(x) H(t),$$

$$\sigma_{yy}(x, 0, t) = \sigma_2 \delta(x) H(t);$$

$$\sigma_{xy}(x, -h, t) = \sigma_{1h} \delta(x) H(t),$$

$$\sigma_{yy}(x, -h, t) = \sigma_{2h} \delta(x) H(t).$$

轉換域中邊界條件：

$$\hat{\sigma}_{xy}(0) = \frac{\sigma_1}{p}, \quad \hat{\sigma}_{yy}(0) = \frac{\sigma_2}{p}, \quad \text{at } y = 0;$$

$$\hat{\sigma}_{xy}(-h) = \frac{\sigma_{1h}}{p}, \quad \hat{\sigma}_{yy}(-h) = \frac{\sigma_{2h}}{p},$$

at $y = -h$.

所對應到的曳力向量為：

$$\mathbf{t}(0) = \frac{1}{p} \begin{pmatrix} \sigma_2 \\ \sigma_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{t}(-h) = \frac{1}{p} \begin{pmatrix} \sigma_{2h} \\ \sigma_{1h} \end{pmatrix}.$$

將其代入曳力與勢能係數關係式，可得下列兩個矩陣方程式：

$$\begin{pmatrix} \mathbf{t}(0) \\ \mathbf{t}(-h) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{12}(0) & \mathbf{M}_{22}(0) \\ \mathbf{M}_{12}(-h) & \mathbf{M}_{22}(-h) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{c}_+ \\ \mathbf{c}_- \end{pmatrix}.$$

改寫為

$$\mathbf{t}' = \mathbf{M}' \mathbf{c}.$$

其中 \mathbf{t}' 為施加載荷向量， \mathbf{M}' 則為係數矩陣， \mathbf{c} 則為待定係數。上述的矩陣方程式可直接利用 Cramer 規則直接解出如下：

$$\mathbf{c} = \mathbf{M}'^{-1} \mathbf{t}'。$$

或由波展開法

$$\begin{pmatrix} \mathbf{t}(0) \\ \mathbf{t}(-h) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{12}(0) & \mathbf{M}_{22}(0) \\ \mathbf{M}_{12}(-h) & \mathbf{M}_{22}(-h) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{c}_+ \\ \mathbf{c}_- \end{pmatrix}。$$

將係數矩陣改寫如下：

$$\mathbf{M} = \mathbf{D}[\mathbf{I} + \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L} + \mathbf{U})]，$$

其中 \mathbf{D} ， \mathbf{L} ， \mathbf{U} 分別為對角線區塊矩陣、下對角線區塊矩陣及上對角線區塊矩陣：

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{12}(0) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_{22}(-h) \end{bmatrix}，$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_{12}(-h) & \mathbf{0} \end{bmatrix}， \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{M}_{22}(0) \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}。$$

如此一來，係數向量 \mathbf{c} 可改寫成

$$\mathbf{c} = [\mathbf{I} + \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L} + \mathbf{U})]^{-1} (\mathbf{D}^{-1} \mathbf{t})。$$

將反矩陣部分利用 Remann 展開式展開：

$$[\mathbf{I} + \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L} + \mathbf{U})]^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} [-\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L} + \mathbf{U})]^i，$$

此展開式成立了條件為 $-\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L} + \mathbf{U})$ 所有的特徵值落於複數平面上的單位圓內。令

$$\mathbf{R} = -\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L} + \mathbf{U})，$$

且

$$\mathbf{s} = \mathbf{D}^{-1} \mathbf{t}。$$

則待定係數

$$\mathbf{c} = (\mathbf{I} - \mathbf{R})^{-1} \mathbf{s} = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{R}^i \mathbf{s}$$

可得

$$\hat{\mathbf{s}} = \begin{pmatrix} \mathbf{s}_d \\ \mathbf{s}_u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{12}^{-1}(0) \hat{\mathbf{t}}_1 \\ \mathbf{M}_{22}^{-1}(-h) \hat{\mathbf{t}}_2 \end{pmatrix}。$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{R}_d \\ \mathbf{R}_u & \mathbf{0} \end{bmatrix}，$$

$$\mathbf{R}_d = -\mathbf{M}_{12}^{-1}(0) \mathbf{M}_{22}(0)$$

$$\mathbf{R}_u = -\mathbf{M}_{22}^{-1}(-h) \mathbf{M}_{12}(-h)。$$

如此級數展開法。名之為射線展開法。配合 Cagniard 逆積分法則即可求得暫態解。

在薄板系統表面受一點動力載荷作用的暫態問題解析。在平面波傳問題中，波遇到邊界時會有模式轉換(mode conversion)且同時產生縱波(P Wave)和橫波(S Wave)之反射波以及透射波。波的數目呈 2^N 幕次增加。亦即在此系統中，一個入射波會產生無限多的反射波及透射波。在我們以前的研究中，曾利用 2×2 矩陣的特性來處理單層板無窮多波傳遞的問題。在前面所提之射線展開法則以 4×4 矩陣成功處理了二維單層板問題。而在本計畫中擬研究二維層域系統受點波源載荷的波傳機構，其矩陣大小為 6×6 。在實驗方面，本計畫擬做一薄膜的音射實驗(acoustic emission)，來檢驗理論的正確性。並進一步利用此實驗結果，進行求解反算問題的資料。

在音射實驗方法中須要有一標準彈性波源產生器，其爬升時間必須要小；必須能有高的可重覆性以及容易產生，且訊號的結果須具有明顯之波傳特徵，本研究計劃中將使用毛細玻璃壓碎法及筆芯斷裂法來產生彈性波波源。再利用良好校準之 NBS 錐形位移感應換能器量測自由表面受彈性應力波作用之垂直位移，NBS 錐形感應換能器是由一個錐形的壓電材料以及訊號輸出的圓柱銅質後座所構成。實驗的配置如圖 1 所示，整個配置是固定在光學滑軌上，並應用一個可精確定位三軸移動平台上設立固定刀具，作為壓碎毛細玻璃管之機構，實驗時將試片固定於架上，並將 NBS 錐形位移感應換能器置試片表面，再利用三軸平台緩緩垂直上升刀具將毛細玻璃壓碎產生應力波波源，偵測點的垂直位移訊號直接由 NBS 錐形感應換能器之後座接出，送至數位類比轉換器以及示波器，並透過 GPIB 送入電腦，加以分析。

在此分別以上層材料為黃銅及壓克力，下層材料為鋁板，薄膜厚 1.5cm 之試

片受一波源函數為 $f(t)$ 之作用力為例，計算距波源 3cm 處之垂直位移場。此處 $f(t)$ 之定義如下式所示，其數值結果如圖 2 及圖 3。

$$f(t) = e^{-\alpha t} (1 - (1 - \beta t^2) e^{-\gamma t^2} \cos \chi t) H(t)$$

由實驗所得之位移圖形作反算時，如只經由單次的反算即判定材料之性質，在作法上有失偏頗。因此，為了避免反算結果誤差，對每一次實驗，均需做多次之反算以增加結果之可靠性。此處對每一次實驗均做七次反算，其中第一次反算所用的預測值中包含有一組理論參數值。此理論值乃由相關之材料書籍查表所得之材料參數，第二次至第六次反算之初始預測值則是隨機取得，第七次反算之初使預測值則是前面五次的反算結果，也是最終的反算結果。

首先，觀察第一次反算結果如圖 4 及表一所示(其預測值有一組理論值)。反算誤差並不為 0。此結果是可合理解釋的，因為實際之實驗材料參數並不一定會等於理論值，再加上雜訊等種種實驗誤差均是可能原因。此外，由圖 4 也可看出理論圖形和實驗圖形之間並非完全吻合而反算之進行乃以實驗圖形為依據。最後觀察第七次反算結果。其結果誤差並非是七次反算中最小的一次。這是因為在反算的過程中，是以實驗圖形為反算根據而非理論解。所以和理論值的誤差不一定會是最小，但是這一組的反算結果和實驗的差距一定是最小，也就是說若實驗誤差合理的話，這一組應是最接近實際值的一組。此外，由這一組的反算結果也可發現，雖然在前面幾次的反算中，有些反算結果圖形和實驗圖形已有相當大的差距，但經由放大簡單體的再次反算均可將結果拉回至一合理可信賴之值。將最後的反算結果和理論值做一比較如表二及表三所示。可發現 v 的反算誤差是所有參數中最大的。此和前面的誤差曲線分析情形相當一致。雖然在理論模擬時曾討論過 v 值之誤差可經由限制縱波和雷利波的到達時間而加以改善。

五、計畫成果自評

本研究計畫的完成，在理論方面所提出之射線展開法可突破以往波傳射線追蹤法的限制，將所有應力波包含於一簡單的級數中，在學術上有其價值與創新性，而在應用方面，則本計畫中的理論可用在以彈性波作非破壞檢測的分析，層域介質受動力作用的波傳分析，可謂相當廣泛。而在實驗方面則除了可與理論分析相互印證外，亦可發展為非破壞檢測的方法。參與本研究計畫的工作人員，除對波傳問題的理論解析深入了解外，亦需進行大量的計算工作以及實驗的設立，故可對整個波傳問題的全貌及其實際的應用有全盤的了解，本計畫的內容兼具理論與實用性，主要特點是開發較高深之理論並實際應用於實務的問題，是一個相當完整的研究計畫。

六、參考文獻

- [1] Pao, Yih-Hsing(1983), "Elastic Waves in Solids," Journal of Applied Mechanics, ASME Trans., Vol. 50, pp.1152-1164.
- [2] Achenbach, J. D. (1973), "Wave propagation in elastic solids", North-Holland publishing company, New York.
- [3] Lamb Horace (1904), "On the Propagation of Tremors over the Surface of Anelastic Solid," Philosophical Transactions of the Royal Society of London, A.203, pp.63-100.
- [4] Garvin, W. W.(1955), "Exact Transient Solution of the Buried Line Source Problem," pp.528-541.
- [5] Chao, C. C.(1960), "Dynamical Response of an Elastic Half-Space to Tangential Surface Loadings," Journal of Applied Mechanics, Vol. 27, pp.559-568.
- [6] Pekeris, C. L.(1955), "The Seismic Buried Pulse," Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., Vol. 41, pp.629-639.

- [7] Pekeris, C. L.(1955), "The Seismic Surface Pulse," Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., Vol. 41, pp.469-480.
- [8] Gakenheimer, D. C. (1970), "Numerical Results for Lamb's Point Load Problem," Journal of Applied Mechanics, ASME Trans., pp.522-524.
- [9] Mooney, Harold M. (1974), "Some Numerical Solutions for Lamb's Problem," Bull. Seismol. Soc. Am., Vol. 64, No. 2, pp.473-491.
- [10] Ceranoglu, A. N. , and Pao, Yih-Hsing (1981), "Propagation of Elastic Pulses and Acoustic Emission in a Plate," Journal of Applied Mechanics, ASME Trans., Vol. 48, pp.125-147.
- [11] Pao, Yih-Hsing, Gajewski, Ralph R. , and Ceranoglu, Ahmet N. (1979), "Acoustic Emission an Transient Waves in an Elastic Plate," J. Acoust. Soc. Am., Vol. 65, No. 1, pp.96-105.
- [12] Davids, N. (1959), "Transient Analysis of Stress-Wave Penetration in Plate," Journal of Applied Mechanics, ASME Trans., Vol. 26, pp.651-660.
- [13] Miklowitz, J. (1962), "Transient Compressional Waves in an Infinite Elastic Plate or Elastic Layer Overlying a Rigid Half-Space," Journal of Applied Mechanics, ASME Trans., pp.53-60.
- [14] Alterman, Z. , and Karal, F. C. ,Jr.(1968), "Propagation of Elastic Waves in Layered Media by Finite Difference Method," Bull. Seismol. Soc. Am., Vol. 58, No. 1, pp.367-398.
- [15] Norwood, F. R. (1975), "Transient Response of an Elastic Plate to Loads With Finite Characteristic Dimensions," Int . J. Solids Structure, Vol. 11, pp.33-51.

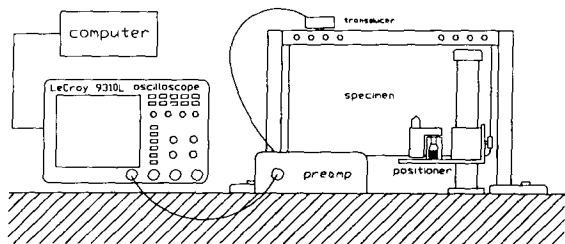


圖 1 音射實驗設備圖

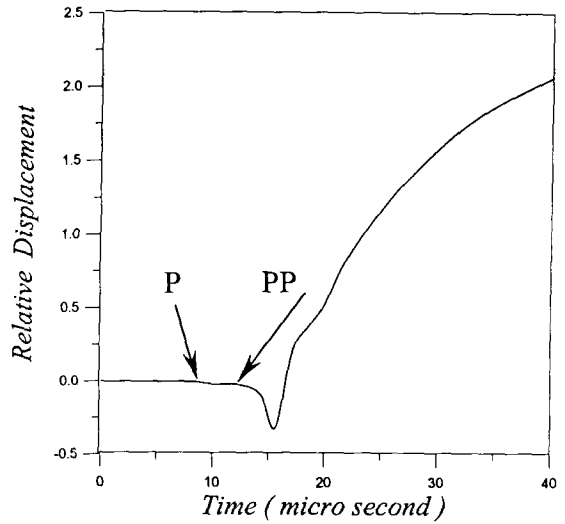


圖 2 二維薄膜黃銅接合鋁板位移場圖

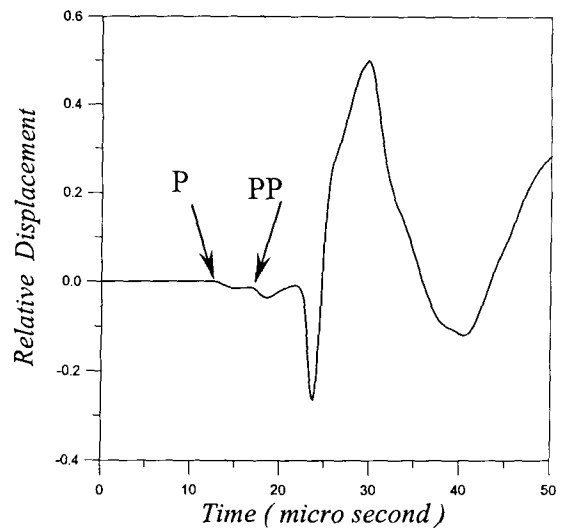


圖 3 二維薄膜壓克力接合鋁板位移場圖

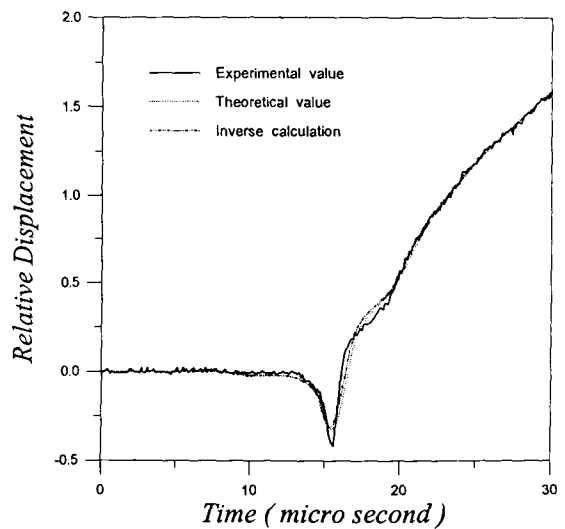


圖 4 二維薄膜實驗第一次反算結果(黃銅接合鋁板)

	ν	ρ (kg/m ³)	E (GPa)	h (mm)	C_L (m/sec)	C_T (m/sec)	C_R (m/sec)	
Initial guess value	1	0.34	8512	110	14.8	4459.9	2195.9	2049.9
	2	0.41	7280	85	24.0	5209.8	2034.8	1919.9
	3	0.25	9140	96	13.5	3550.2	2049.7	1884.5
	4	0.42	9930	108	19.2	5269.2	1956.9	1849.2
	5	0.30	7120	117	34.1	4703.3	2514.0	2331.5
Inverse calculation	0.377	8341.2	112.1	14.7	4971.6	2209.1	2074.2	
Theoretical value	0.34	8512	110	14.8	4459.9	2195.9	2049.9	
Error(%)	10.9	2.00	1.9	0.67	11.5	0.63	1.19	

表一 二維薄膜實驗第一次反算結果(黃銅接合鋁板)

	ν	ρ (kg/m ³)	E (Gpa)	h (mm)	C_L (m/sec)	C_T (m/sec)	C_R (m/sec)
1st	0.377	8341.2	112.1	14.7	4971.6	2209.1	2074.2
2nd	0.330	8027.9	105.7	14.2	4416.8	2224.8	2073.6
3rd	0.368	8322.5	112.0	14.9	4852.8	2217.8	2079.5
4th	0.279	8946.6	117.9	18.5	4099.5	2269.7	2097.5
5th	0.376	9718.2	132.8	17.9	4998.8	2228.3	2091.9
6th	0.312	8196.6	108.2	15.7	4290.7	2242.9	2084.3
7th	0.371	8350.2	112.2	14.9	4888.1	2213.7	2076.6

表二 二維薄膜黃銅接合鋁實驗反算結果

	ν	ρ (kg/m ³)	E (Gpa)	h (mm)	C_L (m/sec)	C_T (m/sec)	C_R (m/sec)
Inverse calculation	0.371	8350.2	112.2	14.9	4888.1	2213.7	2076.6
Theoretical value	0.340	8512.0	110.0	15.0	4456.0	2196.0	2050.0
Error (%)	9.03	1.90	2.21	0.70	9.69	0.81	1.30

表三 二維薄膜黃銅接合鋁實驗最終反算結果