

行政院國家科學委員會專題研究計畫成果報告

空氣阻力對肥皂膜實驗影響之理論研究

Theoretical Investigation of the Effects of Air Drag on the Soap Film Flows

計畫編號：NSC 90-2212-E-002-185

執行期限：90年8月1日至91年7月31日

主持人：黃美嬌 執行機構及單位名稱：臺灣大學機械系

一、中文摘要

本計畫從理論及數值兩方面去了解空氣阻力在肥皂膜流場中所扮演的角色。在理論方面，運用邊界層假設及積分分析法，我們可得到流場行為與實驗室所量測到的結果相近之理論模型解；在空氣阻力的影響下，板上邊界層成長相當緩慢，使得平行板間的速度分佈幾乎是均勻的，此點相當有利於實驗室設計實驗。另外，在重力及空氣阻力同時影響下，肥皂膜流場沿下游有加速減緩現象，但在合理的實驗測試長度下，仍未能達到終端速度。在模擬方面，由於目前數值技巧仍無法成功模擬同時具有牆及自由面之三維流場，因此改為模擬具自由面之二維流場。模擬結果大致與理論預測相同。研究結果傾向建議：若必欲利用空氣阻力來平衡重力達到終端速度，應將肥皂膜置於兩平行玻璃板間，調整玻璃板間距以獲得足夠的空氣阻力。

關鍵詞：空氣阻力、邊界層、終端速度

Abstract

In this project, we tried to understand theoretically as well as numerically the importance of air drag effect on the soap-film flows. In use of the boundary layer theory and the integral analysis, we have succeeded in building a model which behaves similarly to the flows observed in the lab. Under the influence of air drag, it is observed that the boundary layer on the soap film grows very slowly, resulting in a preferred, nearly uniformly distributed velocity profile across the soap-film channel. On the other hand, although the air drag can significantly reduce the gravity effect, it is impossible to obtain a terminal velocity in a reasonably long soap-film channel. The simulation results agree with all these theoretical predictions qualitatively.

Keywords: Air Drag, Boundary Layer, Terminal Velocity

二、緣由與目的

肥皂膜流場在物理特性上相當近似於二維(2D)流場，因膜的厚度大約只有 $1\mu\text{m}\sim 10\mu\text{m}$ ，故可忽略了第三個維度方向，也因此提供了學習二維流體動力學的一個實驗方法。且與其他二維實驗方法比較起來，例如以旋轉方式(Hopfinger et al.[1])或由磁力的方式(Sommeria、Moreau [2])產生 anisotropy 來抑制住第三維方向運動的實驗等，肥皂膜流場實驗技巧除了簡易和經濟的優點之外，其流場更可以由目視直接觀察，而不需借用任何光學干涉儀器(Optical Interference、Shadowgraphing、Dye Methods、Particle Decoration 等)，可說相當的便利。然而，肥皂膜流場並非完美的二維流場，如表面張力、壓縮性、膜厚度變化、空氣阻力等都可能造成第三個維度的效果；其中以空氣阻力最為明顯。過去的研究大多著重在實驗量測，但少有理論分析。最早 Couder et al[3] 曾針對表面張力、黏滯力、及空氣阻力之影響提出簡易的數學模式，推導適合描述肥皂膜流場的統御方程式。Rutgers et al[4][5]有較完整的理論估算空氣阻力大小，但仍不夠完整，而且不是十分地正確。為此，本計畫希望就空氣阻力、黏滯力、壓力梯度和重力的交互影響，試圖正確並完整地建立起肥皂膜速度變化、膜厚度變化、以及邊界層成長等的理論模型。並且希望藉著理論預測、模擬與實驗結果的比較與討論，徹底了解空氣阻力在整個流場中的重要性。

三、結果與討論

在理論方面，我們分兩種情形來討論。

(a) 空氣管流模型：即肥皂膜置於兩玻璃板間。假設肥皂膜無窮大時，可將流場簡化為二維，此二維流場具有完全發展解析解為：

$$\begin{aligned} \frac{u_w(z)}{U_{in}} &= \frac{1}{2} H^2 \text{Re}_w \left(\frac{dp}{dx} \right) \left\{ \left(\frac{z^2}{H^2} - \frac{h^2}{H^2} \right) + \frac{\mu_w}{\mu_a} \left(\frac{h^2}{H^2} - 1 \right) \right\} \\ &+ \frac{1}{2} H^2 \text{Re}_w \text{Fr}^{-2} \left\{ \left(\frac{h^2}{H^2} - \frac{z^2}{H^2} \right) - \frac{\rho_a \mu_w}{\rho_w \mu_a} \left(\frac{h^2}{H^2} - 1 \right) \right. \\ &\left. + 2 \left(\frac{\rho_a}{\rho_w} - 1 \right) \frac{\mu_w}{\mu_a} \left(\frac{h^2}{H^2} - \frac{h}{H} \right) \right\} \\ \frac{u_a(z)}{U_{in}} &= \frac{1}{2} \frac{\mu_w}{\mu_a} \cdot H^2 \text{Re}_w \left(\frac{dp}{dx} \right) \left\{ \frac{z^2}{H^2} - 1 \right\} \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\mu_w \rho_a}{\mu_a \rho_w} \cdot H^2 \text{Re}_w \text{Fr}^{-2} \left\{ \left(1 - \frac{z^2}{H^2} \right) \right. \\ &\left. + 2 \left(1 - \frac{\rho_w}{\rho_a} \right) \frac{h}{H} \left(\frac{z}{H} - 1 \right) \right\} \end{aligned}$$

其中 U_{in} 為膜入口截面平均速度， u 為速度， h 為膜厚度， $2H$ 為玻璃板間距， Re 及 Fr 分別為 Reynolds number 及 Froude number。下標 a 或 w 分別指空氣或膜溶液性質。此速度場滿足動量守恆方程式暨所有相關邊界條件。最後壓力梯度可由流量換算，而膜厚度則藉由壓力梯度連續(不考慮表面張力)來獲得，見圖一。當玻璃板極靠近膜時，空氣阻力很大，流場除了重力外，尚必須發展出順壓來平衡之；反之，當玻璃板置於遠處時，壓力梯度為逆壓且愈來愈小，重力與空氣阻力可達平衡，見圖二。此部分研究結論是實驗室可將肥皂膜置於兩玻璃板間以產生足夠的空氣阻力來平衡重力。然而，此結果只適用於當流場測試段已達完全發展時；如若不然，則空氣模擬應採下述之邊界層模型。

(b) 空氣邊界層模型：此處我們分析的是三維流場。為降低問題的困難度，我們採用積分分析法。首先將流場分割為四塊：膜上邊界層內、邊界層外、邊界層內上方空氣、及邊界層外上方空氣。分區進行動、質量守恆後，再假設每一區內無因次速度分佈皆為二次多項式，最後可得：

$$\delta_x = 3(V_f h - 1) / V_f h$$

$$\frac{dV_f}{dy} = \frac{1}{(\text{Fr})^2} \frac{1}{V_f} - \frac{4}{\text{Re}_a} \frac{\rho_a W}{\rho_f h_0 \delta_z h}$$

$$\frac{dh}{dy} = \frac{4}{\text{Re}_a} \frac{\rho_a W (4 - 3V_f h)}{\rho_f h_0 \delta_z h V_f^2} + \frac{1}{2(\text{Fr})^2} \frac{(7 - 9V_f h)}{V_f^3} + \frac{5}{3\text{Re}_f} \frac{h^2}{(V_f h - 1)}$$

$$\frac{d\delta_z}{dy} = \frac{10}{\text{Re}_a} \frac{1}{V_f \delta_z} + \frac{3}{(3 - 2V_f h)} \frac{\delta_z}{h} \frac{dh}{dy} - \frac{(3 - 4V_f h)}{(3 - 2V_f h)} \frac{\delta_z}{V_f} \frac{dV_f}{dy}$$

初始條件為在 $y=0$ 處， $V_f = h = 1$ ， $\delta_x = \delta_z = 0$ ，其中 V_f 為肥皂膜上勢流場速度， δ_x, δ_z 分別為肥皂膜及空氣邊界層厚度。圖三為速度隨下游變化情形，並與 Rutgers et al[4][5]的實驗數據相比較，結果相當接近；與無空氣阻力情況(上方三條曲線)相比，可以看出重力已被有效地抵銷掉。然而終端速度是否存在呢？圖四顯示非常下游處速度變化情形。雖然愈下游處膜愈薄(重力愈小)，空氣阻力也因邊界層愈長愈厚而變小，因此始終無法完全平衡重力，速度也就繼續緩慢成長。圖五是膜上邊界層厚度隨下游變化情形。可以看到在空氣阻力的影響下，邊界層成長相當緩慢，也就是說膜管道內速度分佈幾乎是均勻分佈，此點應該相當有利於實驗室進行實驗。

在模擬方面，由於目前數值技巧尚無法處理同時具有牆及自由面之三維流場；具自由面之二維流場在兩種流體密度比太高(水和空氣的密度比約 1000)或加速太大時，也會有數值不穩定的困擾。因此我們做了以下的模擬設計。

(a) 空氣管流模型：圖六顯示密度比不同時，作用於膜的幾種不同力在出口處的關係。實線是完全發展時的結果，符號則是模擬結果。圖中顯示重力大致上是由空氣阻力及逆壓平衡掉；密度比愈大時，空氣阻力愈重要。圖七為密度比等於 5 時，各種力隨下游的變化情形。可以看出 1m 長的管道大約已可達到完全發展；密度比愈大，達到完全發展所需的長度愈大。

(b) 空氣邊界層模型：圖八為無重力狀態下，密度比 50~300 的模擬結果。可以看出空氣阻力的影響相當小，且密度比愈大影響愈小。當密度

比很大時，肥皂膜對空氣而言應該類似於一以固定速度移動之平板。

四、計畫成果自評

空氣阻力對肥皂膜流場之影響，或多或少我們都有一些物理上定性的了解與定量的預測，合理的理論模型已成功建立起來。然而在實際應用時，由於流場管道內還會放置物件以製造剪流，流場將變得相當複雜，空氣阻力幾乎無法預測了。實際應用時的空氣阻力卻非本計畫的研究範圍；本計畫旨在了解空管道時空氣阻力的影響有多大，以及在空氣阻力的影響下管內是否可形成均勻速度分佈，甚至是終端速度，以提供良好的測試環境進行實驗。這一部分的預定研究目標已完成。

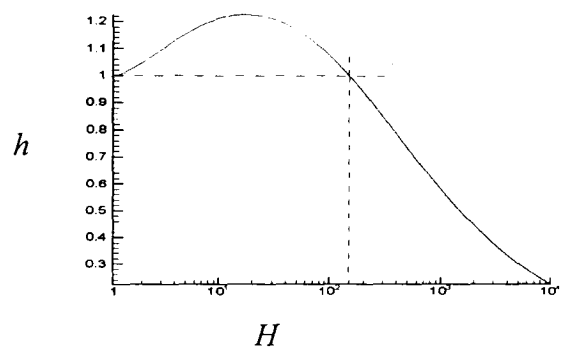
關於模擬方面，則因液氣介面變化可以相當複雜，又缺乏接觸力與表面張力的適當模型，使得其模擬變得極為不穩定。原希望藉由圓柱渦漩模擬的量測，藉以預測肥皂膜黏滯係數，這一部分的預定目標也就無法完成。不過，透過調整密度比及外加玻璃板，我們仍能從模擬中獲得一些輔助資訊。

本計畫成果應可讓相關實驗家更放心肥皂流場管道內的均勻性以及控制空氣阻力來間接控制流場。研究成果也相當具有學術價值，目前已投稿有會議論文一篇。未來在蒐集更多、更合適實驗數據(量測中)以比對後，將修改為期刊論文。

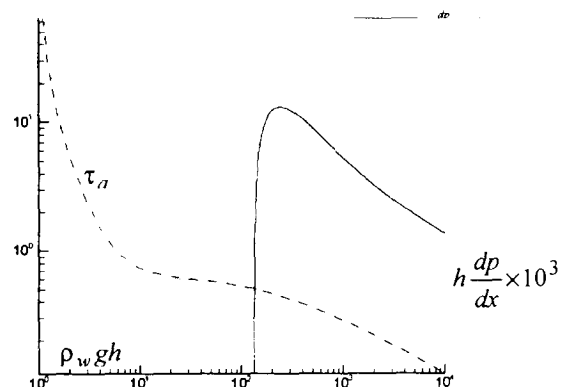
五、參考文獻

- [1] Hopfinger, E. J., Browand, F. K. and Gange, Y., "Turbulence and waves in a rotating tank", J. Fluid Mech. **125**, 505(1982)
- [2] Sommeria, J. and Moreau, R., "Why, how, and when, MHD turbulence become two-dimension", J. Fluid Mech. **118**, 507(1982)
- [3] Couder, Y., Chomaz, J. M., and Rabaud, M., "On the hydrodynamics of soap film", Physica D **37**,384(1989)

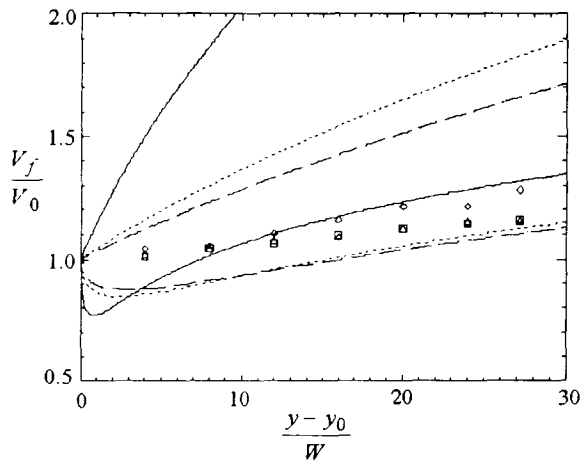
- [4] Rutgers, M. A., Wu, X-I, Bhagavatula, R., Petersen, A. A., Goldburg, N. I., "Two-dimensional velocity profiles and laminar boundary layers in flowing soap film", Phy. Fluids **8**, 2847(1996)
- [5] Rutgers, M. A., Wu, X. L., "Conducting Fluid Dynamics Experiments with Vertically Falling Soap Films", Sub. Phy. Fluids(1997)
- [6] 陳俊宇, "空氣阻力對薄膜流場的影響", 國立臺灣大學機械工程研究所碩士論文, 九十一年元月。
- [7] 李怡樵, "肥皂膜流場空氣阻力影響之理論研究", 國立臺灣大學機械工程研究所碩士論文, 九十一年六月。
- [8] 李怡樵、黃美嬌, "肥皂膜流場空氣阻力影響之理論研究", submitted to 第十九屆機械工程研討會, 九十一年十一月二十九日~三十日。



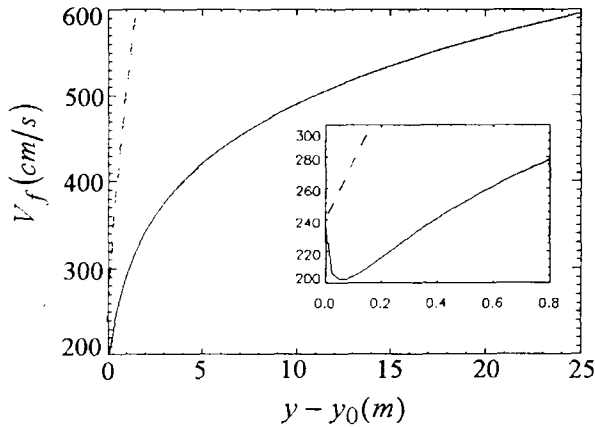
圖一、膜厚度 h 對玻璃板間距 H 曲線
($Re_w = 9.962$ 、 $Fr = 258.569$)



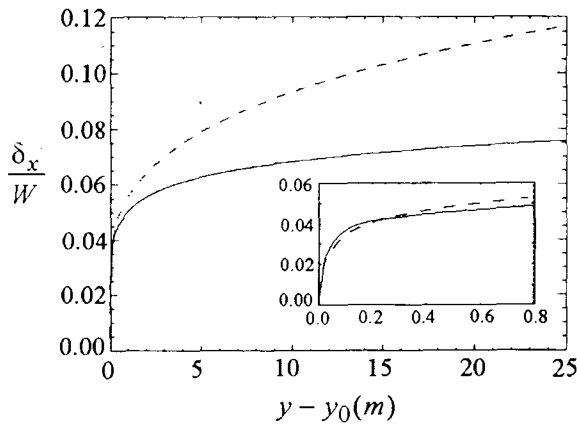
圖二、空氣剪力、壓力和重力對 H 的曲線圖



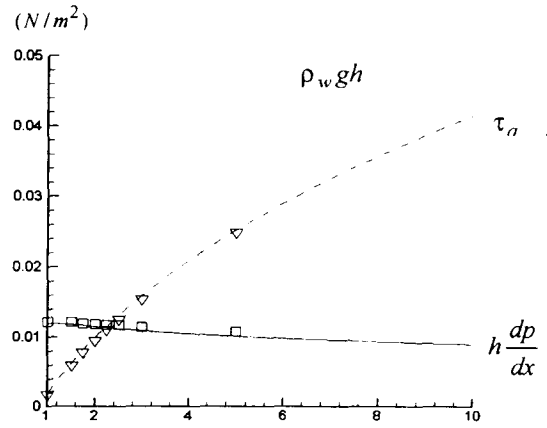
圖三、理論模型結果與實驗數據比較。實線及菱形符號為 $V_0 = 125 \text{ cm/s}$ 、點線及三角形符號為 $V_0 = 238 \text{ cm/s}$ 、虛線及正方符號為 $V_0 = 275 \text{ cm/s}$



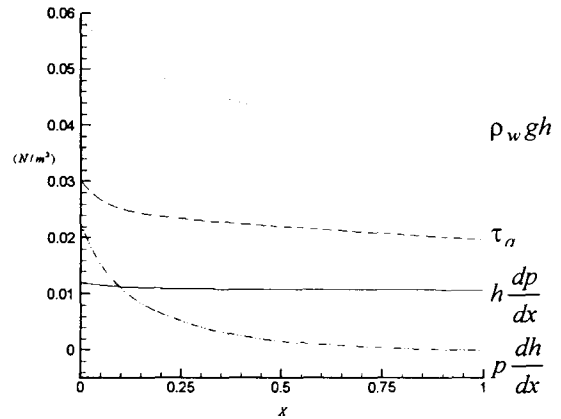
圖四、初速 238 (cm/s) 、厚度 $4 \mu\text{m}$ 時，非常下游處速度曲線。右下方小圖為上游 80 cm 處。虛線為不考慮空氣阻力時情形。



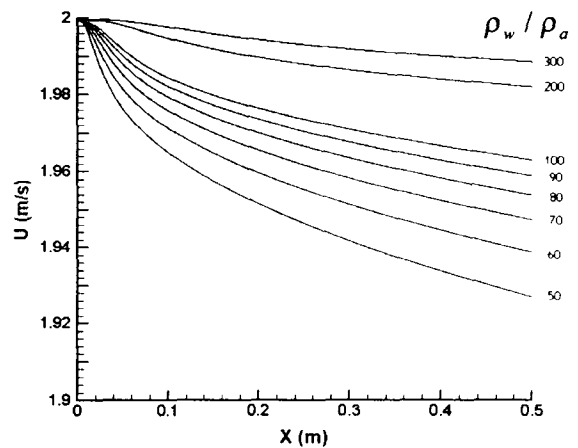
圖五、初速 238 (cm/s) 、厚度 $4 \mu\text{m}$ 時，膜邊界層變化曲線。 $2W$ 為膜管道寬度。



圖六、空氣剪力 τ_a 、壓力和重力對密度比



圖七、密度比 5.0 ，空氣剪力、壓力和重力隨下游距離 x 的變化圖



圖八、不同密度比對稱面速度 U 隨下游距離 x 的變化圖