

# 應用電子斑點干涉術量測平板振動及 反算材料常數

黃吉宏\*

馬劍清\*\*

中華民國 台北市  
國立台灣大學  
機械工程研究所

## 摘 要

本文應用振幅變動法電子斑點干涉術 (AF-ESPI) 以實驗量測等向性平板的共振頻率與振型，並利用量測所得之振頻，反算等向性材料之材料常數，文中分別以圓形及方形兩種平板，在周邊自由之邊界條件下，作為理論及實驗之探討，最後並利用超音波檢測及有限元素法計算來加以佐證。利用光學的電子斑點干涉術做為物體振動量測之特點，在於獲得振頻的同時，亦可得到其對應之振型的全場圖。文中以鋁材及玻璃兩種材料為例，比較其實驗結果與數值計算，可發現其具有相當良好的一致性，也說明應用本文所提出的 ESPI 光學實驗以求材料常數是一個可行的方法。

關鍵詞：電子斑點干涉術、振動、反算。

## 一、前 言

近十多年來，以雷射為基礎的光學干涉方法如全像干涉術 (holographic interferometry)、剪切干涉術 (shearography)、疊紋干涉術 (moire interferometry) 與斑點干涉術 (speckle interferometry) 等已廣泛地應用在量測技術上。其中的電子斑點干涉術 (electronic speckle pattern interferometry, ESPI) 因數位影像技術與電腦科技的進步，避免了其它傳統干涉術須沖洗底片的費時與不方便，而且可提供即時、全場與非接觸式的量測，因此電子斑點干涉術 (ESPI) 幾乎已成為光學量測方法的主流。

電子斑點干涉術首先於 1971 年由 Butters and Leendertz [1] 所提出，是一種不需要使用傳統全像攝影技術而能記錄干涉訊號的光學技術，主要是使用電視照像機與電子處理技術來記錄低空間頻率 (Low Spatial Frequency) 全像圖，而不必應用到底片來記錄，記錄在記憶體中的電視

影像和全像底片所記錄的幾乎一樣，故電子斑點干涉術與全像術最主要的不同點是系統的架設及資料的處理方式 [2,3]。自此之後，就不斷地有學者投入心力在 ESPI 的理論基礎與實際量測的最佳化研究上。像 Slettemoen [4]、Jones and Wykes [5,6] 等人，對相關的理論、光源及如何取得最佳的對比條紋問題，都有深入的研究與探討。而後陸續不少的學者將 ESPI 應用到實際的量測與檢測上。如 Wykes [7] 將 ESPI 應用到量測靜態和動態的表面位移；Moore and Tyrer [8] 利用極化分光鏡與兩組取像系統同時量測全場的面內位移；馬劍清和陳錫釗 [9] 也對複材層板作過面外和面內位移的探討。在破壞力學方面，Maji、Wang and Lovato [10] 對試片斷口作過量測；Moore and Tyrer [11] 使用 ESPI 的干涉條紋去計算應力強度因子與 J 積分。在非破壞檢測 (NDT) 方面，Butters [12] 即以 ESPI 應用到焊接及接合缺陷之檢測上；Løkberg and Malmo [13] 應用 ESPI 對複合材料之缺陷作過檢測；Stetson and

\* 研究生      \*\* 教授

Brohinsky [14] 亦將 ESPI 運用到振動的 NDT 上，Paoletti *et al.*, [15] 甚至把 ESPI 應用到對中古世紀美術品的檢測和修補上。在其它應用方面，Aswendt *et al.*, [16] 對熱應力下的金屬陶瓷材料，研究其變形行為，並計算等效熱膨脹係數。Deaton *et al.*, [17] 將長距離顯微鏡配合麥克森干涉儀加入 ESPI 架設中，用來量測微小懸臂梁之變形。

在 ESPI 的振動研究方面，最傳統的方法是使用時間平均法 (time-average method) [6]，此種技術是直接對振動物體連續存取影像，再使用電子線路對影像作高通濾波 (high-pass filter) 與整流 (rectification) 處理，所得到的條紋干涉圖由零階貝索函數 (zero-order Bessel function) 所控制。後來 Løkbjerg [18] 提出參考光相位調變技術 (reference beam phase modulation)，可決定振動條紋的位移大小與相位；Høgmoe and Løkbjerg [19] 曾由此法來量測和檢測微小振動；Shellabear 與 Tyrer [20] 則使用時間平均法對實際結構作面外及面內的三維振動量測。此外，對於振動模態的量測亦可用時間平均相減法 [21]，即如同靜力量測一般，將受力振動後的影像連續與未振動前的參考影像相減而得。Pouet *et al.*, [22] 改良此法，利用即時更新參考影像之技術來降低環境雜訊 (noise) 的影響。1996 年，Wang *et al.*, [23] 提出振幅變動法 (amplitude-fluctuation ESPI)，以振動時的影像即時相減得到干涉條紋並對含缺陷的複合材料振動作面外量測分析。1998 年，Ma and Huang [24] 推廣振幅變動法作三維物體的振動量測，並同時涵蓋面內及面外位移。

此外，在平板振動的研究方面，則已有百年以上悠久的歷史，不論是在理論架構、數值分析或是實驗方式上，皆已具備相當完整且豐富之成果。若就近年來的研究而論，Leissa [25] 利用特徵方程式 (characteristic equations) 針對各種邊界條件及不同尺寸之方板作探討；Gorman [26] 利用重疊法 (superposition) 分析周邊自由方板的模態；Irie *et al.*, [27] 基於 Mindlin 平板理論，探討圓板之振頻；Kyösti *et al.*, [28] 分別使用全像干涉術、電子斑點術、衝擊模態分析法及有限元素法，以分析單邊部份固定之方板的振頻及振型。Dickinson [29] 使用 Rayleigh's method 探討正交性層板的振動行為；Spilker *et al.*, [30] 則

應用有限元素法對複材層板的振動進行分析。而有關以振動資料來反算材料性質的研究，最早有 Zelenev [31] 和 Wolf [32] 用在反算等向性的材料上；Deobald 及 Gibson [33] 利用模態自然頻率與 Rayleigh-Ritz method 決定特殊正交性層板的四個彈性常數；Marchand [34] 利用自由振動法，在 Mindlin 平板理論假設下，反算等向性圓板之材料常數。以上所述之研究皆是以模態分析來取得共振頻率，且使用靈敏度矩陣進行疊代或是線性統計之方式以求得材料常數，此種方法雖可獲得反算所需之振頻資料，但卻無法同時得到相對應之振型，而僅能由振頻及其模態參數加以判斷。

在本文中我們利用振幅變動法電子斑點干涉術量測周邊自由圓板及方板的共振行為，此法之優點在於可同時獲得振頻及振型的干涉條紋全場圖，而無須擔心會有錯置 (mismatching) 之情形。將實驗所得之振頻代入模態特徵值  $\lambda^2$  與蒲松氏比  $\nu$  之關係式中聯立求解，便可得到等向性材料之  $E$ 、 $\nu$  值。最後我們將反算所得之材料常數，經由有限元素法之計算，亦可正算得其振頻及振型，再與實驗結果比較之下，發現兩者相當一致；本文亦同時應用超音波量測材料常數，其結果亦與光學量測反算所得相近，因此可說明了光學量測方法的優越性及此種反算方式之正確性。

## 二、光學架設與理論推導

### 2.1 光學架設

如圖 1 所示為一面外 (out-of-plane) 位移量測的光學架設，雷射光經由分光鏡分成兩道光：一為物光，其路徑為經空間濾波器，直接照射於待測物體表面上。另一道光為參考光，其路徑為經反射鏡及空間濾波器後，藉由參考平板及分光鏡之反射，直接進入 CCD 相機之感光平面，如此可使物光與參考光同軸入射，而在相機之感光平面上互相干涉，形成光斑場。此一光斑場再經由相機的像元陣列取像，由影像卡將此類比訊號轉成數位訊號，並顯示於電腦螢幕上。在此架設中，我們使用參考平板之目的在於製造一光斑式參考光 (speckled reference beam)，如此能夠簡化傳統 ESPI 架設的複雜性。

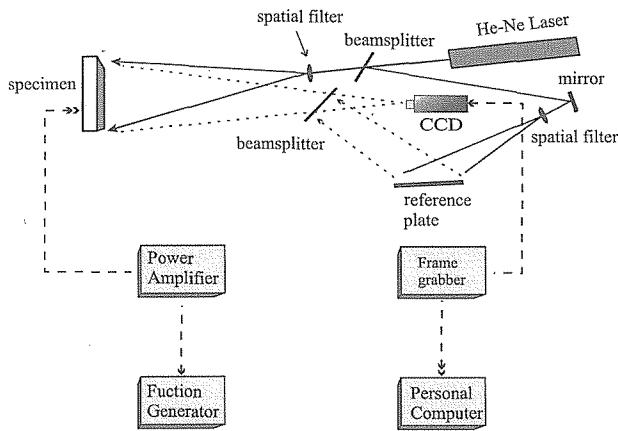


圖 1 面外位移振動量測的光學架設與系統

## 2.2 理論推導

振幅變動法電子斑點干涉術 (amplitude fluctuation ESPI) 首先由 Wang *et al.*, [23] 所提出, 其光學架設方式與傳統相減法相同, 不同的僅在於參考影像之擷取時機, 傳統相減法是在物體振動前, 即靜止狀態下記錄參考影像, 而振幅變動法則是在物體振動之狀態下記錄參考影像。

首先於試片振動時, 存取一張影像作為參考, 而其光強度可表示如下

$$I_1 = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \left\{ I_o + I_r + 2\sqrt{I_o I_r} \cos \left[ \phi + \frac{2\pi}{\lambda} (1 + \cos \theta) A \cos \omega t \right] \right\} dt \quad (1)$$

其中  $\tau$  : CCD 取像時間

$I_o$  : 物光光強

$I_r$  : 參考光光強

$\phi$  : 參考光與物光之相位差

$\theta$  : 物光與觀測方向之夾角

$A$  : 振幅,  $\omega$  : 角頻率

若令  $\Gamma = \frac{2\pi}{\lambda} (1 + \cos \theta)$ , 且先討論(1)式中的積

分項, 則

$$\begin{aligned} & \int_0^\tau \cos[\phi + \Gamma A \cos \omega t] dt \\ &= \text{Re} \left\{ \int_0^\tau \exp[i\phi + i\Gamma A \cos \omega t] dt \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \text{Re} \left\{ e^{i\phi} \int_0^\tau \sum_{-\infty}^{\infty} J_n(\Gamma A) e^{in(\frac{\pi}{2} - \omega t)} dt \right\} \\ &= \text{Re} \left\{ e^{i\phi} \sum_{-\infty}^{\infty} J_n(\Gamma A) e^{in\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-in\omega\tau} - 1}{-in\omega} \right\} \quad (2a) \end{aligned}$$

若  $\tau = \frac{2m\pi}{\omega}$ ,  $m \in N$ , 則除非  $n = 0$ , 否則其值為 0, 故(2a)式可得以下之結果

$$\int_0^\tau \cos[\phi + \Gamma A \cos \omega t] dt = \tau (\cos \phi) J_0(\Gamma A) \quad (2b)$$

因此參考影像之光強度  $I_1$  為

$$I_1 = I_o + I_r + 2\sqrt{I_o I_r} (\cos \phi) J_0(\Gamma A) \quad (3)$$

經過整流後則可表為

$$I_1 = I_o + I_r + 2\sqrt{I_o I_r} |(\cos \phi) J_0(\Gamma A)| \quad (4)$$

於試片振動過程中, 繼續存取第二張影像, 而且假設振幅做了  $\Delta A$  之變化, 則此時之光強度為

$$I_2 = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \left\{ I_o + I_r + 2\sqrt{I_o I_r} \cos[\phi + \Gamma(A + \Delta A) \cos \omega t] \right\} dt \quad (5)$$

先討論

$$\begin{aligned} & \int_0^\tau \cos[\phi + \Gamma(A + \Delta A) \cos \omega t] dt \\ &= \text{Re} \left\{ e^{i\phi} \int_0^\tau \exp[i\Gamma(A + \Delta A) \cos \omega t] dt \right\} \\ &= \text{Re} \left\{ e^{i\phi} \int_0^\tau \exp[i\Gamma A \cos \omega t] \exp[i\Gamma \Delta A \cos \omega t] dt \right\} \quad (6a) \end{aligned}$$

對  $\exp[i\Gamma \Delta A \cos \omega t]$  做泰勒級數展開, 即令

$$\begin{aligned} \exp[i\Gamma \Delta A \cos \omega t] &= 1 + (i\Gamma \Delta A \cos \omega t) \\ &\quad + \frac{1}{2!} (i\Gamma \Delta A \cos \omega t)^2 + \dots \end{aligned}$$

忽略三次以上之高次項, 且代入(6a)式並作積分, 可得

$$\int_0^\tau \cos[\phi + \Gamma(A + \Delta A) \cos \omega t] dt = \tau \left[ 1 - \frac{1}{4} \Gamma^2 (\Delta A)^2 \right] J_0(\Gamma A) \quad (6b)$$

故(5)式可表示如下

$$I_2 = I_o + I_r + 2\sqrt{I_o I_r} (\cos \phi) \left[ 1 - \frac{1}{4} \Gamma^2 (\Delta A)^2 \right] J_0(\Gamma A) \quad (7)$$

經過整流後則可表為

$$I_2 = I_o + I_r + 2\sqrt{I_o I_r} \left| (\cos \phi) \left[ 1 - \frac{1}{4} \Gamma^2 (\Delta A)^2 \right] J_0(\Gamma A) \right| \quad (8)$$

若將第二張影像與第一張之參考影像作相減，亦即(8)式與(4)式相減，則可得到干涉影像之光強度為 (Ma and Huang [24])

$$I_2 - I_1 = 2\sqrt{I_o I_r} \left| (\cos \phi) \frac{1}{4} \Gamma^2 (\Delta A)^2 J_0(\Gamma A) \right| \\ = \frac{\sqrt{I_o I_r}}{2} \left| (\cos \phi) \Gamma^2 (\Delta A)^2 J_0(\Gamma A) \right| \quad (9)$$

由(9)式可觀察得知相減後之影像亮、暗紋主要是由  $|J_0(\Gamma A)|$  所控制。

雖然使用振幅變動法與傳統相減法皆可獲得振型的干涉條紋，但因為參考影像記錄的方式不同，造成兩者的干涉條紋由不同之函數型式所主導，振幅變動法是由  $|J_0(\Gamma A)|$  所調變，而傳統相減法則是由  $|J_0(\Gamma A) - 1|$  所調變，若將  $|J_0(\Gamma A)|$  與  $|J_0(\Gamma A) - 1|$  對  $\Gamma A$  作圖 (如圖 2 所示)，則可發現有下列幾點差異：(1) 因為振幅變動法所得之干涉條紋明暗由  $|J_0(\Gamma A)|$  所調變，故其節線 (nodal lines) 為干涉條紋中之最亮紋，而傳統相減法其影像亮暗紋由  $|J_0(\Gamma A) - 1|$  調變，所以節線顯示為

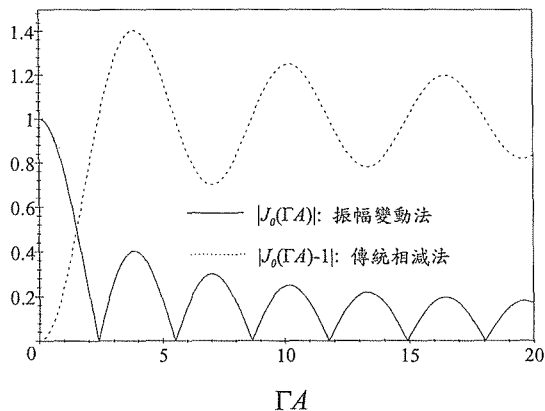


圖 2  $|J_0(\Gamma A)|$  與  $|J_0(\Gamma A) - 1|$  之比較

暗紋。(2) 在相同的振幅條件下，應用振幅變動法所得之條紋數較傳統相減法之條紋數為多，大致而言，前者約為後者的二倍左右，也就是說前者對位移的靈敏度 (sensitivity) 較後者為高。(3) 根據條紋鑑別率 (fringe visibility) 的定義： $V = (I_{\max} - I_{\min}) / (I_{\max} + I_{\min})$ ，由圖 2 可看出振幅變動法的鑑別率較傳統相減法為高。

### 三、等向性平板振動分析

對於一般平板，若不考慮其剪力變形 (shear deformation) 及旋轉慣性矩 (rotatory inertia)，亦即符合古典平板理論 (classical plate theory) 條件下，其側向位移  $w$  之統御方程式可表示如下：

$$D \nabla^4 w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (10)$$

$$D = \frac{E h^3}{12(1 - \nu^2)} \quad (11)$$

其中  $D$  為撓曲剛度 (flexural rigidity)， $\rho$  為密度， $h$  為板厚， $E$  為彈性係數， $\nu$  為蒲松氏比 (Poisson ratio)。

若只考慮自由振動之情況，則其側向位移  $w$  可進而表示為

$$w = W e^{-i\omega t} \quad (12)$$

其中  $\omega$  表示角頻率，而  $W$  為僅與位置有關之位移函數。

將(12)式代入(10)式，則可得

$$\nabla^4 W - \beta^4 W = 0 \quad (13)$$

其中 
$$\beta^4 = \frac{\omega^2 \rho h}{D} \quad (14)$$

#### (1) 圓板振動分析

若採用極座標  $(r, \theta)$  描述其運動，且將位移函數  $W$  表示如下 [35,36]

$$W(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} W_n(r) \cos n \theta + \sum_{n=0}^{\infty} W_n^*(r) \sin n \theta \quad (15)$$

將(15)式代入(13)式，則可重寫其形式如下

$$\begin{aligned}
 W(r, \theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} [A_n J_n(kr) + B_n Y_n(kr) + C_n I_n(kr) + D_n K_n(kr)] \cos n\theta \\
 &+ \sum_{n=0}^{\infty} [A_n^* J_n(kr) + B_n^* Y_n(kr) + C_n^* I_n(kr) + D_n^* K_n(kr)] \sin n\theta
 \end{aligned} \quad (16)$$

其中  $J_n, Y_n$  分別為第一及第二類貝索函數 (Bessel function)； $I_n, K_n$  分別為第一及第二類修正貝索函數 (modified Bessel function)； $A_n, B_n, \dots, D_n^*$  為與振型有關之常數，而這些常數可由邊界條件決定之。

在此需注意的是：若將極座標之原點置於圓板之中心，而且此圓板之邊界條件具有對任一直徑方向對稱之特性，則(16)式可簡化如下

$$W(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} [A_n J_n(kr) + C_n I_n(kr)] \cos n\theta \quad (17)$$

至此由(12)，(17)兩式可列出側向位移  $w$  之表示式

$$w(r, \theta, t) = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} [A_n J_n(kr) + C_n I_n(kr)] \cos n\theta \right\} e^{-i\omega t} \quad (18)$$

對於半徑為  $R$  之周邊自由 (circumferential free) 圓板而言，在  $r = R$  處之邊界條件為

$$\begin{aligned}
 M_r &= -D \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right] = 0 \\
 M_\theta &= -D \frac{\partial}{\partial r} [\nabla^2 w] = 0
 \end{aligned} \quad (19)$$

將(18)式代入(19)式，便可得其特徵方程式

$$\begin{aligned}
 \frac{\lambda^2 J_n(\lambda) + (1-\nu) [\lambda J_n'(\lambda) - n^2 J_n(\lambda)]}{\lambda^2 I_n(\lambda) - (1-\nu) [\lambda I_n'(\lambda) - n^2 I_n(\lambda)]} \\
 = \frac{\lambda^3 J_n'(\lambda) + (1-\nu) n^2 [\lambda J_n'(\lambda) - J_n(\lambda)]}{\lambda^3 I_n'(\lambda) - (1-\nu) n^2 [\lambda I_n'(\lambda) - I_n(\lambda)]}
 \end{aligned} \quad (20)$$

其中  $\lambda = \beta R$ 。

由觀察(20)式可知：對於不同之  $n$  值，可有無限多之根，即特徵值  $\lambda$  與之對應，但就實際振動模態而言， $n$  值代表了圓板振型的節徑 (nodal diameter) 數，而其根之次序  $s$  則表示了節圓

(nodal circle) 數。舉例而言，當  $n = 2$  時，其第一個根 ( $s = 0$ ) 即表示振型為兩節徑之情況。

此外，由特徵值  $\lambda = \beta R$  及(14)式，亦可得到如下之關係式：

$$\lambda^2 = \omega R^2 \sqrt{\frac{\rho h}{D}} = 2\pi f R^2 \sqrt{\frac{12\rho(1-\nu^2)}{E h^2}} \quad (21)$$

其中  $f$  為共振頻率 (resonant frequency)。

由(20)式中，我們可發現特徵值  $\lambda^2$  僅與  $\nu$  值有關，而與  $E$  值無關，因此假設圓板之尺寸及密度不變，倘若能得知  $\lambda^2$  與  $\nu$  之關係，則便可經由兩個共振頻率值，聯立(21)式而求得材料之  $E, \nu$  值。基於一般材料之  $\nu$  值約在  $0.2 \sim 0.4$  之間，所以我們可依次變化  $\nu$  值，分別代入(20)式求解特徵值  $\lambda^2$ ，再利用二次式曲線嵌合 (curve fitting) 之方式，便可得到  $\lambda^2$  與  $\nu$  之關係式。圖 3 至圖 8 為周邊自由圓板的前 6 個模態， $\lambda^2$  與  $\nu$  之關係式，其中資料點為由數值計算所得之結果，而實線則為曲線嵌合後所得之方程式，兩者有相當一致之結果。由於  $\lambda^2$  為無因次量，因此若已知材料之  $E, \nu$  值，亦可藉此關係式及(21)式，預測材料之共振頻率。除此之外，經由觀察圖 3 至圖 8 中  $\lambda^2$  與  $\nu$  之變化趨勢，亦可得知針對某一模態，其  $\nu$  值變化對振頻之影響。

## (2) 方板之振動

對於方板之振動問題，由於其幾何形狀之故，因而較難如同圓板一般，可作某些程度之簡化，甚至可求得共振頻率解析解，因此在分析方板時，常利用梁函數 (beam function) 作為特徵函數，再將其位移表為級數之型態。Lemke [37] 及 Ritz [38] 即利用此種方法，將前述之位移函數  $W$  表成如下之形式：

$$W(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{mn} X_m(\bar{x}) Y_n(\bar{y}) \quad (22)$$

$X_m(\bar{x})$  及  $Y_n(\bar{y})$  代表將座標原點位於方板中心的兩端自由之梁函數 (free-free beam function)，而且當  $m, n$  為偶數時，則

$$\begin{aligned}
 X_m(\bar{x}) &= \frac{\cosh k_m \cos k_m \bar{x} + \cos k_m \cosh k_m \bar{x}}{\sqrt{\cosh^2 k_m + \cos^2 k_m}} \\
 Y_n(\bar{y}) &= \frac{\cosh k_n \cos k_n \bar{y} + \cos k_n \cosh k_n \bar{y}}{\sqrt{\cosh^2 k_n + \cos^2 k_n}}
 \end{aligned} \quad (23a)$$

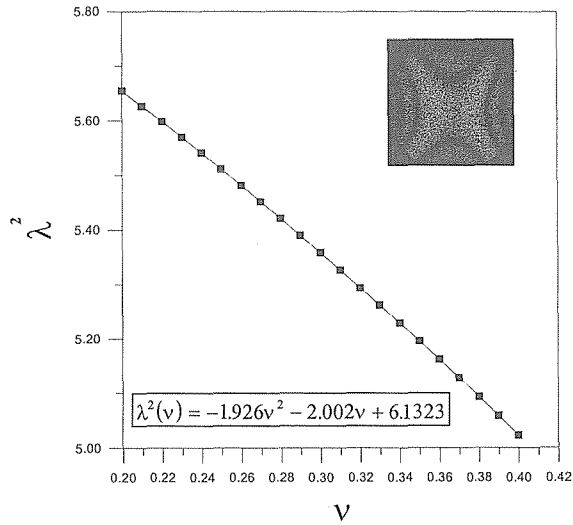


圖 3 圓板第 1 模態 ( $n=2, s=0$ ) 的  $\lambda^2$  與  $\nu$  之關係

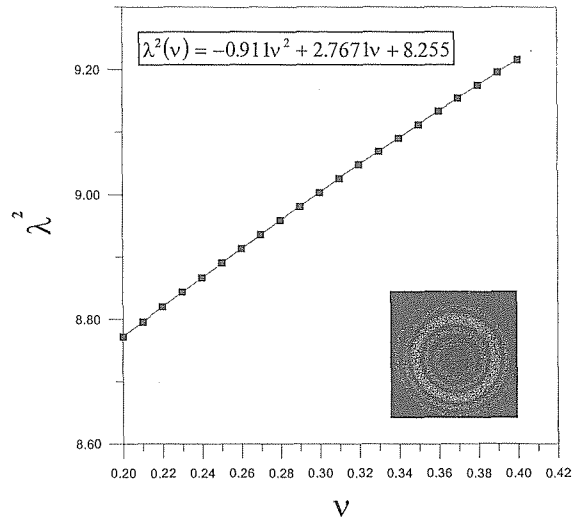


圖 4 圓板第 2 模態 ( $n=0, s=1$ ) 的  $\lambda^2$  與  $\nu$  之關係

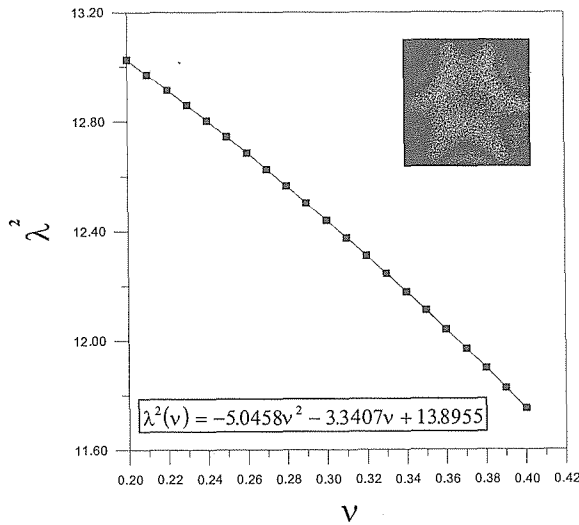


圖 5 圓板第 3 模態 ( $n=3, s=0$ ) 的  $\lambda^2$  與  $\nu$  之關係

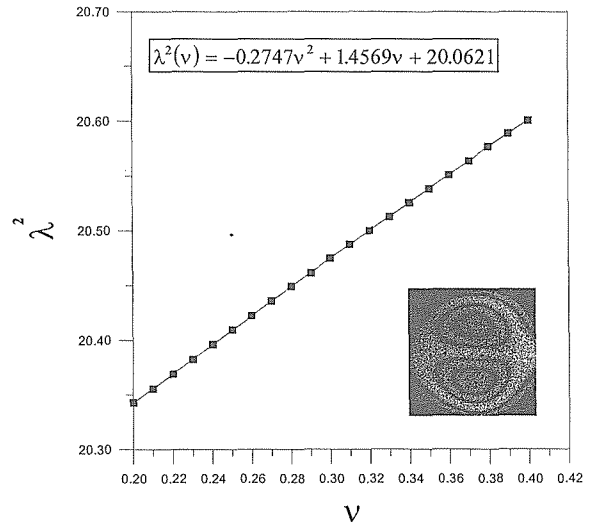


圖 6 圓板第 4 模態 ( $n=1, s=1$ ) 的  $\lambda^2$  與  $\nu$  之關係

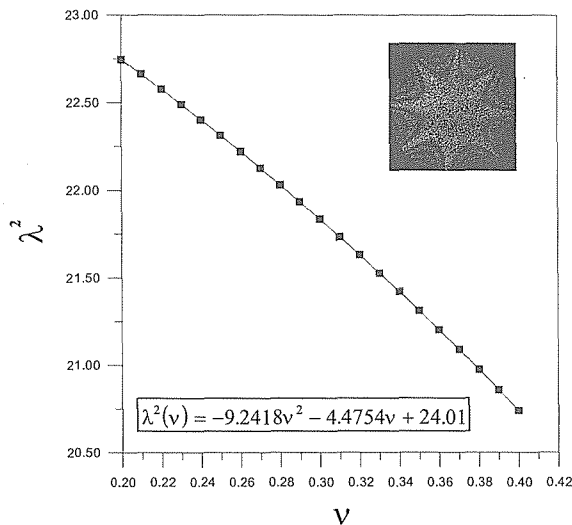


圖 7 圓板第 5 模態 ( $n=4, s=0$ ) 的  $\lambda^2$  與  $\nu$  之關係

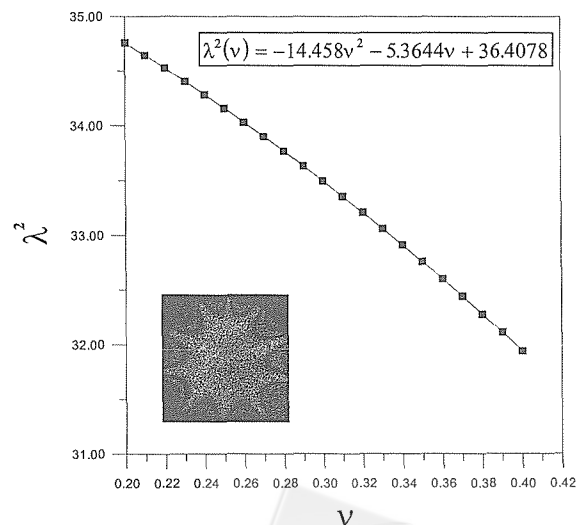


圖 8 圓板第 6 模態 ( $n=5, s=0$ ) 的  $\lambda^2$  與  $\nu$  之關係

而當  $m$ 、 $n$  為奇數時，則

$$\begin{aligned} X_m(\bar{x}) &= \frac{\sinh k_m \sin k_m \bar{x} + \sin k_m \sinh k_m \bar{x}}{\sqrt{\sinh^2 k_m + \sin^2 k_m}} \\ Y_n(\bar{y}) &= \frac{\sinh k_n \sin k_n \bar{y} + \sin k_n \sinh k_n \bar{y}}{\sqrt{\sinh^2 k_n + \sin^2 k_n}} \end{aligned} \quad (23b)$$

其中  $k_{m(n)}$  為下列方程式之解：

$$\begin{aligned} \tan k_{m(n)} + \tanh k_{m(n)} &= 0, & m(n) \text{ 為偶數} \\ \tan k_{m(n)} - \tanh k_{m(n)} &= 0, & m(n) \text{ 為奇數} \end{aligned} \quad (24)$$







對於四邊自由且長寬分別為  $a$  及  $b$  之長方板而言，其邊界條件為

$$\begin{aligned} M_{\bar{x}\bar{x}}\left(\pm\frac{a}{2}, \bar{y}\right) &= Q_{\bar{x}}\left(\pm\frac{a}{2}, \bar{y}\right) = 0 \\ M_{\bar{y}\bar{y}}\left(\bar{x}, \pm\frac{b}{2}\right) &= Q_{\bar{y}}\left(\bar{x}, \pm\frac{b}{2}\right) = 0 \end{aligned} \quad (25)$$

$M_{\bar{x}\bar{x}}$ 、 $M_{\bar{y}\bar{y}}$  表示  $\bar{x}$  及  $\bar{y}$  方向之彎矩，而  $Q_{\bar{x}}$ 、 $Q_{\bar{y}}$  為其剪力。

利用(4)、(5)、(22)、(23)、(24)、(25)等式，仿照前述圓板振動之方式，亦可推得自由方板振動的前 6 個模態特徵值  $\lambda^2$  與  $\nu$  之變化關係式，如表 1 所列 [38]，其中第 2 及第 5 模態之  $\lambda^2$  與  $\nu$  無關。

表 1 方板前 6 個模態的  $\lambda^2$  與  $\nu$  之關係

模態	振型	特徵值 $\lambda^2 = 2\pi^2 a^2 \sqrt{\rho h / D}$
1		$\lambda^2(\nu) = 4\sqrt{12.43 - 18(\nu - 0.225)}$
2		$\lambda^2(\nu) = 4\sqrt{26.4}$
3		$\lambda^2(\nu) = 4\sqrt{35.73 + 20.8(\nu - 0.225)}$
4		$\lambda^2(\nu) = 4\sqrt{80.8 - 73(\nu - 0.225)}$
5		$\lambda^2(\nu) = 4\sqrt{237.1}$
6		$\lambda^2(\nu) = 4\sqrt{266 - 274(\nu - 0.225)}$

#### 四、實驗架設與實驗步驟

在此實驗中，我們使用 6061-T6 之鋁材及玻璃作為圓板及方板材料常數之反算，鋁材之密度為  $2700\text{kg/m}^3$ ，而玻璃之密度為  $2589\text{kg/m}^3$ ，在試件規格方面，圓形鋁板之尺寸為直徑 80mm，厚度 1mm；方形鋁板之尺寸為邊長 80mm，厚度 1mm，而方形玻璃板之尺寸為邊長 80mm，厚度 2mm。為了模擬試件之自由邊界，因此在實驗中，試件是置於海綿之上，除此之外，為了使試件表面有較佳之反射效果，並且產生一均勻的漫反射，可使用白漆及海藻粉混合，以作為試件表面之塗層。

實驗中使用波長 632.8nm，輸出功率 30mW 之氦氖 (He-Ne) 雷射作為光源，經 CCD 相機 (Pulnix Company) 所攝得之光斑影像圖，由影像卡 P360F (Dipix Technologies Inc.) 作數位訊號處理，隨後即由電腦程式作影像相減處理。關於試件之驅動方式，乃是將積層式壓電陶瓷致動器 (Piezostack actuator) 黏貼於試件上，再利用一函數產生器 (function generator) (Hewlett Packard) 輸出正弦波，此正弦波藉由功率放大器 (power amplifier) (NF Corporation) 作放大處理後，驅動壓電致動器，進而使試件產生振動，而試件振動之頻率及振幅，則可由函數產生器及功率放大器調整之。

在實驗開始即驅使試件振動，此時先存取一張參考影像，隨後將接續進入 CCD 的影像與參考影像作相減，並且即時顯示於螢幕上。若此驅動頻率不是試件之共振頻率，則將不會有任何干涉條紋出現，此時繼續調整驅動頻率，直到接近共振頻率時，共振模態之干涉條紋影像便會出現，而且此影像將會在達到正確之共振頻率時最為清晰，如此我們便可於實驗中同時量測到試件之共振頻率及振型。

#### 五、實驗結果與分析

在由 ESPI 實驗獲得試件之振頻與振型後，根據前述之特徵值  $\lambda^2$  與蒲松氏比  $\nu$  之關係，便可進行材料常數  $E$ 、 $\nu$  之反算。由於  $\lambda^2$  與  $\nu$  兩者間之相關性會因模態之不同而有所差異，故在反算材料常數時，我們將以每兩個相鄰之模態建立聯立方程式，以反算出各組的  $E$ 、 $\nu$  值，然後將

各組所求得之反算值予以平均，而以平均值作為最後之反算結果。因此若以 6 個模態為例，將可得出 5 組反算結果。表 2(a) 為圓形鋁板與方形鋁板之反算結果，我們亦可看出鋁板由不同形狀所反算的材料常數頗為相近，而表 2(b) 則為方形玻璃板之反算結果。為了與此反算結果作比較，我們同時利用超音波量測方式來進行材料性質量測，而由於試件之厚度極薄 (1mm 及 2mm)，因此我們利用特殊的頻率法，在相同尺寸及密度的條件下，反算推得鋁板與玻璃材料常數之  $E$ 、 $\nu$  值，此結果並同時列於表 2，以與利用振動反算結果作比較，而兩者亦有十分相近之結果。

最後我們由反算所推得的材料常數作為有限元素數值計算正算的基礎，以獲得其共振頻率與振型，並與應用 ESPI 實驗所得作比較，以驗證反算結果的正確性。其中有限元素計算是使用 ABAQUS 軟體，且利用 8 節點的殼元素 (shell element) 建構其模型。表 3 為實驗所得之共振頻率與有限元素法所得結果之比較，在此有限元素法所用之材料常數為實驗值反算所得，亦即表 2 中所列。我們可以發現兩者間之差異很小，最大誤差僅約 4%，表示前述之反算方式與正算解有相當好的一致性，此外，從表中數值可以見到由實驗所得之振頻，大部份皆比有限元素法所得之振頻略高，此可歸因於在實驗中將試件置於海綿上，未能完全模擬自由邊界之情況，除此之外，由於有限元素法中所用之理論及模型 (model) 是基於薄板之假設，因此計算所得之振頻會較實驗值為低。

表 2 應用振頻反算平板材料常數之結果

鋁材 模態	圓板		方板	
	E (GPa)	$\nu$	E (GPa)	$\nu$
1&2	66.32	0.338	62.72	0.253
2&3	64.09	0.365	57.94	0.368
3&4	64.39	0.374	63.76	0.294
4&5	66.31	0.343	64.99	0.365
5&6	65.16	0.274	67.35	0.319
平均	65.25	0.339	63.35	0.32
超音波量測	70.48	0.338	70.48	0.338

(a)

玻璃 模態	方板	
	E (GPa)	$\nu$
1&2	66.24	0.263
2&3	66.35	0.26
3&4	66.24	0.262
4&5	64.89	0.212
5&6	63.89	0.244
平均	65.52	0.248
超音波量測	67.64	0.265

(b)

表 3 AF-ESPI 實驗所得之振頻與有限元素法結果之比較

模態	圓形鋁板			方形鋁板			方形玻璃板		
	AF-ESPI (Hz)	FEM (Hz)	誤差 (%)	AF-ESPI (Hz)	FEM (Hz)	誤差 (%)	AF-ESPI (Hz)	FEM (Hz)	誤差 (%)
1	814	783.8	3.7	494	486.6	1.5	1032	1030.2	0.2
2	1400	1359.5	2.9	735	710.8	3.3	1547	1500.6	3.0
3	1893	1824.9	3.6	890	893.8	-0.4	1818	1786.8	1.7
4	3171	3073.3	3.1	1271	1261.2	0.8	2660	2632.3	1.0
5	3327	3208.9	3.5	2330	2236.0	4.0	4530	4549.0	-0.4
6	5112	4932.0	3.6	2345	2308.4	1.6	4750	4791.2	-0.9

圖 9 及圖 10 分別為圓形鋁板與方形鋁板之振型圖，其中左列為利用 AF-ESPI 所得之實驗影像，右列則為使用反算所得之材料常數，再利用有限元素法 (FEM) 所獲得之振型圖。在實驗所得之振型圖中，我們可以輕易地判斷出其節線所在之位置，即是干涉條紋中亮度最大之處，也就是貝索函數  $|J_0(\Gamma A)| = 1$  之處，至於其他亮度為 0 之次級條紋 (亦即暗紋)，則是貝索函數  $|J_0(\Gamma A)| = 0$  之處。而由有限元素法所得之振型圖中，我們利用正負號之標示，以輔助判斷振型之相位；振型圖中若有兩區域同號，則表示其為同相振動，反之若兩區域異號，則為反相振動，而位於正負號之間者，即是節線所在之處，由圖 9 及圖 10 可見實驗所得的振型與有限元素法之結果相當吻合。

## 六、結 論

一般利用實驗的自然頻率來反算材料性質的研究，皆是使用頻譜分析方式進行自然頻率的量測，但往往由實驗所得的頻譜圖並不能提供準確的模態訊息，也就是常有非自然頻率的訊號出現而造成判斷的困難，此現象在試片為自由邊界時更為明顯。此外，因模態分析只有頻率方面的訊息，將無法得知量測的自然頻率所對應之振型為何，而易使反算產生問題。在本文中所使用的振幅變動法電子斑點干涉術 (AF-ESPI) 的光學法相較於傳統使用頻譜分析設備的方式，提供了非接觸、即時觀察與全域量測的優點，不僅在實驗中能獲得共振頻率的資訊，且能立即由干涉條紋影像圖作模態辨識，因此絕無振頻與振型對應錯誤之可能。此外，應用 AF-ESPI 於周邊自由平板的振動，進而反算其材料常數的量測方式，不僅可改善一般接觸式量測需破壞材料表面之缺點，對於脆性材料而言，更可免除夾持不易及製作標準試件之困擾，由此可見本文所提出之動態



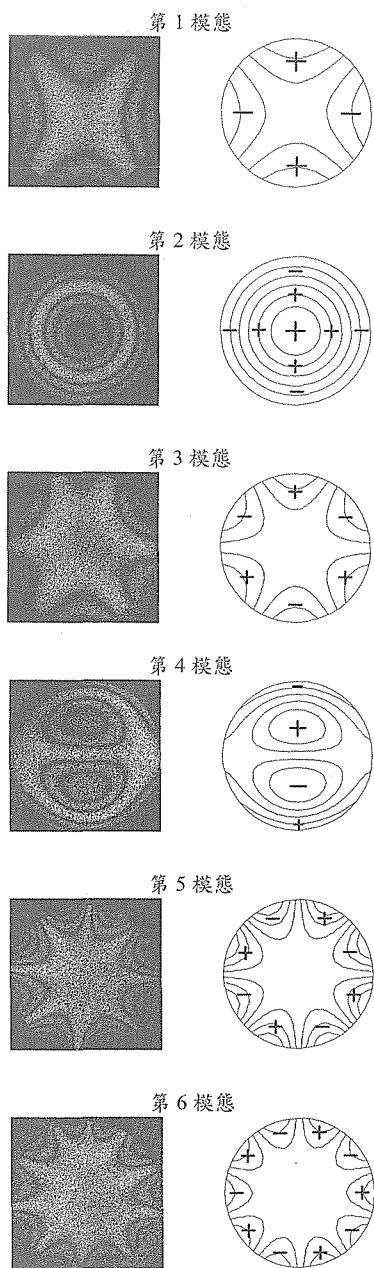


圖 9 圓形鋁板之實驗與理論振型圖

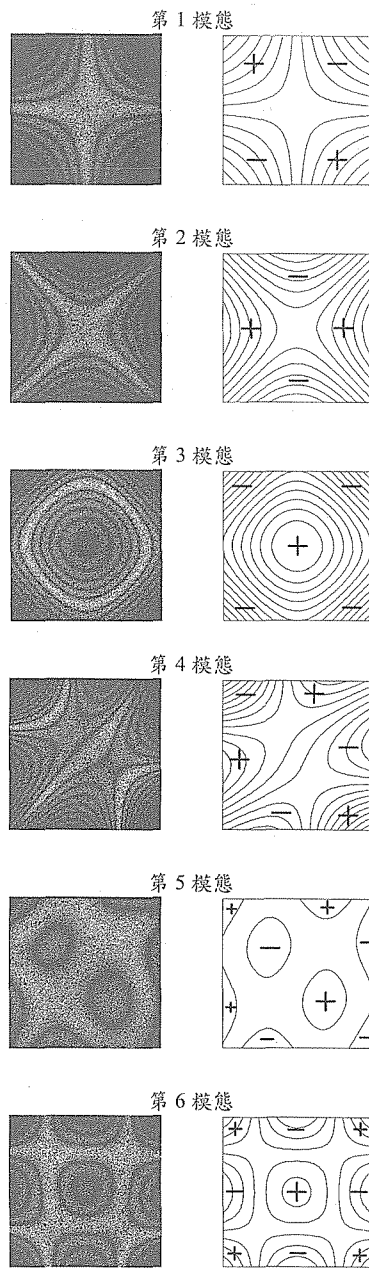


圖 10 方形鋁板之實驗與理論振型圖

光學量測方式與系統，確實較一般方式有更大的適用性及優越性。

### 誌 謝

本研究成果由國科會計畫 NSC86-2212-E002-077 補助完成。

### 參考文獻

1. Butters, J. N. and Leendertz, J. A. "Speckle

Pattern and Holographic Techniques in Engineering Metrology," *Optics and Laser Technology*, Vol. 3, pp. 26-30 (1971).

2. Lfokberg, O. J., "Electronic Speckle Pattern Interferometry," *Phys. Technol.*, Vol. 11, pp. 16-22 (1980).

3. Sharp, B., "Electronic Speckle Pattern Interferometry," *Optics and Lasers in Engineering*, Vol. 11, pp. 241-255 (1989).

4. Slettemoen, G. Å, "General Analysis of Fringe Contrast in Electronic Speckle Pattern Interferometry," *Optica Acta*, Vol. 26, No. 3,

- pp. 313–327 (1979).
5. Jones, R. and Wykes, C., “General Parameters for the Design and Optimization of Electronic Speckle Pattern Interferometers,” *Optica Acta*, Vol. 28, No. 7, pp. 949–972 (1981).
  6. Jones, R. and Wykes, C., *Holographic and Speckle Interferometry*, Cambridge University Press (1989).
  7. Wykes, C., “Use of Electronic Speckle Pattern Interferometry (ESPI) in the Measurements of Static and Dynamic Surface Displacement,” *Optical Engineering*, Vol. 21, No. 3, pp. 400–406 (1982).
  8. Moore, A. J. and Tyrer, J. R. “An Electronic Speckle Pattern Interferometer for Complete In-plane Displacement Measurement,” *Meas. Sci. Technol.*, Vol. 1, pp. 1024–1030 (1990).
  9. 陳錫釗, 「電子斑點干涉術在複合材料板的全場量測和分析」, 台灣大學機械所碩士論文, 中華民國, 台灣 (1995)。
  10. Maji, A. K., Wang, J. L. and Lovato, J., “Electronic Speckle Pattern Interferometry for Fracture Mechanics Testing,” *Experimental Techniques*, pp. 19–23 (1991).
  11. Moore, A. J. and Tyrer, J. R., “The Evaluation of Fracture Mechanics Parameters from Electronic Speckle Pattern Interferometric Fringe Patterns,” *Optics and Lasers in Engineering*, Vol. 19, pp. 325–336 (1993).
  12. Butters, J. N., “Application of ESPI to NDT,” *Optics and Laser Technology*, pp. 117–123 (1977).
  13. Løkberg, O. J. and Malmo, J. T., “Detection of Defects in Composite Materials by TV Holography,” *NDT International*, Vol. 21, No. 4, pp. 223–228 (1988).
  14. Stetson, K. A. and Brohinsky, W. R., “Electro-optic Holography System for Vibration Analysis and Nondestructive Testing,” *Optical Engineering*, Vol. 26, No. 12, pp. 1234–1239 (1987).
  15. Paoletti, D., Spagnolo, G. S., Facchini, M. and Zanetta, P., “Artwork Diagnostics with Fiber-optic Digital Speckle Pattern Interferometry,” *Applied Optics*, Vol. 32, No. 31, pp. 6236–6241 (1993).
  16. Aswendt, P., Hofling, R. and Totzuer, W., “Digital Speckle Pattern Interferometry Applied to Thermal Strain Measurements of Metal-Ceramics Compounds,” *Optics and Laser Technology*, Vol. 22, No. 4, pp. 278–282 (1990).
  17. Deaton, J. B., Jr., Wagner, J. W. and Rogowski, R. S., “Electronic Speckle Pattern Interferometry on a Microscopic Scale,” *Journal of Nondestructive Evaluation*, Vol. 13, No. 1, pp. 13–21 (1994).
  18. Løkberg, O. J. and Høgmoen, K., “Use of Modulated Reference Wave in Electronic Speckle Pattern Interferometry,” *Journal of Physics E: Scientific Instruments*, Vol. 9, pp. 847–851 (1976).
  19. Høgmoen, K. and Løkberg, O. J., “Detection and Measurement of Small Vibrations Using Electronic Speckle Pattern Interferometry,” *Applied Optics*, Vol. 16, No. 7, pp. 1869–1875 (1977).
  20. Shellabear, M. C. and Tyrer, J. R., “Application of ESPI to Three-Dimensional Vibration Measurements,” *Optics and Lasers in Engineering*, Vol. 15, pp. 43–56 (1991).
  21. Creath, K. and Slettemoen G. Å, “Vibration-Observation Techniques for Digital Speckle Pattern Interferometry,” *J. Opt. Soc. Am. (A)*, Vol. 2, No. 10, pp. 1629–1636 (1985).
  22. Pouet, B., Chatters, T. and Krishnaswamy, S., “Synchronized Reference Updating Technique for Electronic Speckle Interferometry,” *Journal of Nondestructive Evaluation*, Vol. 12, No. 2, pp. 133–138 (1993).
  23. Wang, W. C., Hwang, C. H. and Lin, S. Y., “Vibration Measurement by the Time-averaged Electronic Speckle Pattern Interferometry Methods,” *Applied Optics*, Vol. 35, No. 22, pp. 4502–4509 (1996).
  24. Ma, C. C. and Huang, C. H., “The Investigation of Three-Dimensional Vibration for Piezoelectric Rectangular Parallelepipeds by Using the AF-ESPI Method,” submit to publish in *Experimental Mechanics* (1998).
  25. Leissa, A. W., “The Free Vibration of Rectangular Plates,” *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 31, No. 3, pp. 257–293 (1973).
  26. Gorman, D. J., “Free Vibration Analysis of the Completely Free Rectangular Plate by the Method of Superposition,” *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 57, No. 3, pp. 437–447

- (1978).
27. Irie, T., Yamada, G. and Aomura, S., "Natural Frequencies of Mindlin Circular Plates," *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 47 pp. 652-655 (1980).
  28. Kyösti, A., Ek, L. and Molin, N.-E., "Four Ways to Determine Modes of Vibration in a Plate," *Proceeding of the 3rd International Modal Analysis Conference*, pp. 627-633 (1985).
  29. Dickinson, S. M., "The Buckling and Frequency of Flexural Vibration of Rectangular Isotropic and Orthotropic Plates Using Rayleigh's Method," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 61, No. 1, pp. 1-8 (1978).
  30. Spilker, R. L., Verbiese, S., Orringer, O., French, S. E., Witmer, E. A. and Harris, A., "Use of the Hybrid-stress Finite-Element Model for the Static and Dynamic Analysis of Multilayer Composite Plates and Shells," Report for the Army Materials and Mechanics Research Center, Watertown, MA (1976).
  31. Zelenev, Y. V. and Electrova, L. M., "Determination of the Dynamic Parameters of Polymer Plates," *Sov. Phys. Acoust.*, Vol. 18, No. 3, pp. 339-341 (1973).
  32. Wolf, J. A. and Carne, T. G., "Identification of the Elastic Constants for Composites Using Modal Analysis," Meeting of Soc. of Experimental Stress Analysis, San Francisco, CA, No. A-48 (1979).
  33. Deobald, L. R. and Gibson, R. F., "Determination of Elastic Constants of Orthotropic Plates by a Modal Analysis/Rayleigh Ritz Technique," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 124, No. 2, pp. 269-283 (1988).
  34. Marchand, V., Authesserre, J., Pouyet, J. and Bacon, C., "Determination of the Elastic Constants of Materials in the Form of Plates by a Free Vibration Method," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 194, No. 4, pp. 497-512 (1996).
  35. Airey, J. R., "The Vibration of Circular Plates and Their Relation to Bessel Functions," *Proceeding of the Physical Society of London*, Vol. 23, pp. 225-232 (1911).
  36. Leissa, A. W., *Vibration of Plates*, NASA SP-160 (1969).
  37. Lemke, A., "Experimentelle Untersuchungen

- zur W. Ritzschen Theorie der Transversalschwingungen quadratischer Platten," *Ann. Physik.*, Bd.4, ser.86, pp. 717-750 (1928).
38. Ritz, W., "Theorie der Transversalschwingungen einer quadratischen Platte mit freien Rändern," *Ann. Physik.*, Bd.28, pp. 737-786 (1909).

## THE VIBRATING MEASUREMENT OF PLATES AND INVERSE EVALUATION OF MATERIAL CONSTANTS BY USING ESPI METHOD

C. H. Huang\*    C. C. Ma\*\*

*Department of Mechanical Engineering  
National Taiwan University  
Taipei, Taiwan 10617, R.O.C.*

### ABSTRACT

In this study, the Amplitude Fluctuation Electronic Speckle Pattern Interferometry (AF-ESPI) is used for measuring the resonant frequencies and mode shapes of isotropic plates. Making use of the resonant frequencies for free plates obtained experimentally, an inverse evaluation for the material constants is investigated. Finally, ultrasonic method as well as finite element calculation are used and the results are compared with the experimental measurements. The advantage of ESPI for vibration measurement is that we can obtain the resonant frequency and the correspondent mode shape at the same time. From the experimental results of aluminum and glass obtained in this study, it shows that the numerical calculation and the experimental results agree fairly well for both the resonant frequencies and the mode shapes. Hence the experimental method based on optical ESPI setup proposed in this study might be an applicable way to evaluate material constants.

**Keywords:** Electronic speckle pattern interferometry, Vibration, Inverse evaluation.

\* Graduate student    \*\* Professor

(Manuscript received Mar. 5, 1998,  
Accepted for publication June 16, 1998.)