

電容式半導體加速度計技術之整合研究(三)-子計畫二  
半導體加速度計之熱流及電磁技術研究

The Study on the Fluid Dynamics and Electromagnetic of Capacitive Semiconductor Micro-Accelerometer

計畫編號: 88-2218-E-002-016

執行期限: 87 年 8 月 1 日至 88 年 7 月 31 日

計畫主持人: 張 培 仁 台大應力所副教授

### 一 中文摘要

(關鍵詞:梳狀加速度計、電容式、積體電路、表面細微加工)

本計劃研究梳狀電容式加速度計之重要參數，在電磁技術分析方面，同時以解析方法與數值模擬計算電場分布情形，估算感測器之電容值以及電極之間靜電力大小，此外，運用電磁分析軟體計算基材效應。在熱流技術分析方面，運用解析方法計算流場分布情形，估算流體與梳狀結構之間的阻尼大小，以配合閉迴路設計分析時系統模擬之需求。

### 英文摘要

(Keyword: Capacitive Accelerometer, damping, conformal mapping, Surface Micromachining)

In this project, we develop a methodology to obtain the important parameters of the capacitive micro-accelerometer, including the electromagnetic analysis and heat-flow analysis.

Both analytical methods and FEM code are used to calculate the electric field and the flow field. We can obtain the capacitance and electrostatic force precisely. In addition, we discuss the substrate effect of comb structures. Using the flow field we had obtained, the damping effect should be known. Finally, we also compare the numerical results to our original design.

### 二 計劃緣起與目的

本計劃研究電容式梳狀加速度計電磁與熱流特性，由於採取閉迴路設計，因此感測電容值與回授靜電力大小必須精確控制，此外，阻尼效應影響系統動態特性，在此我們估算這些重要參數，作為設計電容式梳狀結構設計之依據。

### 三 研究成果

#### 3.1 梳狀加速度計電磁分析

梳狀結構由於尺寸上的限制，感測電容之間並非均勻電場，必須考量 fringe 的效應，因梳狀電極長度遠大於厚度，我們可簡化成二維靜電場，並利用其特殊之對稱關係，最後用數值模擬的結果做比較。

##### 3.1.1 解析分析

由前兩年之研究結果已經得到初步之結果，在最簡化之模型之下，我們假設二維矩形電極如圖表四，在 Z 平面取四分之一電極分析，在實軸(x 軸)與虛軸(y 軸)假設延長至無窮遠，此時在電極周圍的電場近似於實際情形，透過 Schwarz-Christoffel 轉換，經由 T 平面對應至 W 平面(圖表四)，形成無窮平板電容，如此電場分布便可精確求出，所得之數學表示式簡單表示如下，帶入設計之尺寸比例，x 軸長度取 1 單位，y 軸長度取 2 單位，由於對稱的關係，我們計算四分之一部分即是整個電容之電容值，其值約為 19.401 pF/m，若我們假設電容之間為均

勻電場，則利用平行板電容公式，計算的電容值約為  $8.842\text{pF/m}$ ，平行板電容的修正因子為 2.191。

$$z(T) = [\sqrt{T-1} - \arctan(\sqrt{T-1})] \frac{2g}{\pi} i$$

$$w(T) = i \ln T + \pi$$

$$z(w) = [-p + \arctan(p)] \frac{2g}{\pi}$$

$$\text{where } p = \sqrt{1 + \exp(-iw)}$$

$$\bar{E} = i \frac{e^{iu} \sqrt{e^{-iu}(e^v + e^{iu})}}{e^v + e^{iu}} \text{V}$$

為符合電極寬度為有限尺寸之設計，我們採取對稱的半個電極來分析，同樣利用 Conformal Mapping 來求解析解，此時所有 Z 平面上尺寸皆為有限值，經由 T 平面對應至 W 平面(圖表五)，這樣的分析會使得電場分布更接近實際的情形。

$$z(t) = A \int_0^t \frac{\sqrt{1-k^2 t^2}}{\sqrt{1-t^2}} dt + B$$

$$T = \sin(w) = \sin(u+iv)$$

$$E(\phi, k) = \int_0^\phi (1-k^2 \sin^2 \phi)^{\frac{1}{2}} d\phi$$

$$z(t) = g E(t, k) / E(k)$$

$$z(w) = g E(w, k)$$

$$E_w = -\nabla_w \phi$$

$$E_z = E_w dw/dz$$

在本問題中電流變化為零，磁場可不考慮，根據電磁彈性力學理論，Maxwell stress tensor 可表示為  $\tau_{ij}$ ，電磁力的主要來源是垂直表面的 Maxwell stress 分量  $\tau_{11}$ ，長度為  $l$  的線段上平均受力可表為  $T_{mean}$ ，根據我們設計之尺寸比例，由已知的電場分布換算電極間靜電力大小，因電極轉角處(原點)為奇異點，我們取對稱線上相應的線段(a-b)來計算，又整個電極上的靜電力需再乘兩倍，在兩個電極上電壓為  $\pm 1\text{V}$  時，結果約為  $13.245 \times 10^{-6} \text{N/m}$ ，若在平行板電容假設下估算的靜電力約為

$8.842 \times 10^{-6} \text{N/m}$ ，平行板電容的修正因子為 1.498。

$$\tau_{11} = \frac{\epsilon_0}{2} [E_1^2 - (E_2^2 + E_3^2)]$$

$$\tau_{ij} = \epsilon_0 [E_i E_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} E_k^2]$$

where  $E$ : electric field intensity

$\epsilon_0$ : permittivity

$$T_{mean} = \frac{\sum_i \tau_{11i} dl_i}{\sum_i dl_i}$$

### 3.1.2 數值模擬

我們先以不考慮基材效應時，使用有限元素分析軟體 Ansoft/Maxwell 估算靜電力與電容值，電容值為  $20.48\text{pF/m}$ ，最大電容 ( $50\text{g}$  作用下)為  $20.73\text{pF/m}$ ，根據我們設計的尺寸，感測電容大小為  $0.157\text{pF}$ ，最大電容變化量  $3.84\text{fF}$ ，平行板電容的修正因子為 2.32，數值計算靜電力為  $14.609 \times 10^{-6} \text{N/m}$ ，平行板電容的修正因子為 1.59。

圖表六為電場解析解與數值模擬結果比較，可看出是相當準確，而解析解在遠處之電場較實際值略大，這是由於以電極尺寸無窮延伸之假設來近似之結果，由於遠處電場衰減很快，且距離越遠靜電力越小，所以造成之誤差很小。另外，比較前面的結果可看出 fringe 效應是不可忽視的，而解析解與數值解之誤差在 8% 以下，非常具有設計之參考價值。

考慮晶片基材對電場之影響，根據我們的設計，初始之矽晶圓以濕氧法成長二氧化矽  $3000\text{\AA}$ ，然後再以低壓化學氣相沉積氮化矽  $2000\text{\AA}$ ，兩個電極上電壓為  $\pm 1\text{V}$  時，變化梳狀結構與基材之距離，模擬分析之結果如圖表七，由於電場會集中垂直進入基材，造成梳狀結構受向上的分力作用，距離越小效應越明顯，而實際作動時的橫向電磁力則幾乎沒有影響。

### 3.2 梳狀加速度計之熱流分析及阻尼

## 分析

### 3.2.1 流場假設及統御方程式

梳狀加速度計之整個流場我們可假設為

- (i) 連續體 ( $Kn \ll 1$ )
- (ii) 不可壓縮流
- (iii) 等溫過程
- (iv) 層流 ( $Re \ll 1$ )

我們整個流場之統御方程式及邊界條件經過無因次化整理後，得到

$$\frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{Y}} + \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{Z}} = 0 \quad (1)$$

$$St \frac{\partial \bar{V}}{\partial \tau} + \bar{V} \frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{Y}} + \bar{W} \frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{Z}} = - \frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{Y}} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial \bar{Y}^2} + \frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial \bar{Z}^2} \right) \quad (2)$$

$$St \frac{\partial \bar{W}}{\partial \tau} + \bar{V} \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{Y}} + \bar{W} \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{Z}} = - \frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{Z}} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \bar{Y}^2} + \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \bar{Z}^2} \right) \quad (3)$$

其中  $Re$  代表 Reynold Number 其為  $Re = \frac{v_0 L}{\nu}$  而  $St$  代表 Strouhal Number

$$\text{其為 } St = \frac{L \omega}{v_0}$$

### 3.2.2 解析近似計算

在求解過程中，我們利用擾動法 (Perturbation Method) 把方程式線性化最後可得到各階線性偏微分方程式及邊界條件(圖表八)為

$O(1)$ :

$$\frac{\partial \bar{V}_0}{\partial \bar{Y}} + \frac{\partial \bar{W}_0}{\partial \bar{Z}} = 0 \quad (4)$$

$$\gamma \frac{\partial \bar{V}_0}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \bar{V}_0}{\partial \bar{Y}^2} + \frac{\partial^2 \bar{V}_0}{\partial \bar{Z}^2} \quad (5)$$

$$\gamma \frac{\partial \bar{W}_0}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \bar{W}_0}{\partial \bar{Y}^2} + \frac{\partial^2 \bar{W}_0}{\partial \bar{Z}^2} \quad (6)$$

B.C.:

$$\text{左右 fixed comb } \bar{V}_0 = \bar{W}_0 = 0$$

$$\text{中間 comb } \bar{V}_0 = e^{j\tau}, \bar{W}_0 = 0$$

$$\bar{Z} = 0 \quad \frac{\partial \bar{V}_0}{\partial \bar{Z}} = \frac{\partial \bar{W}_0}{\partial \bar{Z}} = 0$$

$$\bar{Z} \rightarrow \infty \quad \bar{V}_0 = \bar{W}_0 = 0$$

$O(\epsilon)$ :

$$\frac{\partial \bar{V}_1}{\partial \bar{Y}} + \frac{\partial \bar{W}_1}{\partial \bar{Z}} = 0 \quad (7)$$

$$\gamma \frac{\partial \bar{V}_1}{\partial \tau} + \bar{V}_0 \frac{\partial \bar{V}_0}{\partial \bar{Y}} + \bar{W}_0 \frac{\partial \bar{V}_0}{\partial \bar{Z}} = - \frac{\partial \bar{F}_1}{\partial \bar{Y}} + \frac{\partial^2 \bar{V}_1}{\partial \bar{Y}^2} + \frac{\partial^2 \bar{V}_1}{\partial \bar{Z}^2} \quad (8)$$

$$\gamma \frac{\partial \bar{W}_1}{\partial \tau} + \bar{V}_0 \frac{\partial \bar{W}_0}{\partial \bar{Y}} + \bar{W}_0 \frac{\partial \bar{W}_0}{\partial \bar{Z}} = - \frac{\partial \bar{P}_1}{\partial \bar{Z}} + \frac{\partial^2 \bar{W}_1}{\partial \bar{Y}^2} + \frac{\partial^2 \bar{W}_1}{\partial \bar{Z}^2} \quad (9)$$

其中  $\gamma = Re \cdot St$

### 3.2.3 各階線性偏微分方程式解析解

整個梳狀加速度計之流場分析其數學模式如圖表十所示，在圖表十單位梳狀結構流場之邊界示意中，整個流場被分成(I)~(IV)四區域。以下將利用分離變數法 (Separation of Variables) 處理零階熱擴散偏微分方程式。最後得其  $\bar{V}_0$  近似解析解為

$$\bar{V}_0(\bar{Y}, \bar{Z}, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cdot \cos n\pi \bar{Y} \cdot e^{-(\bar{Z} - \frac{d+h}{L}) \xi_n \cos \frac{\theta_n}{2}} \cdot \cos \left[ \tau - (\bar{Z} - \frac{d+h}{L}) \cdot \xi_n \cdot \sin \frac{\theta_n}{2} \right] \quad (10)$$

$$\text{其中 } \xi_n = \sqrt{n^4 \pi^4 + \gamma^2}, \theta_n = \tan^{-1} \left( \frac{\gamma}{n^2 \pi^2} \right)^\circ$$

$$A_n = \frac{2}{n\pi} \sin \left( \frac{n\pi a}{2L} \right) + 2 \int_{\frac{a}{2L}}^{\frac{a+2b}{2L}} g(\bar{Y}) \cdot \cos n\pi \bar{Y} \cdot d\bar{Y} \quad (11)$$

$$g(\bar{Y}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sin \left[ \frac{L\pi}{b} \left( \bar{Y} + \frac{a+b}{2L} \right) \right] \quad (12)$$

根據本研究經驗，(12)式之正弦函數  $g(\bar{Y})$  恰好適合梳狀電極結構寬  $4\mu m$ ，而間隙為  $2\mu m$  之尺寸；該例之係數  $A_n$  為

$$A_n = \begin{cases} -\frac{9\sqrt{3}}{n(n^2-9)\pi}, & n > 3, \text{ odd} \\ -\frac{1}{6}, & n = 3 \\ 0, & n = 1 \\ \frac{1}{2}, & n = 0 \end{cases} \quad (13)$$

由(13)式知，該  $A_n$  將使(10)式之  $\bar{V}_0$  速度場級數迅速收斂。

圖表 九與圖表 十分別為解出之水平速度場  $\bar{V}_0$ ，在起始與  $1/8$  振動周期瞬間之等速度圖。該速度場將進一步供中央振動邊界之計算速度梯度使用，以便得知系統來自流體之黏滯力效果。

### 3.2.4 阻尼的估算

首先定義能量損失 (energy dissipation) 為

$$D \equiv \frac{1}{\omega} \int_A \int_0^{\pi} \tau_w(\omega t) u_w(\omega t) d(\omega t) dA \dots (14)$$

我們即可利用所求出之能量損失來計算整個微結構之特性因子 (quality factor) 為

$$Q \equiv 2\pi \frac{W}{D} \dots \dots \dots (15)$$

$W$  在我們所考慮之微結構下可表示為

$$W = \frac{1}{2\omega} U_0^2 \sqrt{MK} \dots \dots \dots (16)$$

一旦整個微結構之特性因子計算出來後，我們即可用來把阻尼比 ( $\zeta$ ) 估算出來為

$$\zeta = \frac{1}{2Q} \dots \dots \dots (17)$$

利用梳狀電極寬  $4\mu m$ ，而間隙尺寸為  $2\mu m$  之微結構之解析解(10)與(13)代入(14)中，可得

$$D \equiv -2 \frac{\ell v_0^2 \mu}{\omega} \left[ \frac{2\pi}{3} A_0 \xi_0 \cos \frac{\theta_0}{2} + \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} A_n \xi_n \frac{2}{n} \sin \frac{n\pi}{3} \cos \frac{\theta_n}{2} \right] \dots \dots \dots (18)$$

將(18)代入(15)中，品質因子則成為

$$Q \equiv \frac{\pi \sqrt{MK}}{2N\ell\mu} \left[ \frac{2\pi}{3} A_0 \xi_0 \cos \frac{\theta_0}{2} + \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} A_n \xi_n \frac{2}{n} \sin \frac{n\pi}{3} \cos \frac{\theta_n}{2} \right]^{-1} \dots \dots \dots (19)$$

其中  $N$  為梳狀結構之組數 (依圖表一， $N=64$ )。(19)式經代入圖表一之尺寸性能諸元計算後，得知品質因子為 435；而阻尼比經(17)式換算後之數值為 0.00115，遠比臨界阻尼值 (Critical Damping) 0.707 為小。

### 四 結論與展望

本研究對梳狀電容式加速度計求得重要之設計參數，在電磁分析方面，使用解析方法精確計算出電場分布，成功求出電容值與電極間靜電力，並使用有限元素分析軟體作數值模擬驗證，另外，為了解流體對系統之影響，我們計算流場分布情形以估計阻尼效應，但阻尼比所得之數值為 0.00115，梳狀微結構來自流體之阻尼對於動態特性之影響為有限，有賴其他閉迴路控制來補償。本研究對於電磁場與流場發展出解析方法，成功求得所需之重要參數，可作為靜電驅動梳狀結構之設計依據。

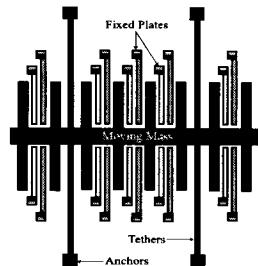
### 五 參考文獻

- [1] William A. Johnson and Larry K. Warne, "Electrophysics of micromechanical comb actuators," *Journal of Microelectromechanical systems*, Vol. 4, No. 1 (1995), pp.49-59
- [2] Wolfgang Kuchnel and Steven Sherman, "A surface micromachined silicon accelerometer with on-chip detection circuitry," *Sensors and Actuators A*, Vol. 45 (1994), pp.7-16
- [3] S Maier-Schneider, A Koprulu, S Ballhausen Holm, E Obermeier, "Elastic properties and microstructure of LPCVD polysilicon films," *Journal of Micromechanical and Microengineering*, 6 (1996), pp.436-446
- [4] G. A. Macdonald, "A review of low cost accelerometer for vehicle dynamics," *Sensors and Actuators A*, Vol. 21-23, pp. 303-307, (1990).
- [5] C. L. Chang, P. Z. Chang, "Micro electrode array- A new method for design of electrostatic micro actuators and capacitive micro sensors," *SPIE*, 1997.
- [6] Roland Schinzinger, *Conformal mapping: methods and applications*, Elsevier, 1991.

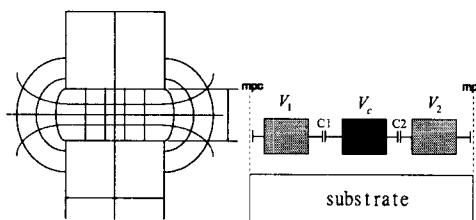
六 圖表

多晶矽厚度	$2 \mu\text{m}$
梳狀電極長寬	$120 \mu\text{m} \times 4 \mu\text{m}$
電容對數	64 組
電容間隙	$2 \mu\text{m}$
總電容(FEM)	0.157 pF
電容變化(50g)	3.84 fF

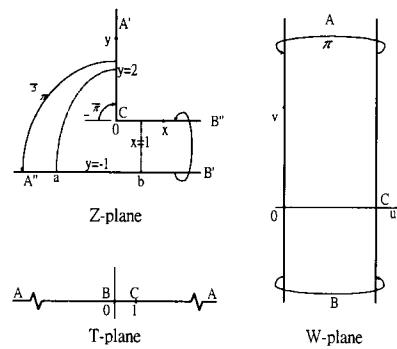
圖表一 感測機構規格



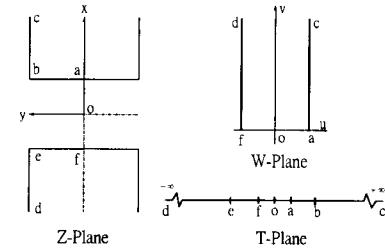
圖表二 梳狀加速度規示意圖



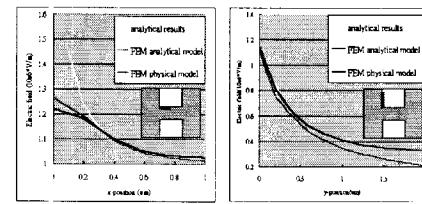
圖表三 矩形電極 fringe 效應分析



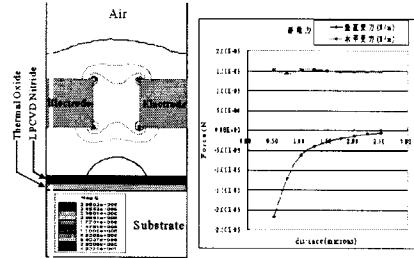
圖表四 Conformal mapping (I)



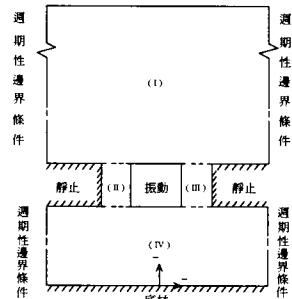
圖表五 Conformal mapping (II)



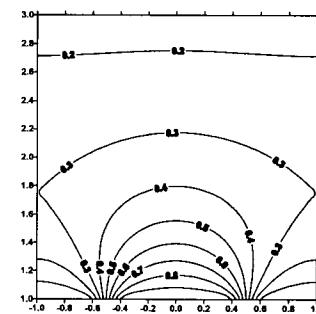
圖表六 電場解析解與數值模擬比較



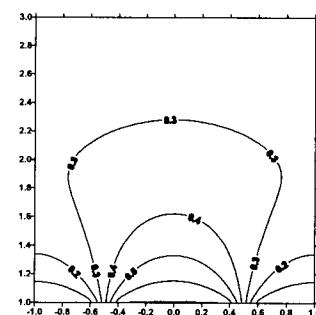
圖表七 考慮基材效應之靜電力關係



圖表八 單位梳狀結構流場邊界示意



圖表九 (I) 區  $\bar{V}_0$  在振動起始瞬間  
之等速度圖



圖表十 (I) 區  $\bar{V}_0$  在  $1/8$  振動周  
期瞬間之等速度圖