

# 行政院國家科學委員會專題研究計畫 成果報告

軟物質力學的理論與實驗研究—磁流變流體理論研究與顆  
粒材料受力下之沉陷、分離與流動(2/2)  
研究成果報告(完整版)

計畫類別：個別型  
計畫編號：NSC 95-2221-E-002-451-  
執行期間：95年08月01日至96年07月31日  
執行單位：國立臺灣大學應用力學研究所

計畫主持人：陳國慶

計畫參與人員：博士班研究生-兼任助理：林祺皓

處理方式：本計畫可公開查詢

中華民國 96年10月04日

# 行政院國家科學委員會專題研究計畫期末報告

## 軟物質力學的理論與實驗研究—磁流變流體理論研究與顆粒材料 受力下之沉陷、分離與流動(II)

Theoretical and experimental researches on the mechanics of soft matters – on the theory of magnetorheological fluids and on the settlement, separation and flow of granular materials under the influence of vibration (II)

計畫編號：NSC-95-2211-E-002-451

計畫期限：95年8月1日至96年7月31日

主持人：陳國慶 副教授 臺灣大學應用力學研究所

### 一、 中文摘要

軟物質為近年來學界所日益重視之材料，其範例為液晶、聚合物、電流變流體、磁性流體、肥皂泡、血液、顆粒材料等等，其中磁流變流體與顆粒材料在土木工程領域之阻尼元件與結構材料的應用上具有其重要性。本研究計畫以顆粒材料為分析之對象，由實驗途徑，我們分析顆粒材料在受到垂直振動下之沉陷、大小顆粒分離與流動的複雜行為，其中大小顆粒在振動下之聚集、分離與振盪的課題，我們做了一些先驅性之討論。

**關鍵詞：**顆粒材料、巴西堅果效應、顆粒振盪

### Abstract

Soft matters, which include liquid crystals, polymers, electro-rheological fluids, magnetic fluids, soap bubbles, bio-membranes, and granular materials, and so on, have received much academic attention recently. Among them, magnetorheological fluids and granular materials are of particular importance in the applications of dampers and structural materials to the area of civil engineering. In this project, we focus on the studies of granular materials and perform several experimental works on the complicated responses of granular materials. In the

experiments, we observe the phenomena of the settlement, segregation, and flow of granular materials under the influence of vertical vibrations. Among them, we have perform a pioneering work on the granular clustering, separation, and oscillation.

**Keywords:** Granular materials, Brazil-nut effect, Granular oscillation

### 二、緣由與目的

顆粒氣體的特性之一乃為其氣體粒子在彼此碰撞之後，會『自發性』的聚集為密集區與疏鬆區。此處所述的『顆粒氣體』並不是氣態，而是宛如氣體分子一般，能夠在系統中『自由運動』的『固體顆粒』，好比是漂浮在空氣中的塵埃。顆粒產生聚集現象的原因，是非彈性碰撞造成能量消散，此時回復係數  $e$  範圍為  $0 \leq e < 1$ ；於完全彈性碰撞時， $e = 1$ ，顆粒不會產生聚集行為。顆粒自發性聚集現象，又被稱為『馬克士威爾惡魔效應』。然而，直到1991年之後，才有學者以電腦模擬方式研究顆粒聚集現象。1996年，Schlichting 與 Nordmeier 透過垂直振動實驗，證實顆粒聚集現象存在。1999年，Eggers 提出通量模型，以相當簡化的方程式解釋顆粒聚集現象。2005年，Lambiotte 等人混合兩種尺寸的顆粒，進行顆粒氣體二維模擬時，發現大小顆粒來回震盪現象。由於顆粒來回震盪所需時間相當穩定，具有固定週期，故將此物理現象命名為『顆粒鐘』（granular clock）。2006年10月，Viridi 等人首次以

實驗方式證實顆粒鐘現象確實存在。他們將大小兩種尺寸的玻璃珠，放置於以隔板二等分之狹窄容器中，進行垂直振動實驗。為了更深入研究顆粒鐘現象，在參考 Viridi 的實驗後，我們將實驗容器自原本的二等分（二格）增加一格，進行三格容器實驗，發現前人未曾察覺之豐富現象。本研究亦設計了一個四等分容器，進行四格容器實驗，以驗證新發現的物理現象。

### 三、結果與討論

本實驗儀器架設於水平光學桌上，並以水平量測儀校正確保實驗容器呈現水平狀態。實驗設備包含六部分，分別是（一）振動系統；（二）量測系統；（三）實驗容器；（四）實驗顆粒；（五）影像擷取系統；（六）抗靜電器材。

實驗採用一系列 AFBMA 500 級無磁性不鏽鋼珠，直徑公差 0.0005 英吋，圓度公差 0.0005 英吋，相互公差 0.001 英吋，在直徑 2mm 下誤差僅 0.635%。實驗採用的不鏽鋼珠直徑分別為 6mm，5mm，4mm，3mm，2mm 與 1.5mm。

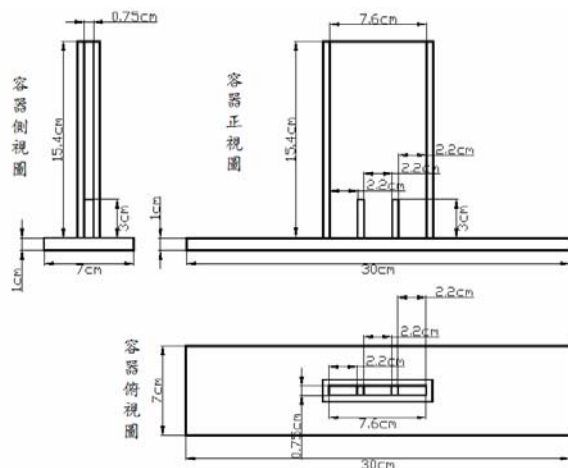


圖 3-1 三格容器實驗設計尺寸

分析比較實驗結果，可知欲產生顆粒鐘現象，有諸多限制。首先，大鋼珠直徑至少要是小鋼珠直徑的兩倍以上。次之，系統必須非常狹窄，亦即容器前後縱深必須是大顆粒直徑兩倍以下（在縱深 7.5mm 的三格容器中，配置 3mm 與 1.5mm 的鋼

珠，無法產生顆粒鐘現象）。此外，大小顆粒混合體積不可過少，於容器單一區域堆疊的高度，至少要超過隔板高度一半。產生明確顆粒鐘現象所需的大小鋼珠粒數比，目前尚未明瞭，仍須以實驗測試後方可得知。我們曾嘗試將振動頻率增加至 30Hz，結果鋼珠在容器中劇烈運動，正面觀察時不再是自由落體，而像是落葉一般緩慢上升下降。此時，側面觀察容器，可看到顆粒在容器縱深前後兩端，以 Z 字形快速來回碰撞。最後，本研究決定以 4mm 鋼珠 25 顆，2mm 鋼珠 170 顆，系統振幅 4mm，振動頻率 20Hz 做為三格容器實驗的基準組，此時系統振動加速度約為 6.44g。

### 實驗步驟

- (1) 在三格壓克力容器內部塗佈抗靜電液，並擦拭乾淨。將容器鎖在振動台上，以水平量測儀確認水平。
- (2) 將 ProBal II 儀器架設完畢，並固定加速規於壓克力容器底座，以便量測系統振幅。
- (3) 均勻混合 4mm 鋼珠 25 顆，2mm 鋼珠 170 顆，置入三格壓克力容器左區後，蓋上容器頂蓋。
- (4) 以信號產生器輸入振動台 20Hz 正弦波訊號，調整信號大小使振幅為 4mm。當大小顆粒首次聚集至容器另一個區域時，開始紀錄（不取第一次聚集的數據，因其包含振幅自 0mm 增加至 4mm 的暫態）。紀錄每次顆粒聚集耗費的時間與聚集發生的區域（容器自左至右分別是左區、中區、右區，如圖 5-1）。
- (5) 紀錄 10 次聚集後，停止實驗。將鋼珠取出接地，並用抗靜電槍噴灑容器內部去除靜電。
- (6) 重複步驟（3）至（5）。每完成 60 次聚集清洗烘乾鋼珠一次，每完成 500 次聚集重新於壓克力容器內部塗佈抗靜電液一次。實驗初始狀態，分別將所有鋼珠放置在容器左區 33 次、中區 34 次、右區 33 次。因此，每組混合顆粒會進行 100 次實驗，得

到 1000 次聚集的實驗數據。

- (7) 混合 5mm 鋼珠 13 顆與 2mm 鋼珠 170 顆，重複步驟 (6)。
- (8) 混合 6mm 鋼珠 7 顆與 2mm 鋼珠 170 顆，重複步驟 (6)。
- (9) 混合 4mm 鋼珠 25 顆與 2mm 鋼珠 187 顆，重複步驟 (6)。
- (10) 混合 4mm 鋼珠 25 顆與 2mm 鋼珠 204 顆，重複步驟 (6)。

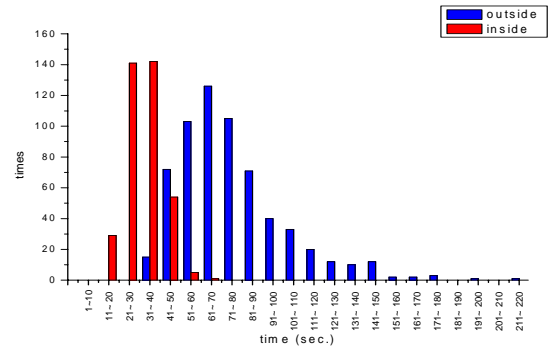


圖 3-3 4mm 鋼珠 25 顆，2mm 鋼珠 170 顆，內外側時間差異

### 實驗結果

三格容器實驗照片請見圖 3-2。此組實驗混合 4mm 鋼珠 25 顆，2mm 鋼珠 170 顆於容器右區，系統振幅 4mm，振動頻率 20Hz。圖自左至右分別為靜止狀態（第 0 秒）；大小顆粒左右分離（第 28 秒）；大顆粒追隨至小顆粒聚集區（第 68 秒）；所有顆粒聚集於左區（第 91 秒）。

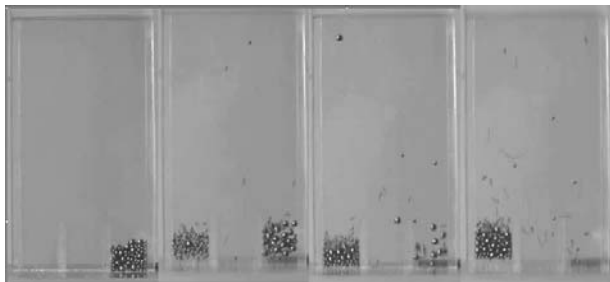


圖 3-2 三格容器實驗照片

由圖 3-3 可看出，所有顆粒離開外側聚集區需要的時間，明顯大於離開內側聚集區耗費的時間。統整 1000 次聚集的數據，可知顆粒離開外側聚集區平均耗時 78.69 秒，離開內側聚集區平均耗時 31.96 秒，（離開外側/離開內側）聚集區時間比值為 2.46。此外，觀察六種顆粒聚集區移動狀況（左至中、左至右、中至左、中至右、右至中、右至左），可以發現聚集區跳過一個隔板（左至中、右至中、中至左、中至右）的機率大致相等，約在 18.7% 上下；而跳過兩個隔板（左至右、右至左）的機率約為 12.6%，如圖 3-4 所示。

### 3.1 不同大顆粒直徑

(一) 4mm 鋼珠 25 顆，2mm 鋼珠 170 顆  
 混合 4mm 鋼珠 25 顆，2mm 鋼珠 170 顆，整理 1000 次聚集實驗數據。將左至中、左至右、右至中、右至左四行數據合計為『外側』，代表所有顆粒原本聚集於容器外側；中至左、中至右二行數據合計為『內側』，代表所有顆粒原本聚集於容器內側。整理過後如圖 3-3：

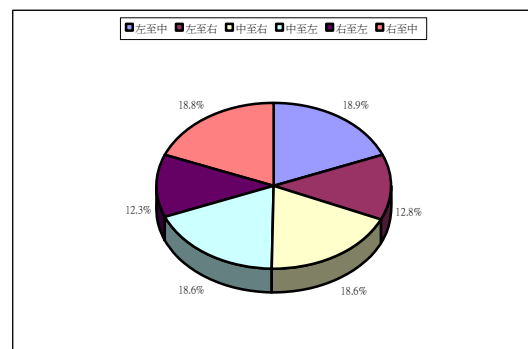


圖 3-4 4mm 鋼珠 25 顆，2mm 鋼珠 170 顆，六種聚集區移動機率

(二) 5mm 鋼珠 13 顆，2mm 鋼珠 170 顆  
 混合 5mm 鋼珠 13 顆（5mm 鋼珠 13 顆與 4mm 鋼珠 25 顆體積相當），2mm 鋼珠 170 顆，整理 1000 次聚集實驗數。將左至中、左至右、右至中、右至左四行數據合計為『外側』，代表所有顆粒原本聚集

於容器外側；中至左、中至右二行數據合計為『內側』，代表所有顆粒原本聚集於容器內側。整理過後如圖 3-5：

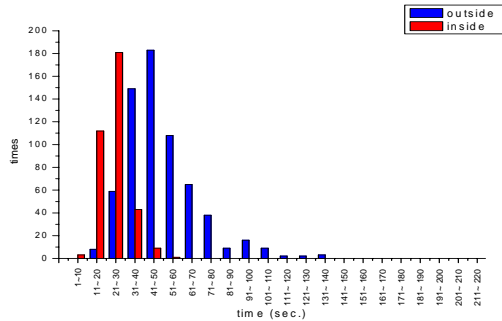


圖 3-5 5mm 鋼珠 13 顆，2mm 鋼珠 170 顆，內外側時間差異

同樣的，所有顆粒離開外側聚集區需要的時間，明顯大於離開內側聚集區耗費的時間。統整 1000 次聚集的數據，可知顆粒離開外側聚集區平均耗時 50.46 秒，離開內側聚集區平均耗時 23.99 秒，（離開外側/離開內側）聚集區時間比值為 2.10。此外，聚集區跳過一個隔板（左至中、右至中、中至左、中至右）的機率大致相等，約在 17.5% 上下；而跳過兩個隔板（左至右、右至左）的機率約為 15%，如圖 3-6 所示。

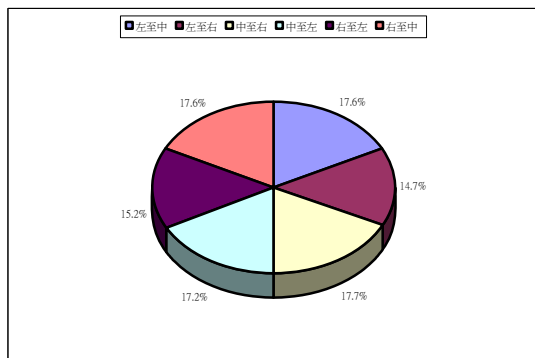


圖 3-6 5mm 鋼珠 13 顆，2mm 鋼珠 170 顆，六種聚集區移動機率

(三) 6mm 鋼珠 7 顆，2mm 鋼珠 170 顆

混合 6mm 鋼珠 7 顆（6mm 鋼珠 7 顆與 4mm 鋼珠 25 顆體積相當），2mm 鋼珠 170 顆，整理 1000 次聚集實驗數據。將左

至中、左至右、右至中、右至左四行數據合計為『外側』，代表所有顆粒原本聚集於容器外側；中至左、中至右二行數據合計為『內側』，代表所有顆粒原本聚集於容器內側。整理過後如圖 3-7：

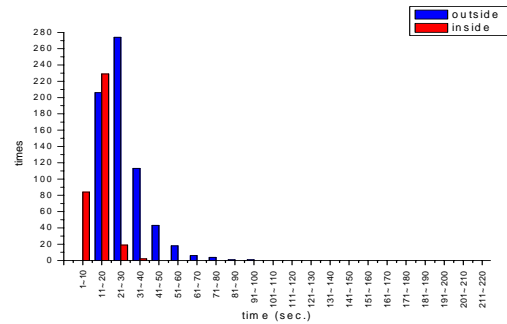


圖 3-7 6mm 鋼珠 7 顆，2mm 鋼珠 170 顆，內外側時間差異

同樣的，所有顆粒離開外側聚集區需要的時間，明顯大於離開內側聚集區耗費的時間。統整 1000 次聚集的數據，可知顆粒離開外側聚集區平均耗時 27.45 秒，離開內側聚集區平均耗時 13.35 秒，（離開外側/離開內側）聚集區時間比值為 2.06。此外，聚集區跳過一個隔板（左至中、右至中、中至左、中至右）的機率大致相等，約在 16.5% 上下；而跳過兩個隔板（左至右、右至左）的機率約為 17.1%，如圖 3-8 所示。

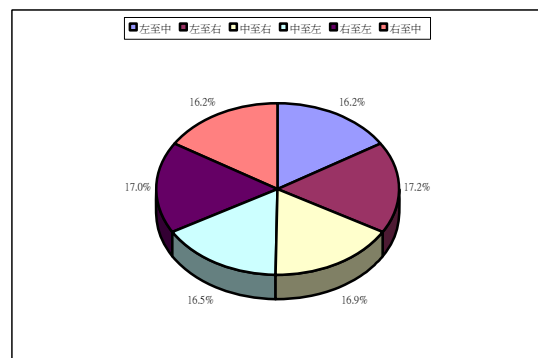


圖 3-8 6mm 鋼珠 7 顆，2mm 鋼珠 170 顆，六種聚集區移動機率

這一系列實驗的控制變因為大顆粒直徑，而大顆粒總體積大致相等。比較這三組實驗結果，可知當大小顆粒直徑比愈

大，完成聚集所需的時間愈短，如圖 3-9、3-10 與 3-11。此外，（離開外側/離開內側）聚集區時間比值也隨之愈來愈小，如圖 3-12。顆粒聚集區移動兩格的機率也會愈來愈高，甚至超過移動一格的機率。圖 3-13 為顆粒離開外側聚集區時，移動兩格的機率，隨大顆粒粒徑增加上升。同樣是離開外側聚集區，顆粒聚集區移動二格耗費的時間，會略大於移動一格耗費的時間，如圖 3-14。

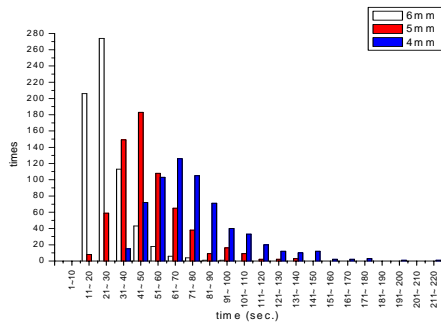


圖 3-9 不等大顆粒直徑，離開外側聚集區時間

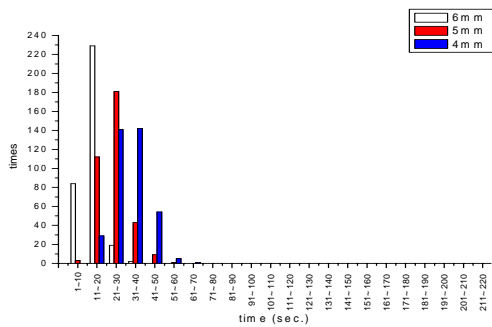


圖 3-10 不等大顆粒直徑，離開內側聚集區時間

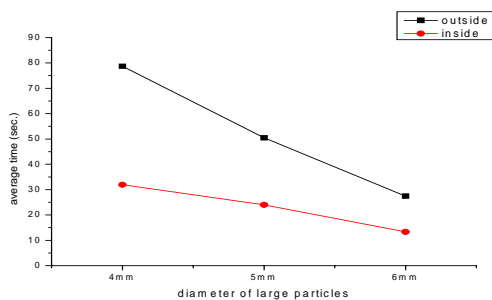


圖 3-11 不等大顆粒直徑，離開內、外側

聚集區所需平均時間

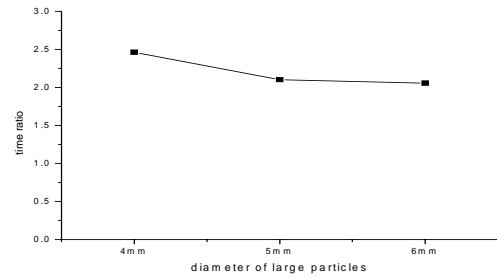


圖 3-12 不等大顆粒直徑，（離開外側/離開內側）聚集區時間比值

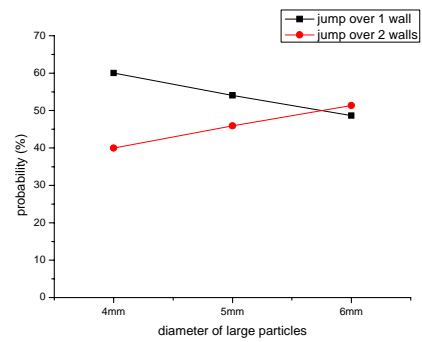


圖 3-13 不等大顆粒直徑，離開外側聚集區，移動不等格數的機率

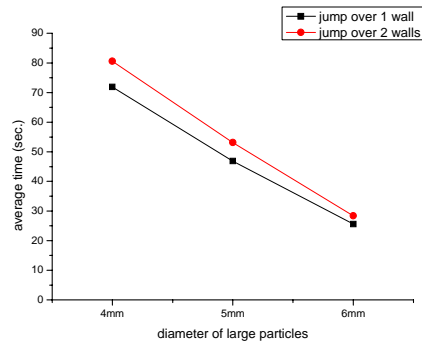


圖 3-14 不等大顆粒直徑，離開外側聚集區，移動不等格數的時間

### 3.2 不等小顆粒粒數

（一）4mm 鋼珠 25 顆，2mm 鋼珠 170 顆  
吾人仍以此組實驗數據為基準組，詳情請參照前文。

（二）4mm 鋼珠 25 顆，2mm 鋼珠 187 顆  
我們增加小顆粒粒數 10%，即混合 4mm 鋼珠 25 顆，2mm 鋼珠 187 顆。整理

1000 次聚集實驗數據。表左側為所有大小顆粒完成聚集所需時間。整理過後如圖 3-15：

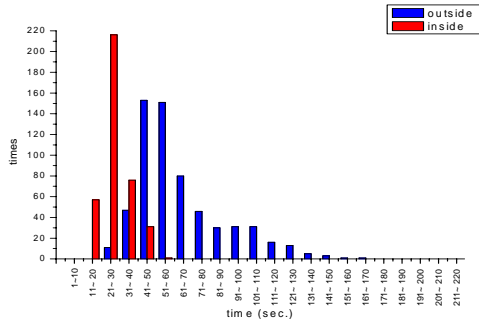


圖 3-15 4mm 鋼珠 25 顆，2mm 鋼珠 187 顆，內外側時間差異

同樣的，所有顆粒離開外側聚集區需要的時間，明顯大於離開內側聚集區耗費的時間。統整 1000 次聚集的數據，可知顆粒離開外側聚集區平均耗時 65.55 秒，離開內側聚集區平均耗時 27.53 秒，（離開外側/離開內側）聚集區時間比值為 2.38。此外，聚集區跳過一個隔板（左至中、右至中、中至左、中至右）的機率大致相等，約在 19.3% 上下；而跳過兩個隔板（左至右、右至左）的機率約為 11.5%，如圖 3-16 所示。

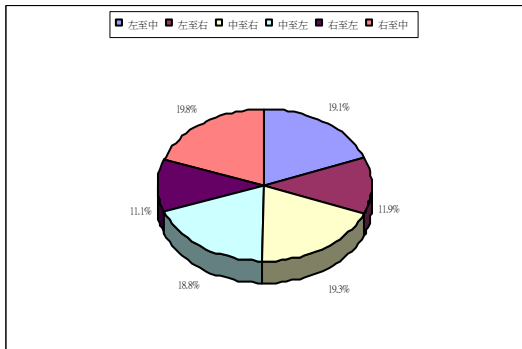


圖 3-16 4mm 鋼珠 25 顆，2mm 鋼珠 187 顆，六種聚集區移動機率

(三) 4mm 鋼珠 25 顆，2mm 鋼珠 204 顆  
我們增加小顆粒粒數 20%，即混合 4mm 鋼珠 25 顆，2mm 鋼珠 204 顆。整理 1000 次聚集實驗數據。整理過後如圖 3-17：

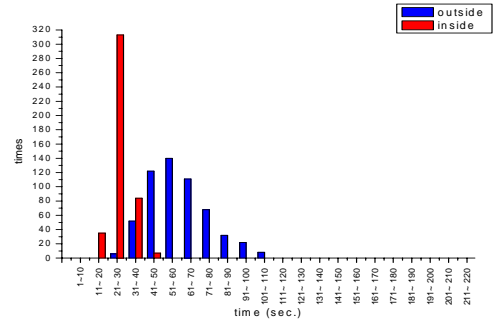


圖 3-17 4mm 鋼珠 25 顆，2mm 鋼珠 204 顆，內外側時間差異

同樣的，所有顆粒離開外側聚集區需要的時間，明顯大於離開內側聚集區耗費的時間。統整 1000 次聚集的數據，可知顆粒離開外側聚集區平均耗時 60.72 秒，離開內側聚集區平均耗時 26.73 秒，（離開外側/離開內側）聚集區時間比值為 2.27。此外，聚集區跳過一個隔板（左至中、右至中、中至左、中至右）的機率大致相等，約在 22.1% 上下；而跳過兩個隔板（左至右、右至左）的機率約為 5.8%，如圖 3-18 所示。

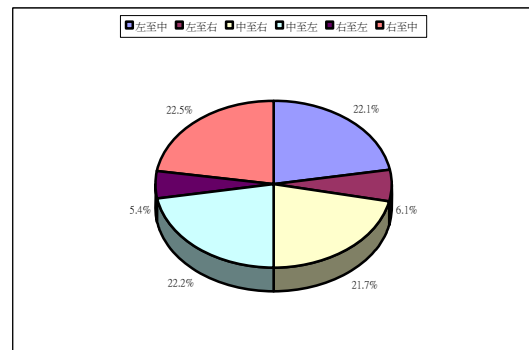


圖 3-18 4mm 鋼珠 25 顆，2mm 鋼珠 204 顆，六種聚集區移動機率

這一系列實驗的控制變因為小顆粒粒數。比較這三組實驗結果，可知當小顆粒粒數愈多，完成聚集所需的時間愈短，如圖 3-19、3-20 與 3-21。此外，（離開外側/離開內側）聚集區時間比值也隨之愈來愈小，如圖 3-22。顆粒聚集區移動兩格的機率也會愈來愈低，如圖 3-23 為顆粒離開外側聚集區時，移動兩格的機率。同樣是離開外側聚集區，顆粒聚集區移動二格耗費的時間，會略大於移動一格耗費的時間，

如圖 3-24。

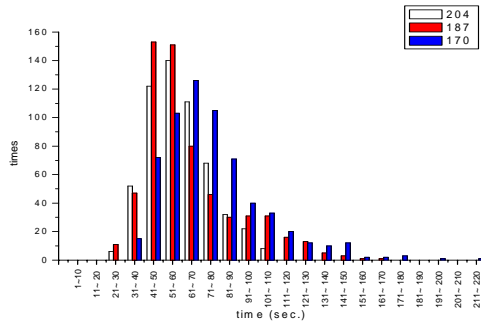


圖 3-19 不等小顆粒粒數，離開外側聚集區時間

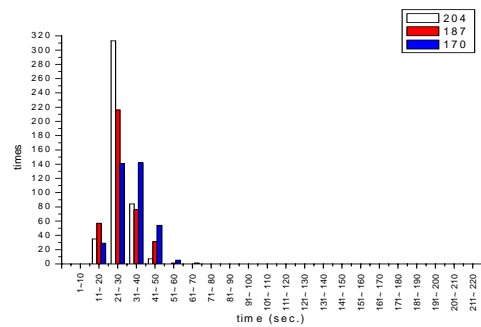


圖 3-20 不等小顆粒粒數，離開內側聚集區時間

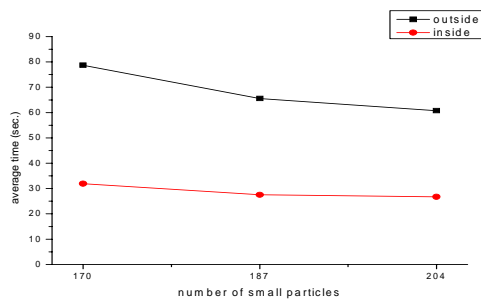


圖 3-21 不等小顆粒粒數，離開內、外側聚集區所需平均時間

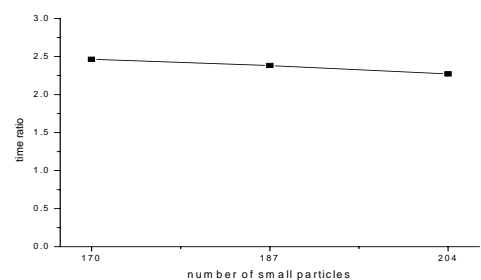


圖 3-22 不等小顆粒粒數，（離開外側/離開內側）聚集區時間比值

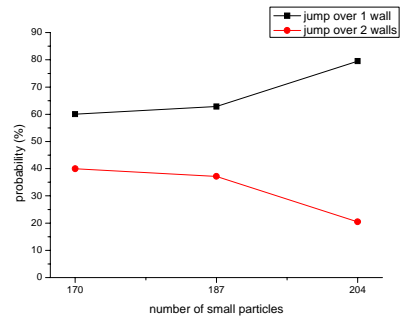


圖 3-23 不等小顆粒粒數，離開外側聚集區，移動不等格數的機率

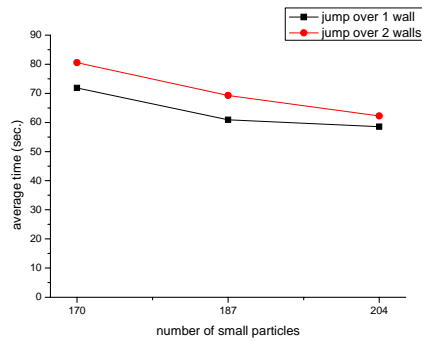


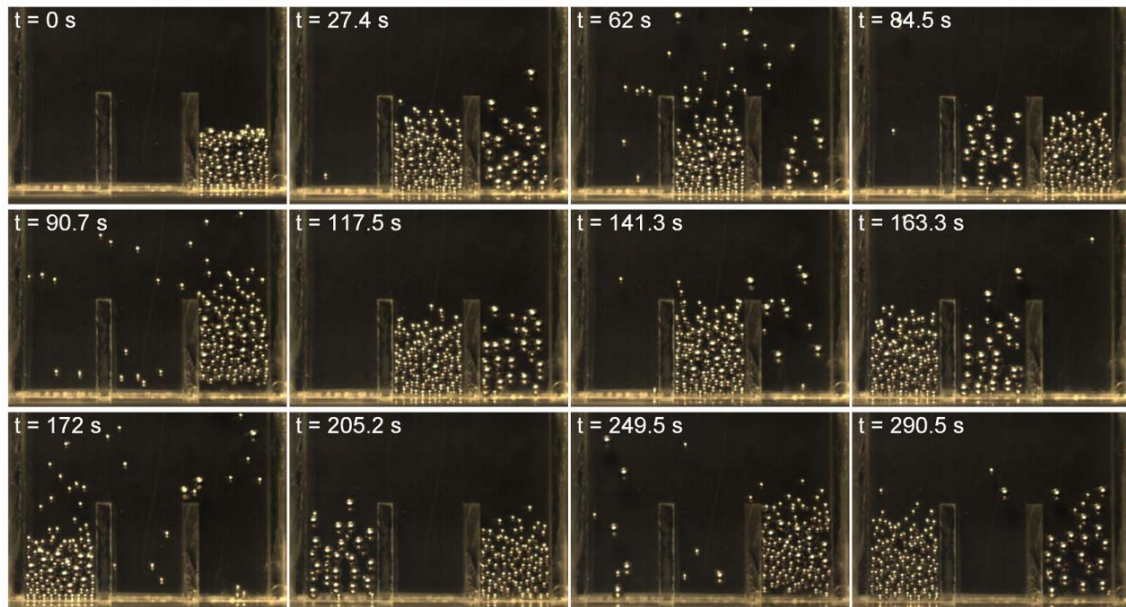
圖 3-24 不等小顆粒粒數，離開外側聚集區，移動不等格數的時間

### 3.3 顆粒追隨現象

在進行三格容器實驗時，我們發現了一個特殊的物理現象，並首先將其命名為『顆粒追隨』（granular follower）。Lambiotte (2005) 與 Viridi (2006) 等人進行的顆粒鐘現象研究，均為顆粒追隨現象於二等分系統中的特例。

首先，將全部大小顆粒混合於三格容器任一區，此處以左區為例。由顆粒鐘流程可知，小顆粒會先跳離左區，接著是大顆粒離開，大小顆粒有相位延遲。小顆粒跳離左區後，會聚集於中區或右區，此乃機率問題。為了方便敘述，此處設定小顆粒跳離左區後聚集於右區。當小顆粒完成聚集，大顆粒不再有小顆粒壓制，也跟著





跳離左區時，有中區與右區兩個選項可供選擇。此時中區幾乎沒有顆粒存在，右區則全是小顆粒。有趣的是，大顆粒『必然』會追隨小顆粒的腳步，跳過幾乎沒有顆粒存在的中區，聚集在小顆粒先行聚集的右區，此即『顆粒追隨現象』。

經過數千次的觀察，發現顆粒追隨現象必然存在，無一例外。當大顆粒開始離開聚集區時，他可能跳至幾乎沒有顆粒的區域，或是已聚集小顆粒的區域。若跳至幾乎沒有顆粒的區域，由於沒有任何拘束，大顆粒非常容易跳出，無法聚集。若跳至小顆粒聚集的區域，大顆粒會被小顆粒困住，慢慢下沉，不再跳出。最後，大顆粒會全部聚集於小顆粒聚集的區域，使小顆粒再度開始跳出，重複上述流程。此乃『顆粒追隨現象』的成因。

當系統二等分時，顆粒跳出原聚集區後，僅有一個區域可去。因此，二等分容器的顆粒追隨現象，會有固定週期（Viridi 實驗結果週期誤差僅 9%），故稱之為『顆粒鐘』。然而，三格以上的顆粒追隨現象，小顆粒跳出原聚集區後，會有二個以上的空格區域可供選擇。這些空格區域會彼此競爭、搶奪小顆粒，直到其中一個區域的小顆粒超過臨界濃度，形成穩定新聚集區，將所有小顆粒納為己有。由於空格區域彼此競爭，以及容器內外側邊界條件不同的原因，三格以上的顆粒追隨現象不再

有固定週期。

圖 3-25 為三格顆粒追隨流程圖。初始混合 4mm 鋼珠 25 顆、2mm 鋼珠 204 顆於容器右區，系統振幅 4mm，振動頻率 20Hz。自左上至右下，第一排時間為 0 秒、27.4 秒、62 秒、84.5 秒，第二排時間為 90.7 秒、117.5 秒、141.3 秒、163.3 秒，第三排時間為 172 秒、205.2 秒、249.5 秒、290.5 秒。如該流程圖所示，當振動開始，小顆粒會先跳出形成新聚集區，使大小顆粒分離；緊接著，大顆粒追隨至小顆粒的新聚集區，大小顆粒再度混合，如此循環不斷。

若初始狀態是大小顆粒分離，也會產生顆粒追隨現象，如圖 3-26。初始放置 4mm 鋼珠 25 顆於容器右區，2mm 鋼珠 204 顆於容器左區，系統振幅 4mm，振動頻率 20Hz。自左至右，時間分別為 0 秒、44.2 秒、97.9 秒、142.6 秒。當振動開始，大顆粒追隨至小顆粒聚集區，大小顆粒混合；大小顆粒混合後，小顆粒開始跳出，形成新聚集區，使大小顆粒分離；緊接著，大顆粒追隨至小顆粒的新聚集區，大小顆粒再度混合，如此循環不斷。

### 3.4 三格顆粒追隨模型

Viridi 於 2006 年進行二格顆粒鐘實驗時，改寫 Lambiotte 的理論[16]，提出了一個簡易二格顆粒鐘模型[20]，詳情請參閱第二章。回顧 Viridi 的模型方程式如下（假

設顆粒原聚集區為左區)：

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -nF(n, m)P(S_L) + (1-n)F(1-n, 1-m)P(S_R)$$

$$\frac{\partial m}{\partial t} = -mF(n, m)Q(S_L) + (1-m)F(1-n, 1-m)Q(S_R)$$

$$\frac{\partial S_L}{\partial t} = +\lambda(nm - S_L)$$

$$\frac{\partial S_R}{\partial t} = +\lambda((1-n)(1-m) - S_R)$$

其中的  $F(n, m)$  為顆粒離開左區的通量， $n$  代表小顆粒、 $m$  代表大顆粒在左區佔系統總顆粒數的比例， $P$ 、 $Q$  描述大小顆粒垂直分離現象對  $F(n, m)$  的影響， $S_L$ 、 $S_R$  描述左區與右區的大小顆粒垂直分離現象， $\lambda$  與分離機制緩和時間有關。

在此通量模型的架構下，我們探討模型中各個參數對振盪行為之影響。根據朱立民所完成之三格實驗(左區、中區與右區分別以"1"、"2"和"3"代表)，當顆粒聚集於第1或第3區間時，離開該區間跳躍至另一區間的選擇有一格與兩格的機會，經實驗歸納機率分別為 0.6 與 0.4；當顆粒聚集於第2區間時，跳躍至第1區或第3區的機率相等，分別為 0.5。為了將顆粒在不同區間的跳躍機率引入，吾人根據 Viridi 的模型拓展出以下方程組：

$$\frac{dn_1}{dt} = -n_1 S_1 F_{m_1}^{n_1} + n_2 P_{21} S_2 F_{m_2}^{n_2} + n_3 P_{31} S_3 F_{m_3}^{n_3} \quad --(a)$$

$$\frac{dn_2}{dt} = -n_2 S_2 F_{m_2}^{n_2} + n_1 P_{12} S_1 F_{m_1}^{n_1} + n_3 P_{32} S_3 F_{m_3}^{n_3} \quad --(b)$$

$$\frac{dm_1}{dt} = -m_1(1-S_1)F_{m_1}^{n_1} + m_2 P_{21}(1-S_2)F_{m_2}^{n_2} + m_3 P_{31}(1-S_3)F_{m_3}^{n_3} \quad --(c)$$

$$\frac{dm_2}{dt} = -m_2(1-S_2)F_{m_2}^{n_2} + m_1 P_{12}(1-S_1)F_{m_1}^{n_1} + m_3 P_{32}(1-S_3)F_{m_3}^{n_3} \quad --(d)$$

$$\frac{dS_1}{dt} = \lambda(n_1 m_1 - S_1) \quad --(e)$$

$$\frac{dS_2}{dt} = \lambda(n_2 m_2 - S_2) \quad --(f)$$

$$\frac{dS_3}{dt} = \lambda(n_3 m_3 - S_3) \quad --(g)$$

其中  $n_k$  ( $k=1\sim 3$ ) 代表小顆粒聚集在第  $k$  區間， $m_k$  代表大顆粒聚集於第  $k$  區間， $P_{kk'}$  ( $k'=1\sim 3, k'\neq k$ ) 代表聚集顆粒由第  $k$  區間跳躍至第  $k'$  區間的機率(如  $P_{12}$  表示聚集顆粒由第 1 區間跳躍至第 2 區間之機率，各個跳躍機率分別為  $P_{12} = P_{32} = 0.6$ ， $P_{13} = P_{31} = 0.4$ ， $P_{21} = P_{23} = 0.5$ )， $F_{m_i}^{n_i} \equiv F(n_i, m_i) = e^{-\frac{n_i^2 + Rm_i^2}{A}}$ ， $n_3 = 1 - n_1 - n_2$ ， $m_3 = 1 - m_1 - m_2$ 。

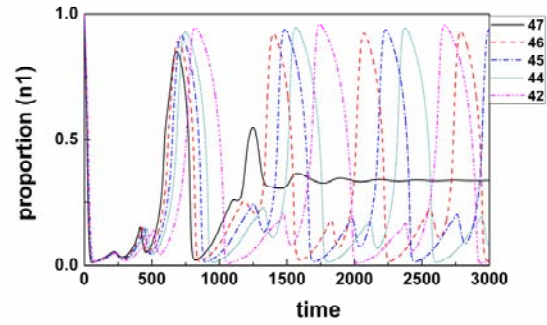


圖 3.25 不同  $\alpha$  與小顆粒聚集在第 1 區間之關係

方程式(a~d)代表大小顆粒在各區間的濃度演化，其中各方程式的第一項以負號表示聚集顆粒由該區間離開的通量，使得此區間的顆粒濃度降低；第二、三項以正號表示顆粒由其他兩個區間跳入此區間的顆粒通量，使得該區間的顆粒濃度增加。此外，機率的引入是在第二、三項，使得顆粒跳躍格數能夠呈現分配，以便符合實驗現象。方程式(e~g)代表各區間的垂直分離演化，並由  $\lambda$  調整分離機制的鬆弛時間。

### 3.4.1 參數分析

本模型中總共有五個參數 ( $R, a, f, \alpha, \lambda$ ) 與  $n_1, n_2, m_1, m_2, S_1, S_2$  與  $S_3$  等 7 個初始值必須給定，因此吾人先設定大小粒徑顆粒匹配的影響值 ( $R=1.5$ )、振幅大

小為  $6\text{mm}$  ( $a=0.006$ )、振動頻率為  $20\text{Hz}$  ( $f=20$ )、能量修正參數 ( $\alpha=44$ )、分離機制的緩和時間 ( $\lambda=0.004$ )，以及七個初始值  $n_1=1.0$ 、 $n_2=0$ 、 $m_1=1.0$ 、 $m_2=0$ 、 $S_1=0.7$  與  $S_2=S_3=0$  當作基本參數，再逐一調整各個參數，以利分析個別影響性。其中  $n_1=m_1=1.0$  表示初始狀態為大小顆粒全部放置於第 1 區， $S_1=0.7$  代表顆粒聚集在第 1 區間的垂直分離程度。

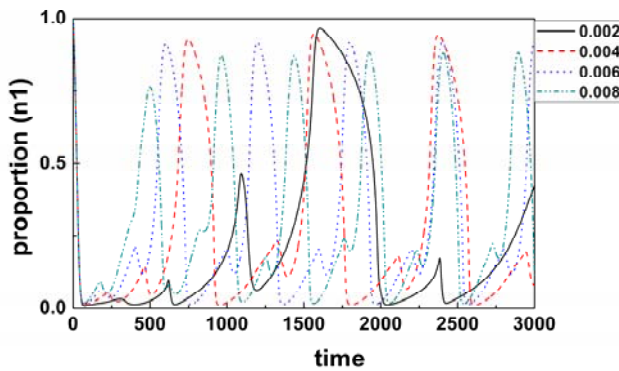


圖 3.26 不同  $\lambda$  與小顆粒聚集在第 1 區間之關係

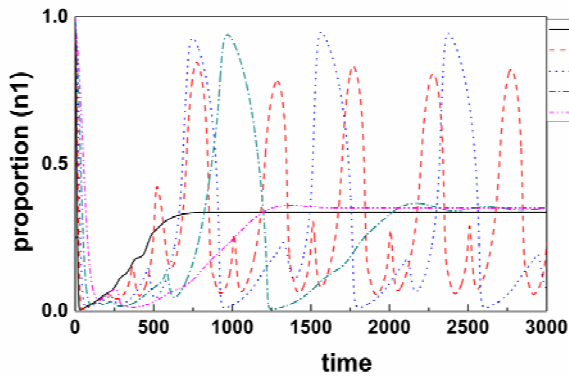


圖 3.27 不同  $R$  與小顆粒聚集在第 1 區間之關係

(1) 調整  $\alpha$  值 (即改變能量修正參數)，觀察小顆粒的聚集現象。由圖 2 可以得知，當  $\alpha$  值逐漸加大，會縮短小顆粒的振盪週期 (縮短聚集在第 1 區間之振盪週期)，且當  $\alpha=47$  時，會使得週期性振盪現象無法產生，反而是趨向於平衡態 (即各區間呈現均勻分布，濃度比例均約為  $0.3$ )。造成平衡態的原因是  $\alpha$  代表能量修正係數，當給定較大的值時，即供給較大的輸入能量 ( $A = \alpha(af)^2$ )，促使顆粒趨向於均布態。

(2) 調整  $\lambda$  值 (即改變垂直分離機制的緩和時間)，由圖 3.26 之曲線，當  $\lambda$  值愈大，則振盪週期愈短，且在區間內所能達到的最大聚集濃度會逐漸下降，原因是較大的  $\lambda$  值，會縮短大小顆粒聚集時的垂直分離時間，促使振盪週期縮短。

(3) 若變化  $R$  值，即改變大小顆粒之匹配，由圖 3.27 所示，當  $R=1.0$  時，因顆粒通量模型的演化方程式無法分辨出大顆粒或小顆粒之差異 ( $n$  與  $m$ )，得振盪現象消失，進而呈現均勻分布狀態；而當  $R=2.0$  時，大顆粒的數量匹配過大，即給予較多量的大顆粒，導致小顆粒的影響不明顯，以至於亦無法產生振盪現象。

(4) 當調整  $S_1$  的起始值，即改變起始大小顆粒堆積時的垂直分離程度，由圖 3.28 的分析結果，不同的初始值，振盪現象的差異並不大，惟有當  $S_1=0.5$  時，顆粒的振盪現象呈現較差的狀態，即小顆粒聚集在第 1 區間的最高濃度比例無法達到較高的值，比例值大約為  $0.4$ 。此外，觀察  $S_1$  曲線與振盪現象之關係，由圖 6 所示， $S_1$  的值介於  $0\sim 1$  之間，亦呈現週期性振盪，最小值約發生於大顆粒開始聚集時；最大值則發生於大顆粒欲離開第 1 區間時。

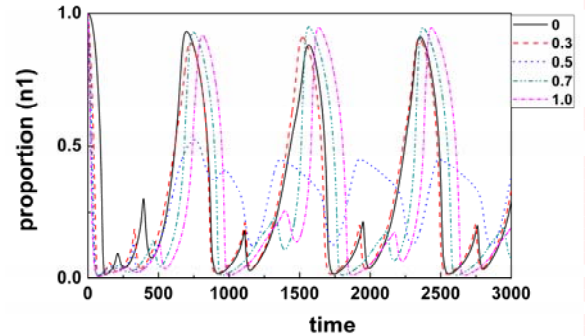


圖 3.28 不同  $S_1$  與小顆粒聚集在第 1 區間之關係

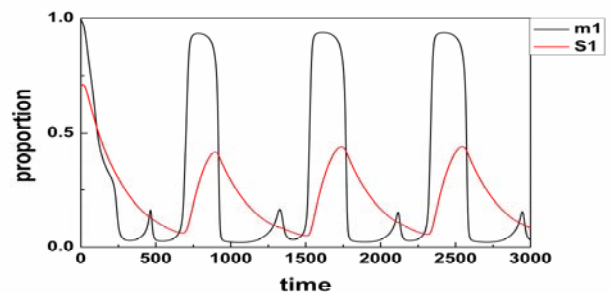


圖 3.29  $S_1$  曲線與顆粒聚集之關係

其次，改變  $S_2 (= S_3)$  的起始值，探討大顆粒聚集在第 1 區間的振盪現象。由圖 3.30 結果顯示，當  $S_2$  與  $S_3$  的值愈高，會逐漸延遲振盪現象的發生，但不影響振盪過程中的週期大小。目前有關  $S_i$  參數的性質，因與非彈性碰撞及反巴西堅果效應有關，使得正確的性質尚未完全清楚，有待未來更深入一步的探討。

(5) 探討機率參數之影響性，若將  $P_{12}$  與  $P_{21}$  的機率加大，顆粒應會愈趨向聚集於第 1 與第 2 區間，圖 3.31 表示大顆粒聚集於第 1~3 區間的時間演化，由曲線可知，當  $P_{12}, P_{21}$  設為 0.6 或 0.7 時，顆粒僅會在第 1 與第 2 區間做週期性振盪，即簡化至所謂的顆粒鐘現象；同樣的，若將  $P_{32}, P_{23}$  調整為 0.6 與 0.7，由圖 3.32 結果可知，顆粒會趨向於第 2 與第 3 區間做週期性的振盪，只是當值設為 0.6 時，時間達到 2100 後，振盪現象就無法繼續產生，且三個區間的大顆粒濃度並不相同，第 2 區最高，其次為第 3 區，最低的是第 1 區。

### 3.4.2 顆粒追隨現象模擬

由機率參數的分析結果顯示，當跳躍格數的機率改變，會影響顆粒聚集的所在區間；另由朱立民的實驗結果，顆粒會聚集在哪一個區間並無一定規則。當每次聚集完成後，小顆粒要離開至下一區間時，是一種隨機任意選擇，故聚集的位置並非周期性變化。因此，吾人嘗試將機率添加擾動項，擾動項的加入並未違背實驗的歸納結果，因為機率是由統計平均而來，故當大小顆粒聚集完成後，小顆粒離開時的選擇機率並不是一個定值。

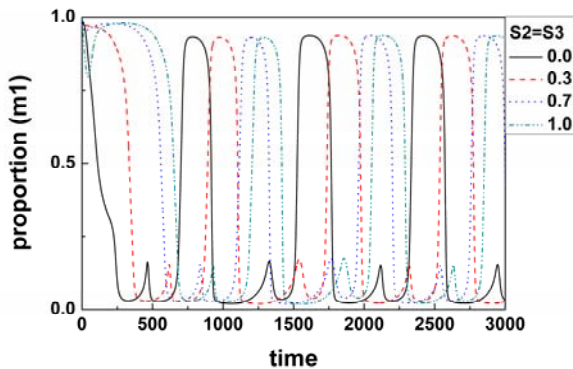


圖 3.30 不同  $S_2 (= S_3)$  與顆粒聚集之關係

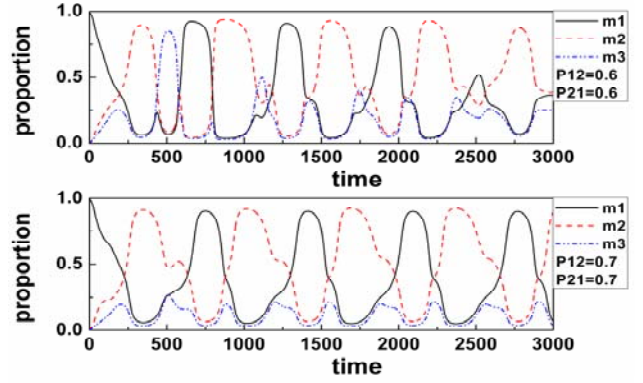


圖 3.31 不同  $P_{12}$  與  $P_{21}$  對大顆粒聚集現象之影響

因此，吾人修正了方程式(a~d)，寫為：

$$\frac{dn_1}{dt} = -n_1 S_1 F_{m_1}^{n_1} + n_2 (P_{21} + \delta_1) S_2 F_{m_2}^{n_2} + n_3 (P_{31} + \delta_2) S_3 F_{m_3}^{n_3} \quad --(7a)$$

$$\frac{dn_2}{dt} = -n_2 S_2 F_{m_2}^{n_2} + n_1 (P_{12} + \delta_3) S_1 F_{m_1}^{n_1} + n_3 (P_{32} - \delta_2) S_3 F_{m_3}^{n_3} \quad --(7b)$$

$$\frac{dm_1}{dt} = -m_1 (1 - S_1) F_{m_1}^{n_1} + m_2 (P_{21} + \delta_1) (1 - S_2) F_{m_2}^{n_2} + m_3 (P_{31} + \delta_2) (1 - S_3) F_{m_3}^{n_3} \quad --(7c)$$

$$\frac{dm_2}{dt} = -m_2 (1 - S_2) F_{m_2}^{n_2} + m_1 (P_{12} + \delta_3) (1 - S_1) F_{m_1}^{n_1} + m_3 (P_{32} - \delta_2) (1 - S_3) F_{m_3}^{n_3} \quad --(7d)$$

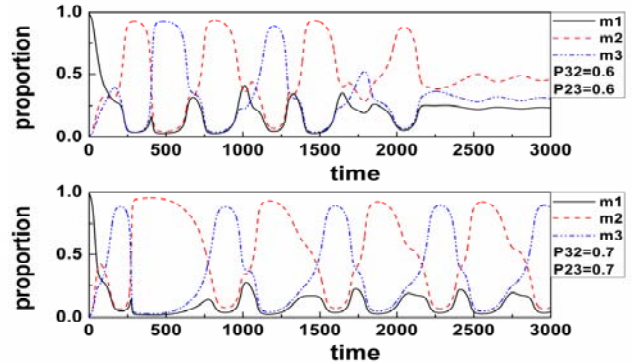


圖 3.32 不同  $P_{32}$  與  $P_{23}$  對大顆粒聚集現象之影響

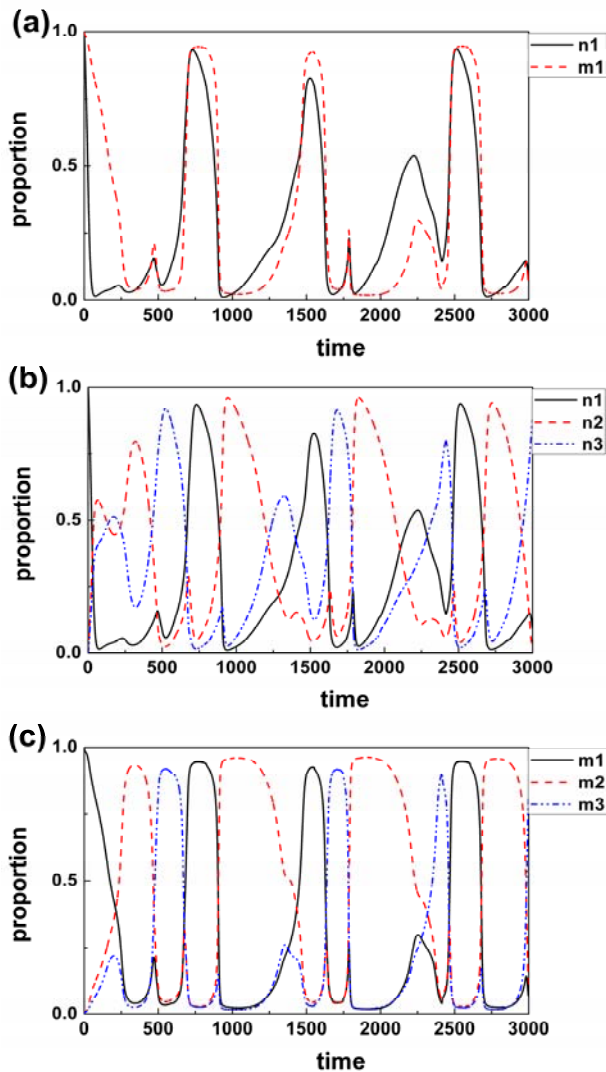


圖 3.33 顆粒追隨現象

其中定義三個擾動項 ( $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ ) 大小為  $[-0.05, 0.05]$  區間內的隨機數值，並且維持  $P_{12} + P_{13} = 1.0$ 、 $P_{21} + P_{23} = 1.0$  與  $P_{32} + P_{31} = 1.0$ 。

不過需注意的是，在數值計算的流程上，只有當大小顆粒聚集的濃度分別達到 0.8 以上時(即小顆粒欲將離開該區間)，才給予三個隨機的擾動項，如此方能符合實驗現象。圖 3.33a 表示大小顆粒聚集於第 1 區間的時間演化，黑色實線代表小顆粒，紅色虛線代表大顆粒，每一次小顆粒均較快聚集於第 1 區間，大顆粒則跟隨在後，進而達到兩種顆粒一起聚集在同一區間。當聚集完成並經過垂直分離後，小顆粒的濃度先開始下降，緊跟著大顆粒的濃度隨之下降，重新聚集於其他區間。圖 3.33b 與圖 3.33c 表示大小顆粒聚集在第 1~3 區間

的時間演化，二圖相較之下，可知大顆粒聚集在區間內的時間較長。此外，由黑色、紅色與藍色曲線的振盪現象，能夠明確的表達顆粒追隨現象，即聚集所在區間是隨機選擇，以圖 3.33c 所示，聚集區間的演化為  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \rightarrow 2$ 。因此，吾人的顆粒通量模型不僅能夠呈現反巴西堅果效應，且能定性的模擬出小顆粒隨機選擇到哪，大顆粒就跟隨到哪之隨機行為，符合了顆粒追隨現象。

### 3.6 研究整理與討論

本研究參考 Viridi 於 2006 年發表的二格顆粒鐘實驗，並將其推廣為三格與四格顆粒追隨實驗。藉由大量的實驗數據，以及控制顆粒數目、大小顆粒粒徑比、系統振幅等不同變因，發現兩個物理現象，並獲得了相當豐富的成果，茲整理如下：

- ✦ 不論是三格容器或四格容器，觀察其顆粒運動，小顆粒聚集後，大顆粒必然會跟隨小顆粒的腳步，聚集於小顆粒聚集的分區。我們將此物理現象命名為『顆粒追隨現象』。顆粒鐘現象是顆粒追隨現象在二等分系統中的特例。
- ✦ 三格與四格容器實驗沒有固定週期。當小顆粒離開原有聚集區時，不像二格顆粒鐘僅有一個選項，而是有二或三個空格區域可供選擇。這些空格都有可能形成新聚集區，他們會彼此競爭，看何者先達到臨界濃度，產生穩定的新聚集區。有時這兩者都無法達到臨界濃度，互相爭奪顆粒的結果是兩敗俱傷，使顆粒濃度突然大幅下降，所有顆粒回到原本的聚集區，一切重新開始。因此，多格顆粒追隨現象所需的時間必然不固定。
- ✦ 當顆粒運動過為激烈時，偶爾會發生小顆粒同時在兩格產生新聚集區，且都達到臨界濃度，大顆粒也隨之跳至這兩個新聚集區，產生短暫的兩個新聚集區狀態。然而，此狀態非常不穩定，顆粒數目較少的聚集區會解散，最後仍是所有顆粒聚集於單一聚集區，不違背顆粒追隨現象。

- ⊛ 當容器自二格延伸至三格、四格之後，系統分區開始有內外側之別。顆粒離開外側聚集區所需的平均時間，約為離開內側聚集區的兩倍。若顆粒欲離開內側聚集區，可自由跳向左右兩側；然而，當顆粒離開外側聚集區，有一側為牆壁，會反彈顆粒回原本的聚集區。因此，外側聚集區的濃度較不易下降，即會維持聚集狀態更久的時間。
- ⊛ 顆粒追隨現象僅發生在狹窄系統中，即實驗容器前後縱深應是大顆粒直徑兩倍以下。
- ⊛ 欲產生顆粒追隨現象，大顆粒直徑應是小顆粒直徑的兩倍以上。
- ⊛ 顆粒追隨現象條件甚為嚴苛，必須配置適當的顆粒數目、振幅與頻率。將所有顆粒混合，放置於系統單一分區時，堆疊高度至少要超過隔板高度的一半，才有機會產生顆粒追隨現象。
- ⊛ 進行三格容器實驗時，同樣離開外側聚集區，新聚集區移動二格耗費的時間，會略大於移動一格耗費的時間，約增加 10%。
- ⊛ 進行四格容器實驗時，同樣離開外側聚集區，新聚集區移動一格耗費的時間，較移動二格或三格所需時間減少約 30%。移動一格的機率最大，移動二格次之，移動三格的機率最小。
- ⊛ 進行四格容器實驗時，同樣離開內側聚集區，新聚集區移動一格至外側、移動一格至內側、移動二格至外側發生的機率，依次降低。移動一格至外側的機率，約略等於移動一格至內側與移動二格至外側的機率和。此三者所需的時間，隨著發生機率增加而下降，即愈容易產生的現象耗時愈短。
- ⊛ 我們曾經改變初始狀態，將大顆粒與小顆粒『分別』放置在容器最左端與最右端。當振動開始，大顆粒依舊跳至小顆粒聚集區，產生顆粒追隨現象。
- ⊛ 當大小顆粒直徑比愈大，完成聚集所需的時間愈短。此外，（離開外側/離開內側）聚集區時間比值也愈來愈小。顆粒聚集區移動二格的機率也會愈來愈高，甚至

超過移動一格的機率。可能的原因是當大小顆粒直徑相差愈大，顆粒運動愈激烈，使大小顆粒垂直分離與聚集現象更容易發生。也由於運動激烈的緣故，跳過兩個隔板的機率會因而提升。

- ⊛ 當小顆粒粒數愈多，完成聚集所需的時間愈短。此外，（離開外側/離開內側）聚集區時間比值也愈來愈小。和增加大小顆粒直徑比結果相反，顆粒聚集區移動二格的機率會愈來愈低。可能的原因是增加小顆粒粒數，使小顆粒更容易於新聚集區達到臨界濃度，產生穩定聚集，縮短完成聚集的時間。此外，由於顆粒數過多，有時大顆粒還來不及全進入新聚集區，小顆粒就已經被擠壓出來，掉至鄰近區域，增加聚集於鄰近區域的機會。因此，增加小顆粒粒數，雖然會縮短顆粒追隨現象的時間，但也會減低跳過兩個隔板的機率。
- ⊛ 使用商用統計軟體 SPSS，以 Kolmogorov-Smirnov 單一樣本檢定法檢定實驗數據，其漸近顯著性（雙尾）均小於 0.05，即實驗數據不符合常態分佈、均勻分配、Poisson 機率分配、指數分配等機率分佈形式。目前初步判斷，最接近離開內外側聚集區時間（以 10 秒分區）的分佈形式，應是 gamma 分佈，符合等候時間機率分佈形式。
- ⊛ 兩種不同粒徑顆粒混合的垂直振動實驗，呈現了更複雜的行為，顆粒追隨結合了反巴西堅果效應、聚集行為以及隨機跳躍等豐富的物理現象。在本文提出的顆粒通量模型，以及加入機率的擾動項，由圖 10 中可見，此模型在定性上與實驗現象相當吻合，呈現了反巴西堅果效應、隨機跳躍與顆粒追隨現象。
- ⊛ 因為顆粒的碰撞為非彈性碰撞，對於運動規律與完善的理論模型，至今尚未非常完備。因此，未來要建立較佳的理論架構來描述顆粒追隨現象，將是一項艱鉅的任務。

#### 四、成果自評

本計畫中，我們進行了許多課題之探討。

本報告中僅針對顆粒振盪之研究進行敘述，因為此研究開啟了一扇未知之門。由於實驗儀器的限制，與相關知識不足之故，有太多課題仍有待探索、克服。我們在此提出一些建議，供鑽研顆粒追隨現象的後人參考：

- ✿ 使用壓克力容器，只要一摩擦，立刻會產生靜電。相信這對於顆粒聚集現象耗費的時間，會造成相當程度的誤差。因此，建議後人採用抗靜電材料製作容器，以徹底消除靜電影響。
- ✿ Viridi 與本研究的進行的實驗，雖然容器十分狹窄，但仍屬於三維系統。然而，改寫自 Lambiotte 等人架構的模型，屬於二維系統，且相當粗糙，甚至包含物理意義不明確的參數。因此，顆粒追隨現象仍有待建立一個更完備的模型，將之推廣至三維與多格系統，並使每一項參數具有明確的物理意義。未來可參考近似的週期震盪現象，如 BZ (Belousov-Zhabotinski) reaction，以改寫現有方程式形式。
- ✿ 在實驗過程中，發現小顆粒雖然會先聚集，但未必能聚集成功，有時顆粒濃度又會突然降低、消散。我認為有一個未知的『臨界濃度』存在，唯有顆粒於某一分區超過臨界濃度，才會產生穩定的新聚集。檢視顆粒追隨現象流程，當大小顆粒分離時，小顆粒穩定聚集，大顆粒卻跳出其聚集區，故臨界濃度應與顆粒直徑有關。
- ✿ 產生顆粒追隨現象的條件相當嚴苛，太多顆粒或太少顆粒都不行。我們曾經嘗試找出一個『條件參數』，以判斷顆粒追隨現象出現與否，如大小顆粒體積比、顆粒總體積佔系統分區體積比例等。然而，直到目前為止，這項條件參數仍是未知。
- ✿ 顆粒追隨現象尚未進行數值模擬，三格顆粒追隨模型亦尚未驗證。
- ✿ 顆粒聚集時間，可分為兩階段時間之和。前半部為小顆粒移動，後半部為大顆粒移動。然而，這兩個階段各自佔總體時間的比例為何，尚未進行詳細實驗記錄。
- ✿ 可嘗試混合等體積、不等質量，或等質量、不等體積的顆粒。亦可改變實驗顆粒

材質，測試不等彈性顆粒，觀察其顆粒追隨現象。

- ✿ 目前實驗的初步結果，認定欲產生顆粒追隨現象，大顆粒直徑至少需大於小顆粒直徑二倍，且容器縱深需小於大顆粒直徑兩倍。然而，我們實驗的鋼珠尺寸間距甚大，未來應嘗試混合更多種尺寸的鋼珠，方能得到更明確的顆粒追隨現象範圍。
- ✿ 可改變容器縱深，進行一系列實驗，探討顆粒追隨現象必須發生在狹窄容器中的原因。目前初步的判斷，是足夠狹窄的容器才可讓所有顆粒碰撞到外牆，然其造成的影響仍不甚明瞭。容器縱深下限與顆粒直徑的關係，也尚未進行探討。
- ✿ 本研究與 Viridi 設計的實驗容器，主要差異有兩點：第一，容器高度相差兩倍；第二，我們設計的隔板寬度是 5mm，而 Viridi 設計的隔板寬度僅有 0.8mm。這兩項變因所造成的影響，有待後人進一步探索。
- ✿ 在本研究中，我們以目測的方式判斷顆粒是否完成聚集狀態，這並不是一個精確的科學實驗方法。然而，當大小顆粒完全跳至新聚集區時，系統與顆粒振動產生的噪音，明顯與大小顆粒分離的狀態不同。因此，未來可以設計一組能夠判讀實驗噪音的實驗記錄器，即可以機械化的方式準確判斷顆粒聚集的狀態。
- ✿ 在探討顆粒離開容器外側聚集區的問題時，我們提及顆粒可能跳到容器外側的牆壁彈回，或跳過隔板至其他空格區域。顯而易見的是，牆壁等同於高度無限高的隔板。若隔板高度無限低，即是沒有分區，所有顆粒可以左右自由移動。因此，改變容器隔板的高度，或改變各分區的大小，對於顆粒追隨現象的影響甚大，並具有相當重要的物理意義。若二格實驗分區不等大，相信會有時間長短交錯的週期現象。
- ✿ 可嘗試以同心圓或九宮格形式的容器進行實驗，觀察其顆粒運動現象，並使其推廣至平面空間。
- ✿ 實驗數據檢定的分佈形式太少，需進行更多機率分佈形式的測試。我們初步判定

實驗數據符合  $\gamma$  分佈形式，然而尚須計算其形狀參數與尺度參數，並可與相似分佈形式的物理現象比較。

✿ 我們曾經嘗試以黃豆、綠豆、小米等不同大小種子進行實驗。然因其顆粒真圓度不足，容易卡住實驗容器，使現象不夠明確，有待改進。

✿ 現今的顆粒追隨研究，僅限於混合兩種尺寸的顆粒。吾人曾經嘗試混合三種大小不等的顆粒進行實驗，發現亦有大小顆粒分離與聚集現象，然整體運動相當混亂、複雜。為了增加未來應用的實用性，混合更多不等尺寸顆粒的實驗，會是相當值得研究的課題，也有待後人進一步釐清。

## 五、參考文獻

- [1] H. Hinrichsen and D. E. Wolf, *The Physics of Granular Media*, Wiley-VCH (2004).
- [2] M. A. Hopkins and M.Y. Louge, Inelastic microstructure in rapid granular flows of smooth disks, *Phys. Fluids A*, **3**, 47 (1991).
- [3] I. Goldhirsch and G. Zanetti, Clustering instability in dissipative gases, *Phys. Rev. Lett.* **70**, 1619 (1993); see also I. Goldhirsch, Clustering instability in granular gases, in Proc. DOE/NSF Workshop on Flow of Particulates and Fluids, Worcester MA (1991).
- [4] J. C. Maxwell (1871), A. S. Leff and A. F. Rex, *Maxwell's Demon: Entropy, Information, Computing*, Adam Hilger, Bristol (1990).
- [5] H. J. Schlichting and V. Nordmeier, *Strukturen im Sand*, Math. Naturwiss. Unterr. **49**, 323 (1996).
- [6] J. Eggers, Sand as Maxwell's demon, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 5322 (1999).
- [7] K. van der Weele, D. van der Meer, M. Versluis, and D. Lohse, Hysteretic clustering in granular gas, *Europhys. Lett.* **53**, 328 (2001).
- [8] D. van der Meer, K. van der Weele, and D. Lohse, Bifurcation diagram for compartmentalized granular gases, *Phys. Rev. E* **63**, 061304 (2001).
- [9] K. van der Weele, D. van der Meer, and D. Lohse, Birth and sudden death of a granular cluster, *Adv. Solid State Phys.* **42**, 335 (2002), edit by B. Kramer, Proc. DPG Spring Meeting 2002 in Regensburg, Germany (Springer, Berlin, 2002).
- [10] D. van der Meer, K. van der Weele, and D. Lohse, Coarsening dynamics in a vibrofluidized compartmentalized granular gas, *J. Stat. Mech.: Theory Exp.* P04004 (2004).
- [11] D. van der Meer, K. van der Weele, and D. Lohse, Sudden collapse of a granular cluster, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 174302 (2002).
- [12] A. Lipowski and M. Droz, Urn model of separation of sand, *Phys. Rev. E* **65**, 031307 (2002).
- [13] P. Ehrenfest and T. Ehrenfest, *The Conceptual Foundations of the Statistical Approach to Mechanics*, Dover, New York (1990).
- [14] R. Mikkelsen, D. van der Meer, K. van der Weele and D. Lohse, Competitive clustering in a bidisperse granular gas, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 214301 (2002).
- [15] R. Mikkelsen, D. van der Meer, K. van der Weele and D. Lohse, Competitive clustering in a bidisperse granular gas: experiment, molecular dynamics, and flux model, *Phys. Rev. E* **70**, 061307 (2004).
- [16] R. Lambiotte, J. M. Salazar and L. Brenig, From particle segregation to the granular clock, *Phys. Lett. A* **343**, 224 (2005).
- [17] A. Rosato, K. J. Strandburg, F. Prinz, and R. H. Swendsen, Why the Brazil nuts are on top: Size segregation of particulate matter by shaking, *Phys. Rev. Lett.* **58**, 1038 (1987).
- [18] A. Barrat and E. Trizac, A molecular dynamics "Maxwell Demon" experiment for granular mixtures, *Mol. Phys.* **101**, 1713 (2003).
- [19] G. Costantini, D. Paolotti, C. Cattuto, and U. M. B. Marconi, Bistable clustering in driven granular mixtures, *Physica A* **347**, 411 (2005).
- [20] S. Viridi, M. Schmick and M. Markus, Experimental observations of oscillations and segregation in a binary granular mixture, *Phys. Rev. E* **74**, 041301 (2006).
- [21] 朱立民, 顆粒追隨現象, 國立台灣大學應用力學研究所碩士論文; 2007.