

流行病學中之羅倫茲曲線

李文宗

國立台灣大學 公共衛生學院 流行病學研究所

摘要

羅倫茲(Lorenz)曲線是經濟學家及人口學家所常用的工具，用來評估所得分配的平均程度，以及人口的集中程度。最近該曲線亦被應用於流行病學的領域中，用來測度疾病發生率的季節變動、族群中壽命的變異、醫學診斷工具的正確度，以及曝露與疾病間之相關強度等。本文將簡略的介紹這四個新發展的流行病學應用。

前言

羅倫茲(Lorenz)曲線是 1905 年 Max O. Lorenz 所發明[1]，用來評估所得分配的平均程度[2]，圖一即為一個典型的羅倫茲曲線。它的作法很簡單，只要將一個國家之家庭依據所得高低分成若干等分(比如五等分)，然後看最低等分之家庭所得佔全體所得多少比例，次低等級所得佔多少比例等等。之後將累積(從小到大)家庭數比例置於橫軸，將累積所得比例置於縱軸，所得到者即為一個羅倫茲曲線。如果所得分配完全平均，則其羅倫茲曲線將完全與對角線吻合，反之若所得分配極端不均(財富全部集中於 1~2 家庭手裡)則羅倫茲曲線與橫軸重疊直至座標(1,0)而後垂直上升至座標(1,1)，若所得分配平均度介於上兩者之間則羅倫茲曲線如圖一所示呈「弓」型。

基尼係數(Gini index)及皮耶查係數(Pietra index)是兩個羅倫茲曲線的綜合指標[3]。基尼係數定義為羅倫茲曲線與對角線所夾之面積的兩倍，或換個說法，上述面積佔對角線下面積

的比例。皮耶查係數的定義類似，但係為羅倫茲曲線與對角線內所內接最大三角型面積的兩倍。由於羅倫茲曲線必定在對角線之下(或與之重合)，且在 0 與 1 之方格內，故知上述基尼係數及皮耶查係數必定介於 0 與 1 之間。其數值越接近 1，代表所得分配越不均，數值越接近 0，代表分配越平均。

羅倫茲曲線在經濟學之應用外，也被人口學家用來測度人口集中之程度[4]。但此時羅倫茲曲線之做法稍有不同，乃先將所欲研究地區依行政單位區分(如鄉、鎮、市等)，計算各行政單位之人口密度，而後從小到大排列，再計算累積人口數及累積土地面積，最後將累積人口數比例置於縱軸，累積土地面積比例置於橫軸，即得羅倫茲曲線。此時之基尼係數及皮耶查係數則成為人口集中程度的指標了。

羅倫茲曲線雖然於經濟學及人口學中廣泛應用，但在流行病學中卻是一個嶄新的方法。本文將介紹以羅倫茲曲線來測度疾病發生率的季節變動、族群中壽命的變異、醫學診斷工具的正確度，以及曝露與疾病間之相關強度等。

疾病發生率的季節變動

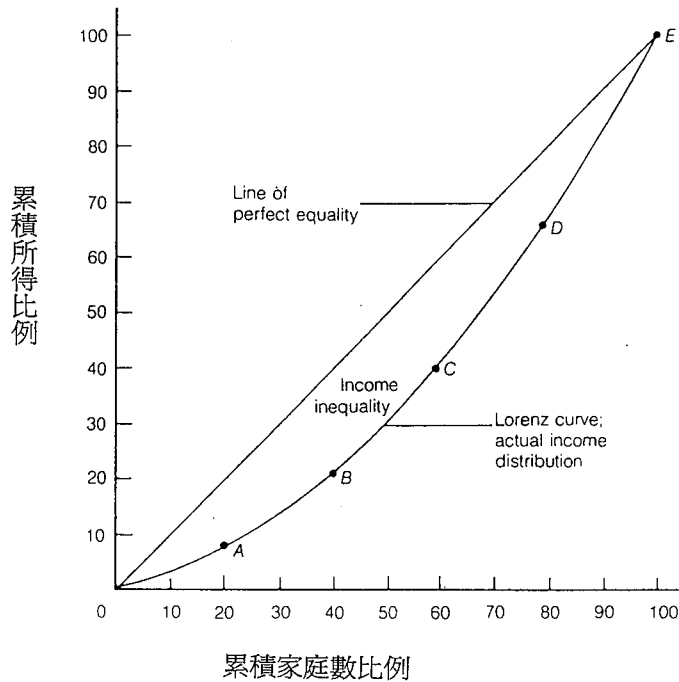
有許多疾病的發生會表現出季節的變動，如傳染病或食物中毒等。慢性病如各種癌症、腦中風、心臟病亦可能表現出季節變動的現象。但是因為慢性病的病因複雜，其季節波動的現象極易被其它因素所遮蓋，因而有必要發展較高檢力(power)之季節變動的檢定方法。羅倫茲曲線於此課題上可提供一些幫忙[5]。表一為英國伯明罕地區無腦症案例數資料。此資料按 12 月份區分，表一同時列出每月之日數。

Title: Lorenz Curve in Epidemiology

Author: Wen-Chung Lee

Graduate Institute of Epidemiology, College of Public Health, National Taiwan University

Key Words: epidemiologic methods, Lorenz curve, vital statistics, medical diagnosis



圖一：典型的經濟學家所用的羅倫茲曲線，摘自[2]

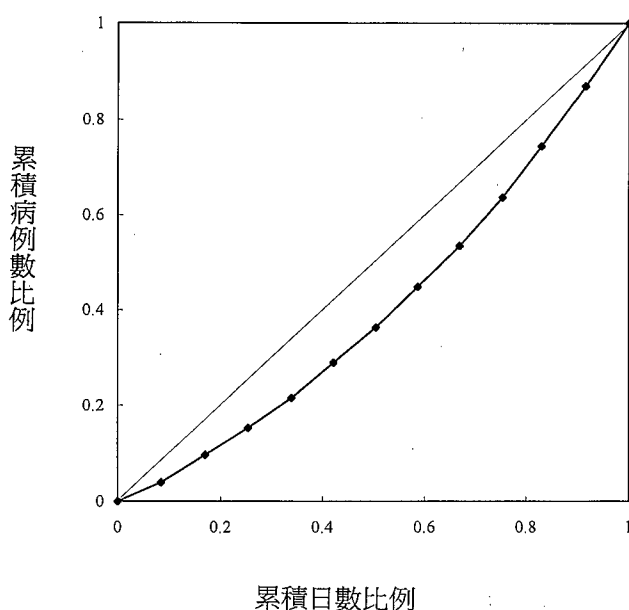
表一：英國伯明罕地區 1940 年到 1947 年間無腦症的案例

Month	No. of cases	Day	Incidence(case/day)
Jan	10	248	0.0706
Feb	19	226	0.0651
Mar	18	248	0.0728
Apr	15	240	0.0598
May	11	248	0.0536
Jun	13	240	0.0421
Jul	7	248	0.0408
Aug	10	248	0.0408
Sep	13	240	0.0625
Oct	23	248	0.0701
Nov	15	240	0.0815
Dec	22	248	0.0639
Total	176	2922	

這筆資料可以劃出羅倫茲曲線，與經濟學家或人口學家之作法大同小異。先將這 12 個月份按照無腦症發生率從小到大排列，再將累積病例數比例置於縱軸，累積日數比例置於橫軸，即得圖二之羅倫茲曲線。此例之吉尼係數為 0.1881，經電腦模擬的結果知其 P 值介於 0.01 至 0.05 之間，表示伯明罕地區無腦症之案例有統計顯著地季節變動現象 ($\alpha=0.05$)。此吉尼係數除可做為季節變動的檢定外，本身亦有直觀闡釋，即 $1/2+Gini/2$ 可闡釋為「聚集機率」，本

例聚集機率為 $1/2+0.1881/2=0.5941$ ，即表示若以日數比例隨機抽樣出一個月，另再從所有病例中隨機抽樣出一個病例，則此病例會出現在比所抽出之月份發生率還高之月份的機率為 0.5941。直觀上可知，若無腦症無聚集於某些特定月份的趨向，則上述之聚集機率為 0.5，反之則趨近 1。本例之聚集機率僅為 0.5941，故知無腦症之季節變動現象雖已達到統計顯著性，但其聚集現象並不明顯。





圖二：以表一資料所繪製成之羅倫茲曲線

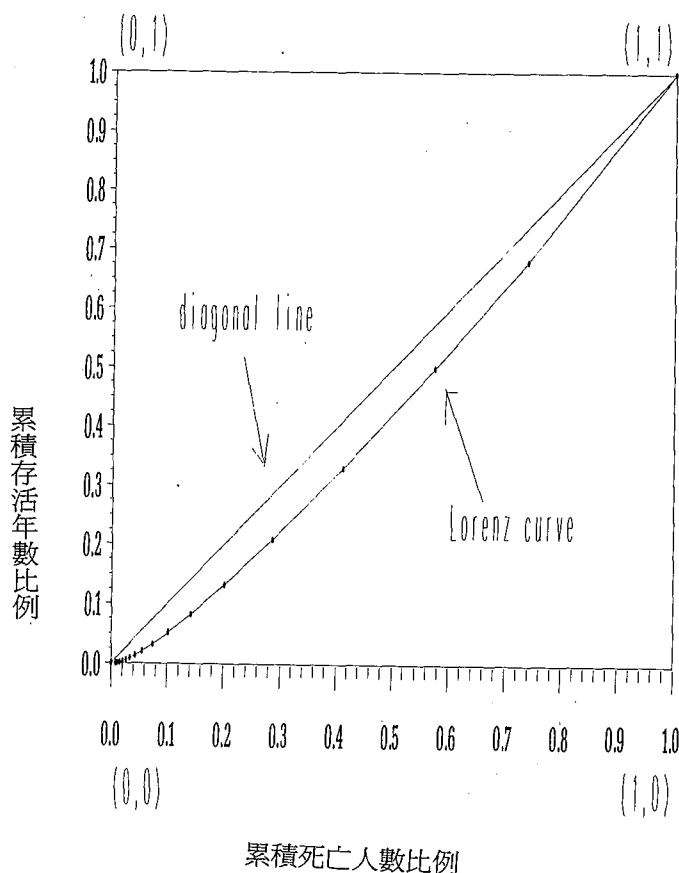
族群中壽命的變異

羅倫茲曲線的另一個應用是測定族群中壽命的變異。長久以來流行病學家或衛生統計學家皆以「平均餘命」來做為一個族群健康狀態的指標。但如此可能失去了某些重要訊息：比如兩個族群中，其中一個有稍高的嬰幼兒死亡率但較低的中老年死亡率，另一族群反之。顯然此二族群的健康狀態並不相同，但以平均餘命來測度，則此二族群可能差不多；另外若考慮去除某些特定死因對該族群健康狀態的影響，比如去除意外事故，原先該族群有些人壽命長，有些較短命，去除意外事故後，則幾乎大多數人皆可享長壽，自然這是一項大進步，但若以平均餘命來衡量恐難完全表現，因平均餘命可能只增加一點點，比如一年或兩年。

羅倫茲曲線在此即可扮演關鍵角色[6]，作法是將累積死亡人數比例置於橫軸，累積存活年數比例置於縱軸即可得。其作法並不困難，但因必須牽涉到生命表之計算，在此不多詳述。圖三即為依據台灣地區 1991 年生命表

所繪製之羅倫茲曲線，並可計算出皮耶查係數為 0.0811，吉尼係數為 0.1130。此兩係數在此場合可透過「生命變異」(life variability)來闡釋，茲定義「生命變異-1」為族群中任選一人其壽命與平均壽命之間絕對值差異，「生命變異-2」為族群中任選兩人其壽命之絕對值差異。自然，「生命變異-1」或「生命變異-2」越大，表示該族群人與人之間壽命差異較大，反之表示該族群的壽命趨於一致。簡單的代數可證明，兩倍的皮耶查係數乘上平均餘命即可得生命變異-1，而兩倍的吉尼係數乘上平均餘命即可得生命變異-2。故知皮耶查係數及吉尼係數即為生命變異的測量。

表二列出台灣地區自 1971 年至 1991 年二十年間平均餘命及生命變異度的變化，可見這二十年來台灣地區除平均餘命增加外，生命變異度也在減少，即國民壽命趨於一致。表三則考慮去除五大死因後對平均餘命及生命變異的影響，這五大死因的去除，都會造成平均餘命的增加，但其中僅癌症及意外災害的去除會使生命變異減少，而腦中風、心臟病及糖尿病的



圖三：台灣地區 1991 年生命變異之羅倫茲曲線

去除，反使生命變異量增加。

醫學診斷工具的正確度

長久以來醫學診斷工具的正確度皆以敏感度(sensitivity)及特異度(specificity)來表示，然而此等指標僅能表現診斷工具在某一「切點」(cut-off point)上的表現，對於此診斷工具的整體表現，卻無法呈現。近十多年來流行使用 ROC 曲線(receiver operating characteristic curve)下之面積來測量診斷工具之正確度，此面積係介於 0 與 1 間之數，面積愈大，表示此診斷工具之整體表現愈好，反之則愈差。ROC 曲線下之面積本身也有直觀的闡釋，即為任選一個有病之個案及一個無病之個案，而有病者之檢測值高於無病者之機率。然而以 ROC 曲線下之面積來評估診斷工具之優劣並非沒有問題，比如當

此診斷工具表現出「兩極化」(檢測值過高或過低皆為高危險群)時，以 ROC 曲線下面積來測度，將嚴重低估此診斷工具之正確度。再者，ROC 曲線下面積之機率闡釋，固然引人入勝，實際上卻無甚用途，因吾人並不會真正地隨機抽樣一個有病之人及一個無病之人，然後比較此兩人之檢測值。

羅倫茲曲線用於評估診斷工具的正確度，則沒有上述之問題[7]，表四係電腦斷層診斷某病之資料，此資料可劃出羅倫茲曲線如圖四，作法亦很簡單，將累積病例數比例置於縱軸，累積非病例數比例置於橫軸即可[請注意資料必須依「概似比例」(likelihood ratio)先行從小到大排列]。由羅倫茲曲線吾人即可算出皮耶查係數及吉尼係數之值(本例為 0.6386 及 0.7863)，然後吾人即可利用此兩係數之值評估診斷工具

表二：台灣地區近二十年來平均餘命及生命變異之變化

Indicators#	Calendar Year		
	1971	1981	1991
LE	69.93	72.14	74.74
% change in LE*		+ 3.16	+6.88
LV	18.46	17.49	16.90
% change in LV*		-5.26	-8.45

#LE: Life expectancy LV: Life variability
using LE and/or LV in 1971 as the reference

表三：台灣地區五大死因去除對平均餘命及生命變異之影響

Indicators#	Complete elimination of @				
	MN	CBD	ACC	IHD	DM
LE	77.20	76.58	76.59	75.33	75.22
% change in LE*	+3.30	+ 2.46	+2.48	+0.79	+0.65
LV	16.08	17.24	15.08	17.04	16.93
% change in LV*	-4.81	+2.04	-10.76	+0.87	+0.21

#LE: Life expectancy; LV: Life variability
* using LE and/or LV in 1991 as the reference

@ MN: malignant neoplasms;
CBD: cerebrovascular diseases
ACC: accidents and adverse effects
IHD: ischemic heart diseases
DM: diabetes mellitus

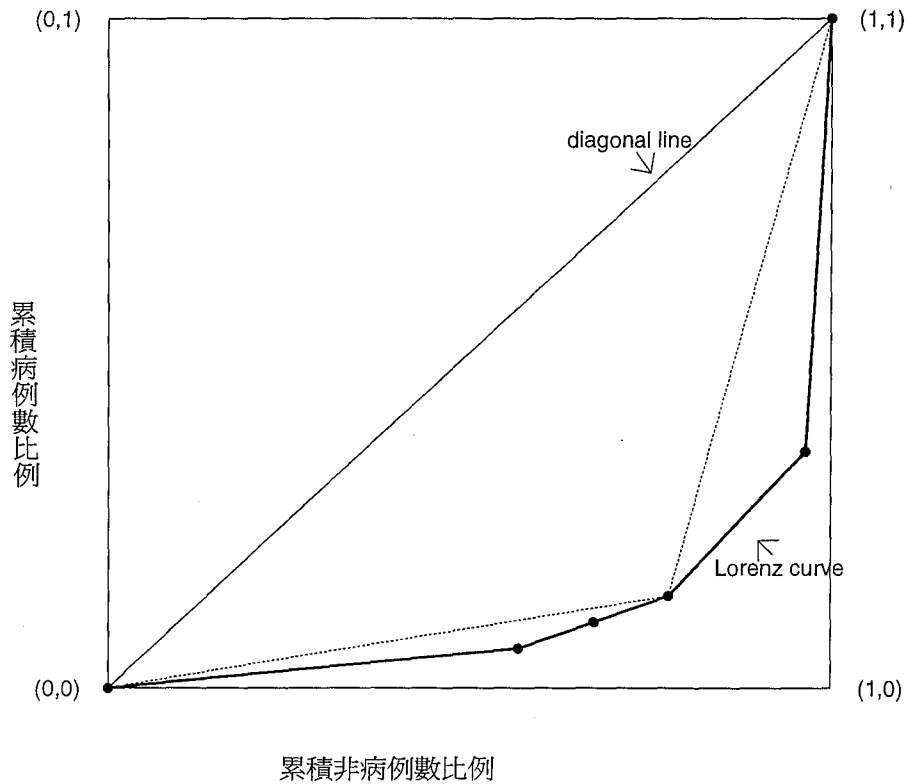
之正確性。係數越高，表示診斷正確度越高，係數越低則反之。

皮耶查係數及吉尼係數本身亦有直觀之闡釋，且此等闡釋與真實醫學診斷或篩檢之情境可以吻合。茲將未檢測之前，每個人得病之機率記為 $P(D)$ ，(此即為事前機率或盛行率)，此時大家皆處於相同的起跑點，即得病的機率皆為 $P(D)$ 。檢測之後，某些人被歸為高危險群(事後機率高)，而某些人危險性降低(事後機率降低)，因而大家不再處於相同位置，而是依據危險性被打散了。直觀地來看，某個診斷工具若具有較強的「打散能力」，則其診斷力應較強，反之若某個診斷工具有做與沒做差別不大，事後機率與事前機率相差不多，大家仍處於原來起跑點，則其診斷力也較差。因而我們可以用隨機任選一人，其事後機率與事前機率之絕對值差(記為 ΔP)，作為診斷力大小的評估；或者，我們也可以隨機任選二人，計算兩人事後機率之絕對值差(記為 ΔP^*)。有趣的是，上述 ΔP 與 ΔP^* 與皮耶查係數及吉尼係數存有如下微妙

的關係： $\Delta P=2P(D)[1-P(D)] \times \text{Pietra}$ 以及 $\Delta P^*=2P(D)[1-P(D)] \times \text{Gini}$ 。皮耶查係數及吉尼係數還有其它兩種闡釋的方法，即「最大預後資訊比例」及「正確診斷機率」，限於篇幅，於此不再詳述。

曝露與疾病間之相關強度

長久以來流行病學家皆以「相對危險性」或「可歸因危險性」，做為曝露與疾病之間相關強度的測度。然而相對危險性在不同的曝露間，如果曝露的測量尺度不同時，並無法互相比較。比如當吾人要比較「抽煙」、「教育程度」及「膽固醇」三者，何者是心臟血管疾病較強的危險因子時，抽煙為二元性曝露，故有一個相對危險性之值；教育程度為序位性，比方有五等級，故有四個相對危險性之值；而膽固醇濃度為連續性，故其相對危險性必須由一個「函數」來表示。由以上說明，可知欲從此三者之中，挑出較強的危險因子，是有實際的困難。使用「可歸因危險性」則無此種困難，因為它



圖四：以表四資料所繪製成之羅倫茲曲線

表四：電腦斷層檢查某病之結果

Rating categories	Deseased subjects			Non-diseased subjects			LR#
	No.	%	Cum.%*	No.	%	Cum.%*	
Definitely normal	3	5.88	5.88	33	56.90	56.90	0.10
Probably normal	2	3.92	9.80	6	10.34	67.24	0.38
Questionable	2	3.92	13.73	6	10.34	77.59	0.38
Probably abnormal	11	21.57	35.29	11	18.97	96.55	1.14
Definitely abnormal	33	64.71	100.00	2	3.45	100.00	18.76
Total	51	100.00		58	100.00		

* Cumulative percentage #Likelihood ratio

本身是介於 0 與 1 間之數，而不論原先曝露本身的測量尺度，故吾人只須挑出三者間那個曝露有較高的可歸因危險性即可。

不過可歸因危險性並非萬靈丹。研究顯示，在某些情況下，它並無法完全地反應出族群中曝露與疾病間的關係。此時羅倫茲曲線即可派上用場[8]，做法也很簡單，只需將累積死

亡人數或個案人數比例置於縱軸，累積人口數比例置於橫軸即可。請注意，在計算累積比例之前，如同以往，必須經過重排手續，各曝露層必須依據疾病率從小到大排序。有了羅倫茲曲線吾人即可求出其吉尼係數之值。有趣的是，此吉尼係數與相對危險性及可歸因危險性間存在著微妙的關係：比如兩倍的吉尼係數即



為族群中危險性或相對危險性之「離異係數」(coefficient of deviation)；而吉尼係數本身亦為不同基礎曝露層定義下之可歸因危險性之加權平均。由此可見，吉尼係數有如一座連結相對危險性及可歸因危險性兩概念之橋樑。而由於吉尼係數本身是介於 0 與 1 之間之數而不論曝露本身之測度尺度為何，故知欲比較不同曝露對某一特定疾病，或同一曝露對不同疾病之相關強度大小時，即可透過比較其吉尼係數來進行。吉尼係數還有其它兩種闡釋方法，即「曝露之資訊含量」以及「降曝露介入計劃之成效」[8]。

結 語

羅倫茲曲線發明迄今已將近一世紀之久，並早已成為經濟學及人口學教科書中之標準教材。令人訝異的是，它在流行病學中也可有如此豐富的應用，而這個事實直到這一兩年才被發現。在目前已發現的四個流行病學的應用中，又剛好皆在不同的流行病學的次領域中。比如季節變動的應用屬於「描述性流行病學」，壽命的變異可屬「生命統計學」，醫學診斷工具的正確度算是「臨床流行病學」，而曝露與疾病間相關強度的度量又較接近「分析性流行病學」。除此之外，羅倫茲曲線是否還有其它應用呢？這個問題還有待後人繼續努力來探究。不過目前我們應該可以公開地說，流行病學中也有羅倫茲曲線，它不再是經濟學家或人口學家的專利了。

推薦讀物

1. Lorenz MO: Methods of measuring the concentration of wealth. Publication of the American Statistical Association. 1905;9:209-19.
2. Ekelund RB, Tollison RD: Economics, Little, Brown and Company, Boston: 1986.
3. Butler RJ, McDonald JB: Using incomplete moments to measure inequality. J Econometrics 1989;42:109-19.
4. Shryock HS, Siegel JS: The methods and materials of demography, U.S. Government Printing Office, Washington: 1975.
5. Lee WC: Analysis of seasonal data using the Lorenz curve and the associated Gini index. Int J Epidemiol 1996;25:426-34.
6. Lee WC: Characterizing life span variability in a population using the Lorenz curve. (manuscript)
7. Lee WC: Probabilistic analysis of global performances of diagnostic tests: interpreting the Lorenz curve-based summary measures. (manuscript)
8. Lee WC: Characterizing exposure-disease association in human populations using the Lorenz curve and Gini index. Stat Med 1997;16:729-39.

