



# 行政院國家科學委員會專題研究計畫成果報告

## 優良 $(n, n-1)$ 迴旋碼之搜尋及應用

### Code Search for $(n, n-1)$ Convolutional Codes and Their Applications

計畫編號：NSC 91-2213-E-002-100

執行期間：91年8月01日至92年7月31日

主持人：林茂昭 國立臺灣大學電信所

#### 一、中文摘要

我們根據[1]中提出的演算法，並找到了許多優良的 $(n, n-1)$ 迴旋碼。另外，我們考慮了列運算對碼的錯誤率的影響，並且試圖去獲得更好的碼。我們搜尋到許多更優良的碼並做更新，相較於一些最知名的斲刪碼 (Punctured Code)[6]，這些碼不論在解碼複雜度，或錯誤率的衡量標準上，都有更佳的表现。

在我們所找到的碼中，我們發現了兩個有趣的現象。第一個是，對於相同碼率(Code Rate)及記憶大小(Memory Size)的碼而言，存在著較低複雜度及較佳錯誤表现的碼。第二個是，對於相同碼率但不同記憶大小的碼而言，存在著相同複雜度，且有相近錯誤表现的碼。

由於對 $(n, n-1)$ 碼完整的搜尋是非常困難的，所以我們搜尋的演算法雖然大量減少了運算量，但是也只能算是次佳的方法。也因為如此，有可能存在著更優良的 $(n, n-1)$ 碼。所以，如何找到最佳的碼，仍然是一個有待繼續研究的問題。

#### 英文摘要

In the paper "On  $(n, n-1)$  convolutional codes with low trellis complexity" written by Hung-Hua Tang and Mao-Chao Lin, some good  $(n, n-1)$  convolutional codes are found through a new algorithm. However, the search was not complete for all the possible values of  $\chi$  (a measure of decoding complexity for an  $(n, n-1)$  code). In this thesis, a more complete search is done.

For the convolutional codes already found in the aforementioned paper, we also

consider the effect of row operations on the generator matrices to achieve better information weight spectra. We find that memory size may not be an appropriate measure of trellis complexity. For example, in case that trellis branch is considered at the bit level, codes with the same code rate but distinct memory size may have the same trellis complexity.

#### 二、計畫的緣由與目的(Goals)

迴旋碼之所以常被使用在數位通訊系統中，除了因為它能提升傳輸的可靠度外，最主要是因為它有規則的籬柵架構(Trellis Structure)。也因為如此，我們可以用VA(Viterbi Algorithm)來解碼。但是當需要應用到高碼率的碼時，斲刪碼較常被考慮，因為它是由較低碼率的母碼(Mother Code)得來，所以也是以母碼的籬柵做解碼，因此，相較於使用傳統籬柵的迴旋碼，斲刪碼有著較低的籬柵複雜度(Trellis Complexity)，也就是較低的解碼複雜度(Decoding Complexity)。但是如果將迴旋碼視作是一種特殊的區塊碼(Block Code)，並將區塊碼的最小籬柵(Minimal Trellis)架構使用在迴旋碼上，來取代傳統的籬柵架構，那麼解碼複雜度將大幅的減少。

在論文[1]中，曾提出了一種新的演算法，並且找到許多優良的 $(n, n-1)$ 迴旋碼，而他便是用最小籬柵架構來降低解碼複雜度。相較於一些最知名的斲刪碼，這些碼不論在解碼複雜度，或錯誤率的衡量標準上，都有更佳的表现。這也證實了當考慮碼率為 $(n-1)/n$ 的碼時，斲刪碼並不一定是最好的選擇。在[1]中，同時定義了一個衡量解碼複雜度的參數 $\chi$ ， $\chi$ 越大的碼，其解碼複雜度也就越低。但是因為在[1]中，在解碼複雜度的考慮上，也就是對 $\chi$ 而言，並沒有做完整的搜尋，所以本計畫根

據[1]的演算法加以改進，做一個更完整的搜尋研究。

### 三、研究方法與成果 (Methods and Results)

本次研究的演算法(Algorithm)，是根據[1]中所提出的方法加以改進所得，而詳細的演算法流程圖，見 Figure 1。因為碼的錯誤率表現和碼權重頻譜(Code Weight Spectrum)  $t_i$  及資訊權重頻譜(Information Weight Spectrum)  $f_i$  有密切的關連，因此，小的  $t_i$  及  $f_i$  為判斷優良的碼的準則。我們依據這樣的演算法，找出擁有最佳碼權重頻譜的碼。但因為對任一  $(n, 1)$  碼而言，我們只是隨機的找一個對應的  $(n, n-1)$  碼，因此，若以資訊權重頻譜來看，有可能存在著更好的碼。因為對任一  $(n, 1)$  碼而言，若要完整的考慮其對應的  $(n, n-1)$  碼，實在是件艱困的任務，所以我們只針對擁有最佳碼權重頻譜的碼，去考慮其對應的  $(n, n-1)$  碼，也就是對它做列運算。

在這次的研究中，我們搜尋到許多優良的碼，但由於篇幅的關係，我們只列出其中一部份在 Table 1 至 Table 4。在這次的研究中，由於在解碼複雜度的考慮上，也就是對  $\chi$  而言，我們有做完整的搜尋，所以也觀察到兩個有趣的現象。第一個是，對於相同碼率(Code Rate)及記憶大小(Memory Size)的碼而言，存在著較低複雜度且有相近錯誤表現的碼。第二個是，對於相同碼率但不同記憶大小的碼而言，存在著相同複雜度，且有相近錯誤表現的碼。分別以一個圖表來說明，如下：

$n$	$\nu$	$G(D)$	$d_{free}$	$\chi$	Spectra $\frac{t_1, t_2, \dots}{f_1, f_2, \dots}$
3	3	$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 6 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	3	1	$\frac{1, 4, 14, 40, 119, 362, \dots}{1, 10, 57, 240, 922, 3395, \dots}$
3	3	$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 6 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	3	2	$\frac{1, 4, 14, 40, 117, 348, \dots}{1, 10, 54, 226, 859, 3110, \dots}$

這兩個碼的碼率及記憶大小皆相同，而  $\chi = 2$  的碼有較低的解碼複雜度，且兩個碼的碼權重頻譜及資訊權重頻譜很相近。

$n$	$\nu$	$G(D)$	$d_{free}$	$\chi$	Spectra $\frac{t_1, t_2, \dots}{f_1, f_2, \dots}$
4	3	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 3 & 0 \end{pmatrix}$	4	-3	$\frac{5, 36, 152, 708, 3424, 16312, \dots}{9, 200, 1736, 11604, 71436, 418144, \dots}$
4	4	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$	4	1	$\frac{5, 36, 152, 708, 3439, 16510, \dots}{9, 136, 1012, 6380, 38193, 220131, \dots}$

這兩個碼的碼率相同，但是記憶大小分別為 3 和 4，他們在籬柵模組(Trellis Module)中的狀態

(State)及分支(Branch)數目相同，也就是解碼複雜度相同，且兩個碼的碼權重頻譜及資訊權重頻譜很相近。這兩個碼的籬柵模組架構分別列在 Figure 2 及 Figure 3。

### 四、結論與討論(Concluding Remarks)

在本研究中，我們利用上述之方法，找到了許多優良的  $(n, n-1)$  迴旋碼，並發現了兩個有趣的現象。這兩個現象讓我們在選擇使用迴旋碼時，可以依需求作取捨。相較於一些最知名的斷刪碼[6]，這些碼不論在解碼複雜度，或錯誤率的衡量標準上，都有更佳的表现。所以當需要應用到高碼率的碼時，我們提供除了斷刪碼外的最佳選擇。

### 五、參考資料(References)

- [1] H.-H. Tang and M.-C. Lin, "On  $(n, n-1)$  convolutional codes with low trellis complexity," IEEE Trans. Commun., vol. 50, no. 1, pp. 37-47, Jan. 2002.
- [2] J. B. Cain, G. C. Clark, Jr. and J. M. Geist, "Punctured convolutional codes of rate  $(n, n-1)$  and simplified maximum likelihood decoding," IEEE Trans. Inform. Theory, vol. 25, pp. 97-100, Jan. 1979.
- [3] D. Haccoun and G. Begin, "High rate punctured convolutional codes for Viterbi and sequential decoding," IEEE Trans. Commun., vol. 37, pp. 1113-1125, Nov. 1989.
- [4] G. Begin and D. Haccoun, "High rate punctured convolutional codes : structure properties and construction technique," IEEE Trans. Commun., vol. 37, pp. 1381-1385, Dec. 1989.
- [5] M.-G. Kim, "On systematic punctured convolutional codes," IEEE Trans. Commun., vol. 45, pp. 133-139, Feb. 1997.
- [6] I. E. Bocharova and B. D. Kudryashov, "Rational rate punctured convolutional codes for soft-decision Viterbi decoding," IEEE Trans. Inform. Theory, vol. 43, no. 4, pp. 1305-1313, July 1997.

## 六、圖表 (Figures and Tables)

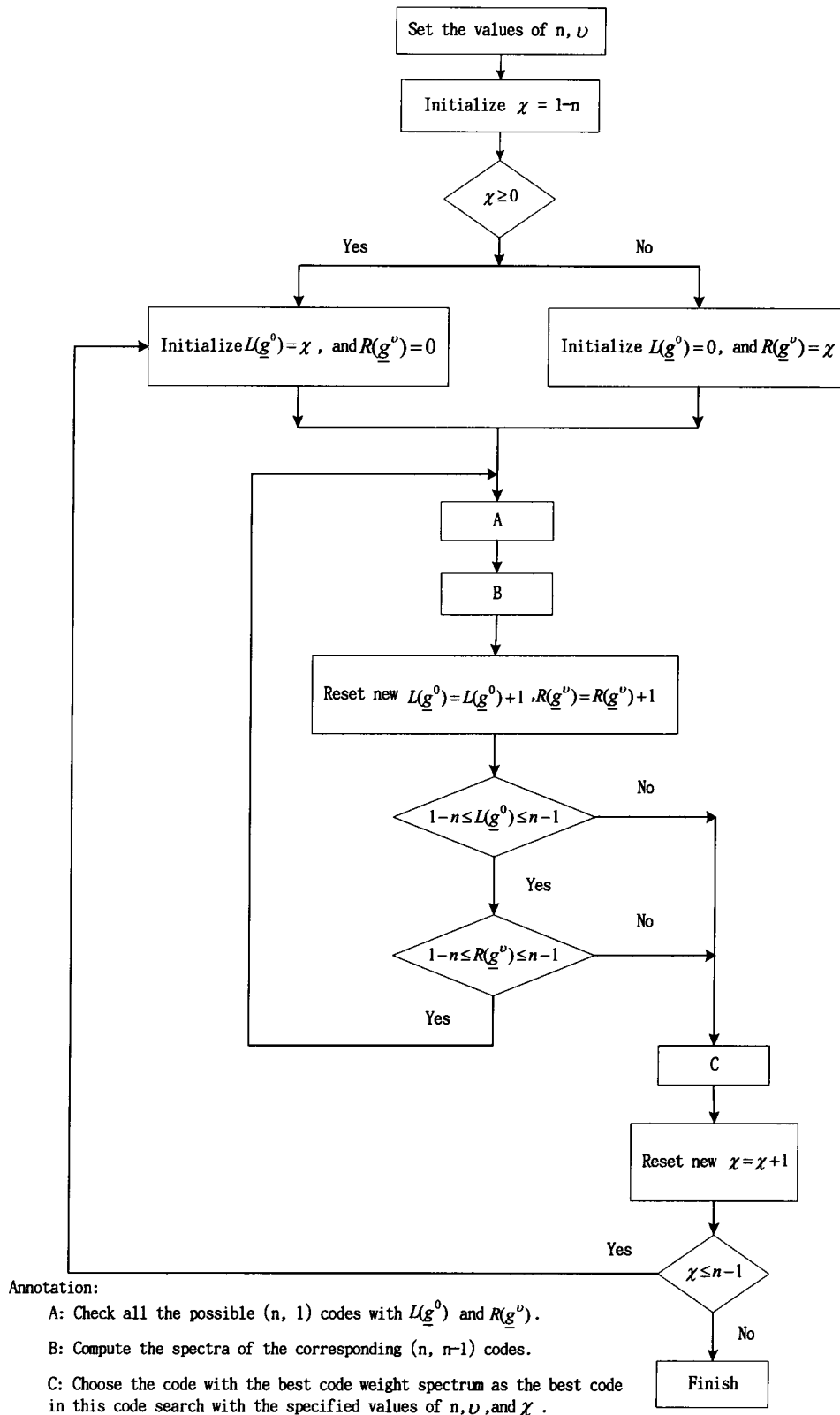


Figure 1: The Code Search Procedure

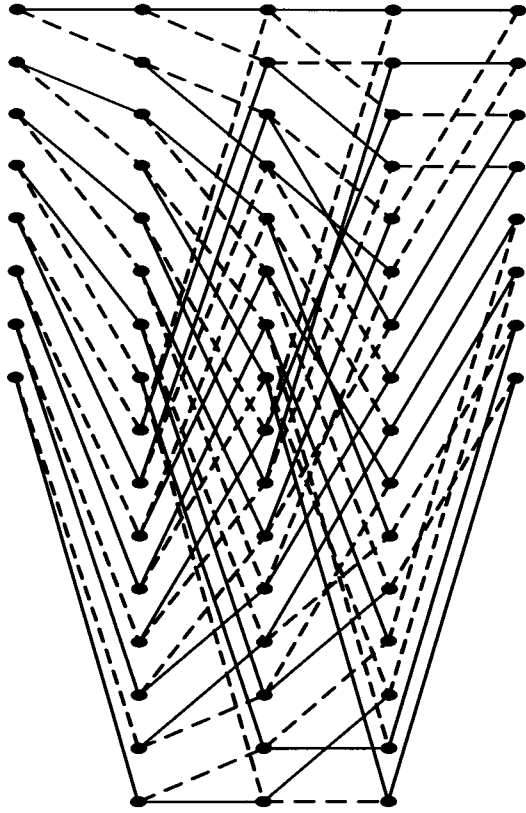


Figure 2

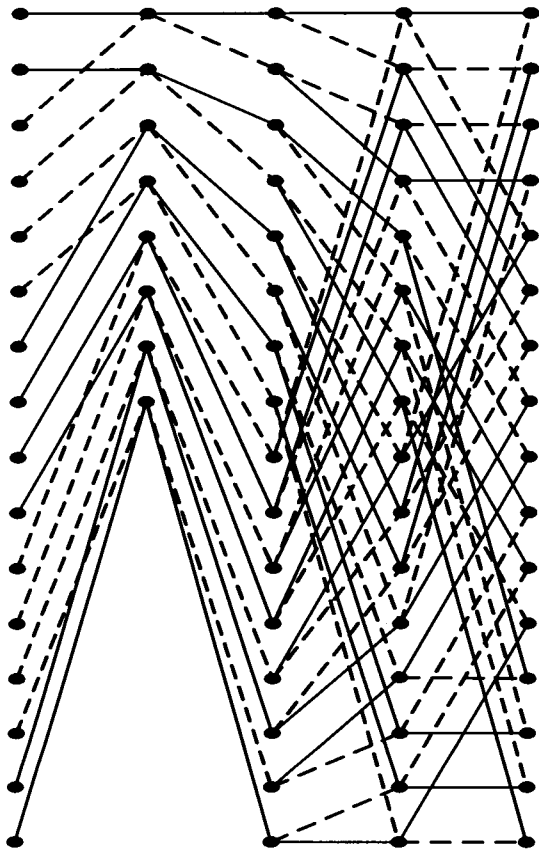


Figure 3

$n$	$\nu$	$G(D)$	$d_{free}$	$\chi$	Spectra $\frac{t_1, t_2, \dots}{f_1, f_2, \dots}$
3	3	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 5 & 2 \end{pmatrix}$	4	-2	$\frac{1, 5, 24, 71, 238, 862, \dots}{1, 11, 108, 417, 1857, 7948, \dots}$
3	3	$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix}$	4	-1	$\frac{2, 9, 28, 97, 324, 1097, \dots}{6, 31, 154, 693, 2850, 11501, \dots}$
3	3	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 6 & 1 \end{pmatrix}$	4	0	$\frac{10, 0, 86, 0, 760, 0, \dots}{30, 0, 507, 0, 6592, 0, \dots}$
3	3	$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}$	3	1	$\frac{1, 4, 14, 40, 119, 362, \dots}{1, 10, 54, 226, 867, 3188, \dots}$
3	3	$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 6 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	3	2	$\frac{1, 4, 14, 40, 117, 348, \dots}{1, 10, 54, 226, 859, 3110, \dots}$
3	4	$\begin{pmatrix} 2 & 7 & 7 \\ 7 & 4 & 3 \end{pmatrix}$	5	-2	$\frac{2, 13, 45, 143, 534, 2014, \dots}{5, 51, 248, 1048, 4685, 20691, \dots}$
3	4	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 10 & 12 & 7 \end{pmatrix}$	5	-1	$\frac{4, 17, 54, 192, 681, 2481, \dots}{8, 69, 313, 1458, 6204, 26585, \dots}$
3	4	$\begin{pmatrix} 6 & 6 & 1 \\ 2 & 7 & 6 \end{pmatrix}$	5	0	$\frac{8, 25, 66, 248, 917, 3153, \dots}{25, 126, 471, 2046, 8872, 35842, \dots}$
3	4	$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 12 & 5 & 2 \end{pmatrix}$	4	1	$\frac{1, 5, 24, 71, 238, 866, \dots}{1, 11, 108, 417, 1857, 7960, \dots}$
3	4	$\begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 2 & 7 & 2 \end{pmatrix}$	4	2	$\frac{2, 9, 28, 97, 324, 1103, \dots}{6, 31, 154, 693, 2850, 11537, \dots}$
3	5	$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 7 \\ 14 & 13 & 7 \end{pmatrix}$	6	-2	$\frac{6, 27, 70, 285, 1103, 4063, \dots}{26, 129, 494, 2446, 10878, 46500, \dots}$
3	5	$\begin{pmatrix} 5 & 7 & 1 \\ 10 & 2 & 17 \end{pmatrix}$	6	-1	$\frac{13, 0, 180, 0, 2519, 0, \dots}{43, 0, 1288, 0, 25946, 0, \dots}$
3	5	$\begin{pmatrix} 4 & 6 & 7 \\ 17 & 7 & 2 \end{pmatrix}$	6	0	$\frac{18, 0, 219, 0, 3097, 0, \dots}{60, 0, 1446, 0, 30442, 0, \dots}$
3	5	$\begin{pmatrix} 4 & 7 & 7 \\ 16 & 4 & 3 \end{pmatrix}$	5	1	$\frac{2, 13, 45, 143, 534, 2016, \dots}{5, 51, 248, 1048, 4685, 20700, \dots}$
3	5	$\begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 12 & 16 & 1 \end{pmatrix}$	5	2	$\frac{4, 17, 54, 192, 681, 2489, \dots}{8, 69, 313, 1458, 6204, 26613, \dots}$

Table 1: Good (3,2) Convolutional Codes

$n$	$\nu$	$G(D)$	$d_{free}$	$\chi$	Spectra $\frac{t_1, t_2, \dots}{f_1, f_2, \dots}$
3	6	$\begin{pmatrix} 6 & 15 & 15 \\ 15 & 17 & 6 \end{pmatrix}$	7	-2	$\frac{17, 53, 133, 569, 2327, 8624, \dots}{86, 360, 1148, 5767, 27277, 114524, \dots}$
3	6	$\begin{pmatrix} 6 & 14 & 15 \\ 15 & 15 & 3 \end{pmatrix}$	6	-1	$\frac{1, 16, 48, 158, 642, 2435, \dots}{3, 70, 285, 1276, 6160, 27128, \dots}$
3	6	$\begin{pmatrix} 16 & 14 & 5 \\ 2 & 17 & 16 \end{pmatrix}$	6	0	$\frac{2, 19, 61, 205, 802, 3019, \dots}{5, 84, 373, 1636, 7675, 33444, \dots}$
3	6	$\begin{pmatrix} 6 & 7 & 6 \\ 32 & 16 & 3 \end{pmatrix}$	6	1	$\frac{6, 27, 70, 285, 1103, 4063, \dots}{26, 129, 494, 2446, 10878, 46500, \dots}$
3	6	$\begin{pmatrix} 12 & 4 & 7 \\ 2 & 17 & 4 \end{pmatrix}$	6	2	$\frac{13, 0, 180, 0, 2519, 0, \dots}{43, 0, 1288, 0, 25946, 0, \dots}$
3	7	$\begin{pmatrix} 6 & 15 & 15 \\ 37 & 21 & 16 \end{pmatrix}$	8	-2	$\frac{41, 0, 528, 0, 7497, 0, \dots}{234, 0, 4854, 0, 93342, 0, \dots}$
3	7	$\begin{pmatrix} 17 & 15 & 7 \\ 26 & 4 & 33 \end{pmatrix}$	8	-1	$\frac{60, 0, 649, 0, 10075, 0, \dots}{314, 0, 5899, 0, 120705, 0, \dots}$
3	7	$\begin{pmatrix} 16 & 14 & 15 \\ 33 & 1 & 16 \end{pmatrix}$	8	0	$\frac{75, 0, 810, 0, 12246, 0, \dots}{422, 0, 7558, 0, 149728, 0, \dots}$
3	7	$\begin{pmatrix} 14 & 13 & 13 \\ 26 & 6 & 17 \end{pmatrix}$	7	1	$\frac{17, 53, 133, 569, 2327, 8624, \dots}{86, 360, 1148, 5767, 27277, 114524, \dots}$
3	7	$\begin{pmatrix} 14 & 13 & 3 \\ 26 & 14 & 13 \end{pmatrix}$	6	2	$\frac{1, 16, 48, 158, 642, 2435, \dots}{3, 70, 285, 1276, 6160, 27128, \dots}$
3	8	$\begin{pmatrix} 6 & 31 & 27 \\ 23 & 37 & 16 \end{pmatrix}$	8	-2	$\frac{6, 42, 153, 510, 1853, 7338, \dots}{20, 284, 1312, 5164, 22192, 99382, \dots}$
3	8	$\begin{pmatrix} 12 & 34 & 35 \\ 23 & 37 & 1 \end{pmatrix}$	8	-1	$\frac{9, 58, 161, 566, 2251, 8668, \dots}{38, 416, 1404, 5994, 27194, 118184, \dots}$
3	8	$\begin{pmatrix} 30 & 32 & 37 \\ 37 & 11 & 2 \end{pmatrix}$	8	0	$\frac{27, 0, 405, 0, 5577, 0, \dots}{146, 0, 3482, 0, 65712, 0, \dots}$
3	8	$\begin{pmatrix} 14 & 15 & 15 \\ 76 & 16 & 21 \end{pmatrix}$	8	1	$\frac{41, 0, 528, 0, 7497, 0, \dots}{234, 0, 4854, 0, 93342, 0, \dots}$
3	8	$\begin{pmatrix} 36 & 16 & 15 \\ 26 & 33 & 2 \end{pmatrix}$	8	2	$\frac{60, 0, 649, 0, 10075, 0, \dots}{314, 0, 5899, 0, 120705, 0, \dots}$

Table 2: Good (3,2) Convolutional Codes

$n$	$\nu$	$Q(D)$	$d_{free}$	$\chi$	Spectra $\frac{f_1, f_2, \dots}{f_1, f_2, \dots}$
4	3	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 3 & 0 \end{pmatrix}$	4	-3	$\frac{5, 36, 152, 708, 3424, 16312, \dots}{9, 200, 1736, 11604, 71436, 418144, \dots}$
4	3	$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	4	-2	$\frac{10, 42, 194, 886, 4115, 19061, \dots}{32, 212, 1476, 8564, 48908, 267045, \dots}$
4	3	$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	4	-1	$\frac{29, 0, 532, 0, 10059, 0, \dots}{124, 0, 4504, 0, 126049, 0, \dots}$
4	3	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	3	0	$\frac{3, 13, 64, 263, 1078, 4614, \dots}{4, 56, 423, 2340, 12243, 63062, \dots}$
4	3	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	3	1	$\frac{6, 23, 80, 308, 1191, 4560, \dots}{13, 84, 436, 2136, 10005, 45258, \dots}$
4	3	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	3	2	$\frac{6, 23, 80, 296, 1109, 4166, \dots}{15, 100, 520, 2490, 11374, 50362, \dots}$
4	3	$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	3	3	$\frac{6, 23, 80, 290, 1068, 3945, \dots}{15, 104, 540, 2557, 11534, 50352, \dots}$
4	4	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 7 & 1 \\ 4 & 7 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	4	-3	$\frac{1, 16, 84, 376, 1912, 9728, \dots}{1, 68, 932, 5748, 39940, 250076, \dots}$
4	4	$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 6 & 2 & 6 & 1 \end{pmatrix}$	4	-2	$\frac{2, 22, 96, 464, 2353, 11748, \dots}{3, 93, 680, 4461, 28214, 170448, \dots}$
4	4	$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \\ 6 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	4	-1	$\frac{3, 44, 160, 638, 3558, 17222, \dots}{6, 296, 1354, 6891, 47098, 263917, \dots}$
4	4	$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$	4	0	$\frac{5, 39, 151, 690, 3548, 16976, \dots}{14, 223, 1208, 6982, 43888, 245156, \dots}$
4	4	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$	4	1	$\frac{5, 36, 152, 708, 3439, 16510, \dots}{9, 136, 1012, 6380, 38193, 220131, \dots}$
4	4	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$	4	2	$\frac{10, 42, 194, 886, 4135, 19275, \dots}{32, 220, 1521, 8823, 50458, 276547, \dots}$
4	4	$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 6 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	4	3	$\frac{29, 0, 532, 0, 10146, 0, \dots}{124, 0, 4504, 0, 126653, 0, \dots}$

Table 3: Good (4,3) Convolutional Codes

$n$	$\nu$	$Q(D)$	$d_{free}$	$\chi$	Spectra $\frac{f_1, f_2, \dots}{f_1, f_2, \dots}$
4	5	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 6 & 6 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 7 & 4 \end{pmatrix}$	5	-3	$\frac{7, 45, 223, 1066, 5612, 29012, \dots}{24, 264, 1827, 11044, 70380, 426228, \dots}$
4	5	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 3 \\ 6 & 0 & 4 & 3 \\ 4 & 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	5	-2	$\frac{9, 55, 276, 1308, 6740, 34757, \dots}{27, 376, 2524, 14860, 92772, 555164, \dots}$
4	5	$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 3 \\ 4 & 6 & 0 & 3 \\ 1 & 5 & 5 & 2 \end{pmatrix}$	5	-1	$\frac{13, 64, 309, 1584, 8034, 40926, \dots}{50, 409, 2788, 17793, 108073, 641903, \dots}$
4	5	$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 7 & 2 \\ 6 & 7 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	5	0	$\frac{15, 81, 354, 1766, 9233, 46606, \dots}{59, 528, 3232, 20199, 126284, 745331, \dots}$
4	5	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & 4 & 6 & 1 \\ 2 & 0 & 7 & 4 \end{pmatrix}$	4	1	$\frac{1, 16, 84, 376, 1913, 9752, \dots}{1, 52, 544, 3264, 21138, 128974, \dots}$
4	5	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 2 & 1 \\ 6 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	4	2	$\frac{2, 22, 96, 464, 2353, 11766, \dots}{4, 96, 685, 4487, 28336, 171105, \dots}$
4	5	$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 1 \\ 6 & 2 & 1 & 2 \\ 6 & 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}$	4	3	$\frac{3, 44, 160, 638, 3561, 17278, \dots}{6, 296, 1370, 6905, 46758, 263183, \dots}$
4	6	$\begin{pmatrix} 4 & 6 & 3 & 1 \\ 6 & 1 & 7 & 2 \\ 3 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}$	6	-3	$\frac{27, 118, 529, 2978, 15201, 79518, \dots}{151, 898, 5436, 37195, 222112, 1341095, \dots}$
4	6	$\begin{pmatrix} 6 & 2 & 6 & 1 \\ 6 & 3 & 1 & 4 \\ 7 & 6 & 1 & 3 \end{pmatrix}$	6	-2	$\frac{48, 0, 1241, 0, 33464, 0, \dots}{257, 0, 12797, 0, 502739, 0, \dots}$
4	6	$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 5 & 3 \\ 10 & 6 & 4 & 7 \end{pmatrix}$	6	-1	$\frac{45, 109, 844, 3444, 20880, 100121, \dots}{263, 851, 9248, 43653, 319965, 1737951, \dots}$
4	6	$\begin{pmatrix} 4 & 6 & 2 & 5 \\ 0 & 6 & 7 & 2 \\ 7 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	6	0	$\frac{65, 0, 1712, 0, 45173, 0, \dots}{333, 0, 17333, 0, 664262, 0, \dots}$
4	6	$\begin{pmatrix} 6 & 4 & 4 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 7 & 5 \end{pmatrix}$	5	1	$\frac{7, 45, 223, 1066, 5612, 29033, \dots}{24, 264, 1827, 11044, 70380, 426377, \dots}$
4	6	$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 & 2 \\ 6 & 6 & 1 & 0 \\ 12 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$	5	2	$\frac{9, 55, 276, 1308, 6740, 34784, \dots}{27, 376, 2524, 14860, 92772, 555308, \dots}$
4	6	$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 & 1 \\ 6 & 0 & 3 & 2 \\ 12 & 12 & 4 & 1 \end{pmatrix}$	5	3	$\frac{13, 64, 309, 1584, 8034, 40952, \dots}{50, 409, 2788, 17793, 108073, 642094, \dots}$

Table 4: Good (4,3) Convolutional Codes