

# 行政院國家科學委員會專題研究計畫 成果報告

## 分數轉換及其在訊號和影像處理上的應用 研究成果報告(精簡版)

計畫類別：個別型  
計畫編號：NSC 95-2218-E-002-070-  
執行期間：95年11月01日至96年07月31日  
執行單位：國立臺灣大學電信工程學研究所

計畫主持人：丁建均

計畫參與人員：碩士班研究生-兼任助理：張育思、郭國銓、黃俊德、沈汝川、林于哲

處理方式：本計畫可公開查詢

中華民國 96年12月16日

# 分數轉換及其在訊號和影像處理上的應用研究

## 成果報告

952218-E-002-070

### 目錄

報告內容	2
一、前言	2
二、研究目的	2
三、文獻探討	3
四、研究方法	4
五、結果	4
六、結論與建議	6
參考文獻	7
計劃成果自評	10

# 報告內容

## 一、前言

這份報告是對國科會計劃「分數轉換及其在訊號和影像處理上的應用」的成果的描述，我們在計劃期間，所發展出的理論與研究術果頗多，包括新的分數濾波器設計的理論，白色雜訊在時頻分佈上的性質，以及如何運用濾波器將白色雜訊的影響減少。在影像處理上，發展了運用相角窗和分數轉換作角和邊緣的方向的偵測的新方法。在特徵函數方面，我們發現，用勒讓德序列 (Legendre sequence) 找到的離散傅立葉轉換的特徵函數，有改良快速演算法的優點。我們也提出了一個一般化的找交換矩陣的方法，並藉此可以找到許多週期短陣正交的特徵函數。我們也改善了時頻分析的解析度的問題，讓時頻分析的技術，更能夠用來作聲音信號的處理。

在成果上，我們發表了四篇 IEEE 期刊的論文，五篇國際研討會論文，以及二篇國內研討會論文。另外，還有四篇論文投稿到 IEEE 期刊，目前正在審查中，另外也投稿一篇論文至國際研討會，目前尚有二篇期刊論文和三篇國際研討會論文正在撰寫中。

非常感謝一年來國科會在經費上的協助，以及五位碩士班學生孜孜不倦的協助研究。未來我們會更加努力的投入研究。

## 二、研究目的

本計劃的研究目的，一方面，藉由分數轉換 (fractional transform) 和加伯轉換 (Gabor transform) 的互相結合，來研究信號處理的新方法、新理論。一方面，是提升研究生的研究能力。

分數轉換，尤其是分數傅立葉轉換 (fractional Fourier transform) 在信號處理、頻譜分析上面，是一個重要而具有前瞻性的新領域。它突破了傳統只能在頻域上分析信號的方式，而能夠在二維的時頻平面 (time-frequency plane) 上來分析信號。也由於它是一個相當新的領域，目前尚有不少的理論尚未被發展完全。

因此，去年我們在提出這個計劃時，希望能藉此更進一步加深分數轉換的應用，尤其，最近我們投入了不少的心力在研究分數轉換以及時頻分析 (短時傅立葉轉換，加伯轉換，韋格納分佈，柯恩轉換) 之間的關係。雖然分數轉換以經被研究了多年，但是，其中有一些東西，一直是分數轉換在技術上的瓶頸。比如說，分數轉換的參數  $\alpha$  該如何決定。因為分數轉太過於靈活，太過於一般化，反而使得設計上有參數不易決定的問題。但是，我們發現，這個問題可以由時頻分析的技巧來解決。尤其，我們發現，加伯轉換可以避免在韋格納分佈函數

(Wigner distribution function) 當中較難處理的交叉項 (cross term) 的問題，以致於能夠更精準的分析一個信號經過分數傅立葉轉換之後的特性。雖難它的解析度較差，但是這個問題也藉由將加伯轉換及韋格納分佈函數互相結合來解決，也就是我們所提出的加伯-韋格納轉換 (Gabor-Wigner transform)。

這發現算是一個重要的里程碑，使得分數轉換當中的一個長期困擾大家的難題——參數的決定——獲得了有效的解決。我們可以藉此將分數轉換快速的最佳化，並準確的預測信號經過分數轉換的性質。這樣一來，許多在應用上的問題都獲得了有效解決。

因此，我們提出這個計劃的目的，就是想到可以根據我們所發現的這個新理論，來發展出一套分數轉換新的應用來。這一年來，也的確得到了不少的成果。

我的學生對於分數傅立葉轉換和時頻分析也有高度的興趣，我也希望藉由這個計劃的執行，讓他們投入相關的研究，一年過去了，學生成長了不少，相信這個研究的經驗對他們將來學術上或職場上的發展能夠有所幫助。

### 三、文獻探討

分數傅立葉轉換出現於 1980 年 (見參考文獻 [12])，至於，受到信號處理領域的學者重視，是始於 1994 年 [28]，此後，不斷有新的理論和應用的發展。在 2000 年，Ozaktas 等人將分數傅立葉轉換整理成一本書 [15]，對這個領域作一個通般的介紹。然而，在此之後，分數傅立葉轉換的理論及應用依然蓬勃力發展。關於分數傅立葉轉的理論，可見參考文獻 [12]~[19]，關於分數傅立葉轉換的應用，可見參考文獻 [20]~[27]。此外，時頻分析和分數傅立葉轉換之間有相當密切的關係。[31]-[33]是早期有關時頻分析的文章。最早發現分數傅立葉轉換是相當於韋格納分佈上作旋轉的，是參考文獻 [29] 的文章。另外，[30] 將 [29] 當中的理論作更進一步的探討。

最近，我們發現了加伯轉換和分數傅立葉轉換之間，也有相當密切的關係。用這個特性，我們可以探討分數傅立葉轉換在濾波器設計、調變和解調、以及取樣定理上的應用 (參考文獻 [2])。我們也探討了如何將分數傅立葉轉換用在影像加密和影像傳送 (參考文獻 [10])，以及拮取影像的角特徵(參考文獻 [11])。我們也探討了分數傅立葉轉換參數為虛數時的特徵函數 (參考文獻 [4])，這樣的理論，以於電磁波在能量會損失的區域中傳播的分析，會很有幫助。我們更進一步的探討了離散傅立葉轉換的特徵向量 (參考文獻 [1][9])，藉此，我們可以讓所定義出的離散分數傅立葉轉換的性質，更近似於連續的分數傅立葉轉換，並且更適合於濾波器設計，及其他各方面的應用。此外，在有限區間的信號處理方面，我們也發展了時間離散和頻率離散時的扁平波函式，並藉此定義出了有限區間的離散分數傅立葉轉換 (參考文獻 [7])，並探討它在濾波器設計和影像加密等方面的應用。

## 四、研究方法

作為新老師，第一次帶學生，因此，研究方法也隨著經驗的累積，不斷的改進。

在研究上，我們採行了分工合作的方式。首先，先由我和學生共同討論，來決定研究的主題和方向。接著，由學生來蒐集資料，並詳加閱讀。等到了有了相當程度的了解之後，再作實驗和模擬。做過實驗，寫過程式之後，接下來，就到了頭腦激盪的階段。先鼓勵學生思考創造，接著，自己再綜合個人對相關領域的了解，以及學生所蒐集的資料，來提出好的創意出來。通常，我和每位學生的合作，經過一段時間之後，總是能得出一些可以寫論文的點子。

等到研究到了一個相當的程度，就開始寫論文了。當然，學生都是碩士生，寫論文的經驗比較少，所以論文主要是由本人來編寫。不過，因為這些碩士生都升到碩二了，我現在也常藉由碩士論文的編寫，來訓練他們寫論文的能力。

大體上，讀資料蒐集資料是由學生負責，創意思考和編寫論文主要是由我來達成，將來我也將多訓練學生寫論文和創意思考的能力。

學生之間，也逐漸有適當的工作分配，一個負責電腦的管理，一個負責總務，其他的負責資料找尋以及指導今年入學的碩一新生。逐漸形分分工的研究團隊之後，研究的效率也較以前增加。

## 五、結果

在計劃執行期間，我們共發表了十一篇論文，包括四篇 IEEE 期刊論文 (其中三篇為長篇，一篇為短篇)，五篇國際研討會的論文，以及二篇國內研討會的論文。以下是其中三篇 IEEE 期刊論文的名稱與 abstract。

**S. C. Pei and J. J. Ding, “Relations between Gabor transforms and fractional Fourier transforms and their applications for signal processing,” *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 55, no. 10, pp. 4839-4850, Oct. 2007.**

Many useful relations between the Gabor transform and the fractional Fourier transform (FRFT) have been derived. First, we find that, like the Wigner distribution function (WDF), the FRFT is also equivalent to the rotation operation of the Gabor transform. Then, we show that performing the scaled inverse Fourier transform (IFT) along an oblique line of the Gabor transform of  $f(t)$  can yield its FRFT. Since the Gabor transform is closely related to the FRFT, we can use it for analyzing the characteristics of the FRFT. Compared with the WDF, the Gabor transform does not have the cross-term problem. This advantage is important for the applications of filter

design, sampling, and multiplexing in the FRFT domain. Moreover, we find that if the Gabor transform is combined with the WDF, the resultant operation (called the Gabor-Wigner transform) also has rotation relation with the FRFT. We also derive the general form of the linear distribution that has rotation relation with the FRFT.

**S. C. Pei, W. L. Hsue, and J. J. Ding, “Discrete fractional Fourier transform based on new nearly tridiagonal commuting matrices,” *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 54, no. 10, pp. 3815-3828, Oct. 2006.**

Based on discrete Hermite-Gaussian like functions, a discrete fractional Fourier transform (DFRFT) which provides sample approximations of the continuous fractional Fourier transform was defined and investigated recently. In this paper, we propose a new nearly tridiagonal matrix which commutes with the discrete Fourier transform (DFT) matrix. The eigenvectors of the new nearly tridiagonal matrix are shown to be DFT eigenvectors which are more similar to the continuous Hermite-Gaussian functions than those developed before. Rigorous discussions on the relations between the eigendecomposition of the newly proposed nearly tridiagonal matrix and the DFT matrix are described. Furthermore, by appropriately combining two linearly independent matrices which both commute with the DFT matrix, we develop a method to obtain DFT eigenvectors even more similar to the continuous Hermite-Gaussian functions. Then, new versions of DFRFT produce their transform outputs closer to the samples of the continuous fractional Fourier transform, and their applications are described. Related computer experiments are performed to illustrate the validity of the works in this paper.

**S. C. Pei and J. J. Ding, “Eigenfunctions of Fourier and fractional Fourier transforms with complex offsets and parameters,” *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, vol. 54, no. 7, pp. 1599-1611, July 2007.**

In this paper, we derive the eigenfunctions of the Fourier transform (FT), the fractional Fourier transform (FRFT), and the linear canonical transform (LCT) with (1) complex parameters and (2) complex offsets. The eigenfunctions in the cases where the parameters and offsets are real were derived in literature. We extend the previous works to the cases of complex parameters and complex offsets. We first derive the eigenvectors of the offset discrete Fourier transform. They approximate the samples of the eigenfunctions of the continuous offset FT. We find that the eigenfunctions of the offset FT with complex offsets are the smoothed Hermite-Gaussian functions with shifting and modulation. Then we extend the results for the case of the offset FRFT

and the offset LCT. We can use the derived eigenfunctions to simulate the self-imaging phenomenon for the optical system with energy-absorbing component, mode selection, encryption, and define the fractional Z-transform and the fractional Laplace transform.

至於，已經寫好並投稿，目前尚在審查中的論文有五篇，包括  
DFT Eigenfunctions Based on Legendre Sequences.

Quaternion Matrix Eigenfunctions and SVD.

Generalized Commuting Matrices and Eigenvectors for Periodic Matrices

Scaled Lifting Scheme for Color Transforms

DFT Eigenvectors Based on Multiple Offset-Diagonal Commuting Matrices

此外，尚有許多點子，目前已經有輪廓，只是因為時間有限，尚未編寫成論文。

## 六、結論與建議

本計劃執行的期間，對於分數轉換以及時頻分析的理論，作了不少的深入了解，並提出了許多新的理論和應用。這一年來的論文產量，比我之前的預期還多一些，希望未來能夠有更好的成果。

非常感謝國科會的協助，讓我有足夠的經費，買相關的設備，讓我和學生們能夠好好的作研究。學生們第一年的研究費，也還算充裕。

不過，建議方面，還是懇請國科會能夠依照學生的人數，來編列人事費。結案的這個計劃（從 2006 年 8 月至 2007 年 7 月）所給的人事費還算足夠，但是，今年我申請的計劃（從 2007 年 8 月至 2008 年 7 月），卻有人事費經費不足的問題。

我因為今年收了新生，因此研究生的人數，從五人增加為九人，然而，從今年 8 月開始的這個計劃，編作學生人事費的經費，卻只有 216,000 元，平均分配給學生，每個人每月只有 2000 元的研究費，遠遠少於其他的教授，讓我感到非常愧對學生。希望國科會審查計劃的經費時，能注意到這些問題。

明年，經驗累積後，我會更加努力的作研究，寫論文，並用心的將學生們栽培成未來優秀的研究人才。

## 參考文獻

### [Part I: 本人近一年來發表的論文]

#### • IEEE 期刊論文

- [1] S. C. Pei, W. L. Hsue, and J. J. Ding, "Discrete fractional Fourier transform based on new nearly tridiagonal commuting matrices," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 54, no. 10, pp. 3815-3828, Oct. 2006. (和本計劃相關)
- [2] S. C. Pei and J. J. Ding, "Relations between Gabor transforms and fractional Fourier transforms and their applications for signal processing," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 55, no. 10, pp. 4839-4850, Oct. 2007. (和本計劃相關)
- [3] S. C. Pei and J. J. Ding, "Reversible integer color transform," *IEEE Trans. Image Processing*, vol. 16, no. 6, pp. 1686-1690, June 2007.
- [4] S. C. Pei and J. J. Ding, "Eigenfunctions of Fourier and fractional Fourier transforms with complex offsets and parameters," *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, vol. 54, no. 7, pp. 1599-1611, July 2007. (和本計劃相關)

#### • 國際研討會論文

- [5] S. C. Pei and J. J. Ding, "Scaled lifting scheme and generalized reversible integer transform," *ISCAS*, pp. 3203-3206, May 2007.
- [6] S. C. Pei and J. J. Ding, "Improved Harris' algorithm for corner and edge detections," *ICIP*, vol. 3, pp. 57-60, Sept. 2007.
- [7] S. C. Pei and J. J. Ding, "Discrete-to-discrete prolate spheroidal wave functions and finite duration discrete fractional Fourier transform," accepted by *EUSIPCO 2007*. (和本計劃相關)
- [8] S. C. Pei and J. J. Ding, "Quaternions and biquaternions for symmetric Markov-chain system analysis," accepted by *EUSIPCO 2007*.
- [9] S. C. Pei, W. L. Hsue, and J. J. Ding, "Coefficient-truncated higher-order commuting matrices of the discrete Fourier transform," accepted by *ICASSP 2008*. (和本計劃相關)

#### • 國內研討會論文

- [10] J. J. Ding, S. C. Pei, G. C. Guo, J. D. Huang, Y. C. Lin, Y. S. Zhang, and N. C. Shen, "Images sharing the same amplitude spectrum but different phase key," *CVGIP*, 2007. (和本計劃相關)



- [11] J. J. Ding, S. C. Pei, J. D. Huang, G. C. Guo, Y. C. Lin, N. C. Shen, and Y. S. Zhang, "Short response Hilbert transform for edge detection," *CVGIP*, 2007. (和本計劃相關)

## [Part II: 其他相關的文獻]

### • 分數傅立葉轉換的理論

- [12] V. Namias, "The fractional order Fourier transform and its application to quantum mechanics," *J. Inst. Maths. Applics.*, vol. 25, pp. 241-265, 1980.
- [13] H. M. Ozaktas, B. Barshan, D. Mendlovic, L. Onural, "Convolution, filtering, and multiplexing in fractional Fourier domains and their rotation to chirp and wavelet transform," *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 11, no. 2, pp. 547-559, Feb. 1994.
- [14] A. I. Zayed, "On the relationship between the Fourier transform and fractional Fourier transform," *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 3, no. 12, pp. 310-311, Dec. 1996
- [15] H. M. Ozaktas, Z. Zalevsky, and M. A. Kutay, *The Fractional Fourier Transform with Applications in Optics and Signal Processing*, New York, John Wiley & Sons, 2000.
- [16] S. C. Pei and J. J. Ding, "Two-dimensional affine generalized fractional Fourier transform," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 49, no. 4, p. 878-897, Apr. 2001.
- [17] S. C. Pei and J. J. Ding, "Eigenfunctions of linear canonical transform," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 50, no. 1, pp. 11-26, Jan. 2002.
- [18] S. C. Pei, M. H. Yeh and T. L. Luo, "Fractional Fourier Series expansion for finite signals and dual extension to discrete-time fractional Fourier transform," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 47, no. 10, pp. 2883-2888, Oct. 1999.
- [19] S. C. Pei and J. J. Ding, "Closed form discrete fractional and affine Fourier transforms," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 48, no. 5, pp. 1338-1353, May 2000.

### • 分數傅立葉轉換的應用

- [20] Z. Zalevsky and D. Mendlovic, "Fractional Wiener filter," *Appl. Opt.*, vol. 35, no. 20, pp. 3930-3936, Jul. 1996.
- [21] W. Lohmann, Z. Zalevsky, and D. Mendlovic, "Synthesis of pattern recognition filters for fractional Fourier processing," *Opt. Commun.*, vol. 128, pp. 199-204,

Jul. 1996

- [22] C. Mendlovic and A. W. Lohmann, "Space-bandwidth product adaptation and its application to superresolution: fundamentals," *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 14, no. 3, pp. 558-562, Mar. 1997.
- [23] M. A. Kutay, H. M. Ozaktas, O. Arikan, and L. Onural, "Optimal filter in fractional Fourier domains," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 45, no. 5, pp. 1129-1143, May 1997.
- [24] Y. Zhang, B. Z. Dong, B. Y. Gu, and G. Z. Yang, "Beam shaping in the fractional Fourier transform domain," *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 15, no. 5, pp. 1114-1120, May 1998.
- [25] Y. Huang and B. Suter, "The fractional wave packet transform," *Multidimensional Systems and Signal Processing*, vol. 9, pp. 399-402, 1998.
- [26] S. Liu, L. Yu, and B. Zhu, "Optical image encryption by cascaded fractional Fourier transforms with random phase filtering," *Opt. Commun.*, vol. 187, pp. 57-63, Jan. 2001.
- [27] S. C. Pei and J. J. Ding, "Saving the bandwidth in the fractional domain by generalized Hilbert transform pair relation," *ISCAS 2003*, vol. 4, pp. 89-92, May 2003.

- 時頻分析

- [28] L. B. Almeida, "The fractional Fourier transform and time-frequency representations," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 42, no. 11, pp. 3084-3091, Nov. 1994.
- [29] Mustard D. A., "The fractional Fourier transform and the Wigner distribution," *J. Australia Mathematics Society B*, vol. 38, pp. 209-219, 1996.
- [30] S. C. Pei and J. J. Ding, "Relations between the fractional operations and the Wigner distribution, ambiguity function," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 49, no. 8, pp. 1638-1655, Aug. 2001.
- [31] D. Gabor, "Theory of communication", *J. Inst. Elec. Eng.*, vol. 93, pp. 429-457, Nov. 1946.
- [32] D. Slepian and H. O. Pollak, "Prolate spheroidal wave functions, Fourier analysis and uncertainty-I," *Bell Syst. Tech. J.*, vol. 40, pp. 43-63, 1961.
- [33] M. J. Bastiaans, "Gabor's expansion of a signal into Gaussian elementary signals," *Proc. IEEE*, vol. 68, pp. 594-598, 1980.

## 計劃成果自評

執行計劃的這一年來，成果最多的，就是在論文的方面，不但發表了總共 11 篇論文，而且尚有 5 篇論文在審查中，5 篇論文在編寫中。原本，在提這個計劃的時候，我只預期投稿三篇國際期刊論文，和五篇研討會的論文，但今年的成果，卻比我之前的預期還要多。

研究的內容和計劃相符的程度頗高，學生方面，除了一位同學後來的研究偏向於影像處理以外，其他同學的研究大致上都和分數轉換有關，至於，所刊登的論文，11 篇中有 7 篇是和分數轉換相關。

至於，學術上的價值，不只受到國際期刊的肯定，大部分相關的理論也是全世界第一次有人討論類似的問題。相信對將來信號處理理論的發展會有所幫助。

除了已經發表或正在審理的論文之外，這一年，尚有許多不錯的新點子，只是因為時間有，還沒有編寫成期刊論文。這些新點子，將作為學生們的碩士論文的一部分，將來進一步投稿到國際期刊。

雖然，這一年，是我當教職的第一年，一方面要忙備課的事情（新老師平均一週要花三天左右的時間來備課），一方面，還要兼顧個人的家庭，但是，在我和學生們共同的努力下，總算有還算值得欣慰的成果。在未來，我將更努力在研究上面。

在學生方面，學生們作研究的技巧，尤其是找資料和寫程式作模擬的技巧，比以前進步多了。他們是我當教職第一屆所帶的學生，對於他們，我一直視為相當重要的合作夥伴。看到他們不斷的成長，我也覺得相當欣慰。

至於要改進的地方，我想，在時間的規劃上，我應該還可以做得更好。這樣才不會造成許多點子沒有時間寫成論文的情形。一方面，新老師畢竟經驗上還是不夠。我是邊當導師，邊學習帶學生的方法。其實，不只是學生在學習，老師自己也是在學習。我想，唸研究所，最重要的是培養發明創造和獨立做研究的能力。對於這一點，我以後會更加努力的將學生們訓練成一群金頭腦。

希望，累積了教學和研究的經驗後，我將來能夠做得更好。