行政院國家科學委員會專題研究計畫成果報告

抛物線型分散式系統的控制器設計
Controller Design for Parabolic Type Distributed Parameter Systems

計畫編號：NSC 87-2218-E-002-029
執行期限：86 **年** 8 **月** 1 **日至** 87 **年** 7 **月** 31 **日**
主持人：馮蟻剛　　臺灣大學電機系

一、中文摘要

在本計畫中，針對特定形式之抛物線型分佈參數系統，研究一有限維控制器的設計方式。

透過關於分佈參數系統的有限維近似，可以最佳控制理論容易地設計有限維的控制器，在本研究中，提出運用此有限維控制器時，全系統穩定性及表現度的分析方式。其結果則顯示，對於特定形式的抛物線型分佈參數系統，在有限維的近似模型下所設計的有限維控制器，是可以指數化地穩定全系統，我們並可對其相對於有限維近似模型的表現度變化進行估計。

關鍵詞：分佈參數系統，有限維控制器設計，最佳控制理論

Abstract

This research deals with the finite dimensional controller design problem for certain class of parabolic type distributed parameter systems. Based on a finite dimensional approximation model of the distributed parameter systems, we can design finite dimensional controllers via the optimal control theory for finite dimensional systems. For these controllers, we make the stability and performance analysis of the overall system including the controller.

The result shows that for the class of distributed parameter systems under discussion, it is possible to design finite dimensional controllers directly based on the finite dimensional approximation model which exponentially stabilize the overall systems. We can also estimate the overall system performance change with respect to that of the finite dimensional model.

Keywords: distributed parameter systems, finite dimensional controller design, optimal control theory

二、緣由與目的

抛物線型分佈參數系統主要涵蓋由熱傳導模型所描述的熱傳導系統。在分佈參數系統的控制器設計上，若直接比照有限維系統的控制器設計方式，則所設計出的控制器亦常是一分佈參數系統。但在實際工程應用上，由分佈參數系統所描述的控

制器，則無法進行實作。故而，對分佈參數系統而言，有限維的控制器設計是在工程應用上不可避免的要求。

在文獻上，關於有限維控制器的設計，有著相當的成果[4,6,8,9]。其方法大致分兩大方向：其一為直接設計出分佈參數形式之控制器，再對此控制器做有限維之近似；另一方式則是先求得分佈參數系統的有限維近似模型，再依此近似模型求得有限維的控制器。但如何保證全系統的閉迴路穩定及其他相關特性，則是不可避免的難題。

在本計畫的研究中，採用系統的有限維近似模型來處理控制器的設計問題。經由分佈參數系統的有限維近似模型，可以利用在有限維系統中既有之最佳控制理論，而推導最佳之控制器。在本研究中，針對此控制器應用在閉迴路全系統後，全系統之穩定性及表現度進行討論。並提出穩定性及表現度所受到影響之估計。

對原分佈參數系統而言，本研究所提出之方法對全系統而言並非是一最佳之控制器設計，而是次佳(Sub-Optimal)之控制器設計方式，但此設計方式卻是在現有的計算環境中即可容易達成，而無須對複雜的算子方程(Operator Equation)求解。

三、研究方法與成果

令 Z 為一希伯特空間(Hilbert Space)，$A: D(A) \subset Z \to Z$ 為一定義在 Z 上的無界算子(Unbounded Operator)，$D(A)$ 在 Z 中為稠密(Dense)，且 A 為封閉算子(Close Operator)。由 A 產生出的線性半群(C_0-Semigroup)為 $T_0(t)$ [5]。考慮如下之系統

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} z(t) = Az(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cz(t) \\ z(0) = z_0 \end{cases} \tag{1}$$

其中 $B \in L(U,Z), C \in L(Z,Y)$ 為有界算子(Bounded Operator)，$B = [b^1(x), \ldots, b^r(x)]$，$u^T = [u^1(t), \ldots, u^r(t)]$。

假設 A 為一自伴(Self Adjoint)[3]算子且有緻密之預解集(Compact Resolvent)。令 λ_i 與 ϕ_{ij} 滿足 $A\phi_{ij} = \lambda_i \phi_{ij}$，$j = 1 \ldots m_i$ 則 A 之特徵向量 ϕ_{ij} 形成 Z 之一組基底。取 $l, n > 0$，l, n 為正整數。

首先，定義出關於(1)式的有限維部分狀態：令

$$P_n z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m_i} < z, \phi_{ij} > \phi_{ij}$$

$$Q_n = I - P_n$$

則由[7]可知，若

$$z_{ij} = < z, \phi_{ij} >$$

$$b_{ij} = [< b^1, \phi_{ij} >, \ldots, < b^r, \phi_{ij} >]$$

$$z_i^T(t) = [z_{i1}, \ldots, z_{im_i}]$$

$$\tilde{B}_i^T = [b_{i1}, \ldots, b_{im_i}]$$

則 $z_i(t)$ 滿足

$$\dot{z}_i = \lambda_i z_i(t) + \tilde{B}_i u(t)$$

令 $x_1^T = [z_1(t), \ldots, z_l(t)]$，$B_1^T = [\tilde{B}_1(t), \ldots, \tilde{B}_l(t)]$ 及 $A_1 = diag[\lambda_1 I_{m_1}, \ldots, \lambda_l I_{m_l}]$，則 $x_1(t)$ 滿足

$$\dot{x}_1 = A_1 x_1(t) + B_1 u(t) \tag{2}$$

此外，令

$$x_2^T = [z_{l+1}(t), \ldots, z_n(t)]$$

$$B_2^T = [\tilde{B}_{l+1}(t), \ldots, \tilde{B}_n(t)]$$

$$A_2 = diag[\lambda_{l+1} I_{m_{l+1}}, \ldots, \lambda_n I_{m_n}]$$

則 $x_2(t)$ 滿足

$$\dot{x}_2 = A_2 x_2(t) + B_2 u(t) \tag{3}$$

並假設 $rank(\tilde{B}_i) = m_i$ 使得(2)，(3)描述之系統具可控性。在輸出部分，若

$$y^T = [< c^1(x), z >, \ldots, < c^1(x), z >]$$

則令

$$c_{ij}^k =< c^k(x), ¤_{ij} >$$

$$\widetilde{C}_i = \begin{bmatrix} c_{i1}^1 & \Lambda & c_{im_i}^1 \\ \mathrm{M} & & \mathrm{M} \\ c_{i1}^p & \Lambda & c_{im_i}^p \end{bmatrix}$$

$$C_1 = [\widetilde{C}_1, \ldots, \widetilde{C}_l]$$

$$C_2 = [\widetilde{C}_{l+1}, \ldots, \widetilde{C}_n]$$

$$S_n u = [< Q_n c^1, u >, \ldots, < Q_n c^p, u >]^T$$

其中 $u \in Q_n(Z)$ **，則輸出方程式可表為：**

$$y(t) = C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t) + S_n Q_n z(t)$$

並假設 $rank(\widetilde{C}_i) = m_i$ **，使得**(2)**，**(3)**描述之系統具可觀察性。**

在控制器的設計上，採用狀態估測器的迴授控制，定義狀態估測器為

$$\begin{cases} \dot{z}_1(t) = A_1 z_1 + B_1 u + G_1(y - C_1 z_1 - C_2 z_2) \\ \dot{z}_2(t) = A_2 z_2 + B_2 u \end{cases} \qquad (4)$$

且迴授控制為 $u = F_1 z_1(t)$ **，其中** F_1 **及** G_1 **為待給定之矩陣。**

Lemma 1 [7] **若** F_1 **及** G_1 **使得** $^{a}(A_1 + B_1 F_1) < {}^{a}_{l+1}$**，** $^{a}(A_1 - G_1 C_1) < {}^{a}_{l+1}$**，** $\max {}^{a}(A_1 + B_1 F_1) > {}^{a}_{n+1}$**，** $\max {}^{a}(A_1 - G_1 C_1) > {}^{a}_{n+1}$**，且存在一** $\pm$ **使得** $0 > \pm > {}^{a}_{l+1}$**，則由**(2)**，**(3)**及**(4)**所描述之有限維控制器在閉迴路下使全系統為指數穩定。**

根據 Lemma 1 的結果, 我們提出一次佳化(Sub-Optimal)**的有限維控制器的設計過程。首先考慮**(2)**，其為關於系統**(1)**的有限維近似系統，由最佳控制之理論**[1]**，令** $\overline{P}$ **為**

$$\overline{P} A_1 + A_1^T \overline{P} - \overline{P} B_1 R^{-1} B_1^T \overline{P} + Q = 0$$

之解，再令 $u(t) = K^* x_1(t)$ **，其中**

$$K^* = -R^{-1} B_1 \overline{P}$$

則受此控制後(2)**之閉迴路系統將最小化如下之表現指標：**

$$V^2 = \int_0^\infty (u^T R u + x_1^T Q x_1) dt \qquad (5)$$

令 V^* **為此最小表現指標，即**

$$V^{*2} = \int_0^\infty x_1^T (Q + K^{*T} R K^*) x_1 dt$$

但是對原系統(1)**而言，以** K^* **為控制器是否能保證使閉迴路的全系統達到指數穩定及最小化**(5)**之表現指標，則需加以討論。**

令 $L = m_1 + \ldots. + m_l$**，** $M = m_{l+1} + \ldots. + m_n$

$\overline{Z} = R^L \otimes R^M \otimes Q_n Z$ **，並令**

$$\overline{A}_0 = diag[A_1 + B_1 F_1, A_1 - G_1 C_1, A Q_n]$$

$$\overline{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & B_1 F_1 & 0 \\ 0 & 0 & G_1 S_n \\ 0 & Q_n B F_1 & 0 \end{bmatrix}$$

則 $\overline{A}_0$ **為定義在** $\overline{Z}$ **上的無界算子**(Unbounded Operator)**。設** T_0 **為由** $\overline{A}_0$ **所產生之線性半群，** T_1 **為由** $(\overline{A}_0 + \overline{A}_1)$ **所產生之線性半群。令**

$$\mu = \max \mathrm{Re}\, {}^{a}(A_1 + B_1 K^*)$$

則 $\mu < 0$ **，且有** $« > 0$ **使得** $\|T_0\| \le « e^{wt}$**。首先，考慮由** K^* **所形成之控制器之穩定性：**

Theorem 1 **令** $F_1 = K^*$ **，選取** G_1 **使得** $^{a}(A_1 - G_1 C_1) < \pm < 0, \max \mathrm{Re}\, {}^{a}(A_1 - G_1 C_1) > {}^{a}_{n+1}$ **，適當選取** n **之大小，則由**(2)**，**(3)**及**(4)**所描述之有限維控制器在閉迴路下使全系統為指數穩定。**

若 $\widetilde{V}$ **為全系統閉迴路時之表現指標，即**

$$\tilde{V}^{*2} = \int_0^\infty x_1^T (Q + K^{*T} R K^*) x_1 \, dt$$

其中 x_1 為全系統閉迴路下之部分狀態。則在表現指標上有以下之結果：

Theorem 2 令 $\overline{\mu} = {}^{a}_{l+1} + \mu$ ， $\overline{«} = «\|\overline{A}_1\|$ ， $p = «^2 \|z_0\|^2 (k(\overline{«} + \overline{\mu} + \mu)(2\,{}^{a}_{l+1} - k) - {}^{a}_{l+1}\overline{«}(\overline{«}+1))$ ， $q = 2\,{}^{a}_{l+1}\mu\overline{\mu}(\overline{«}+\mu)(\overline{\mu}+\overline{«})(\overline{«}+2´)$ ，則 $\left|V^* - \tilde{V}\right| \le \frac{p}{q}$ 。

四、結論與討論

在本報告中，對於一特定形式之拋物線型分佈參數系統提出了一有限維控制器的設計及分析方式。在設計方面，由現有之控制計算工具即可計算出所需之控制器；在分析方面，則提出在此有限維控制器下全系統的穩定性分析及表現度估計。

五、計畫成果自評

針對原提之計畫，本計畫研究人員已達成主要目的，提出一實際可行之控制器設計即分析方式，。本計畫本質上即屬理論性，因此所探討的問題較為一般化，所取得之成果亦可應用於多種工程系統，例如熱傳導系統的分析上。目前本計畫之研究成果已在整理中，預計將投稿國際性學術期刊，以期獲得更多支回饋而做進一步之突破。

六、參考文獻

[1]Anderson, B. D. O., and J. B. Moore, *Optimal Control- Linear Quadratic Methods*. Prentice Hall, New Jersey, 1990.

[2]Bensoussan, A., G. D. Prato, M. C. Delfour, and S. K. Mitter, *Representation and Control of Infinite Dimensional Systems*, Volume I, Birkhäuser, Boston, 1992.

[3]Conway, J. B., *A Course in Functional Analysis*, Springer-Verlag, New York, 1990.

[4]Curtain, R. F., "*A Comparison of Finite-Dimensional Compensator Design for Distributed Parameter Systems,*" *Control - Theory and Advanced Technology*, vol. 9, no. 3, pp. 609-628, 1993.

[5]Curtain, R. F. and H. Zwart, *An Introduction to Infinite-Dimensional Linear System Theory*, Springer-Verlag, New York, 1995.

[6]Li, Xunjing, and J. Yong, *Optimal Control Theory for Infinite Dimensional Systems,* Birkhäuser, Boston, 1995.

[7]Pazy, A., *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, 1983.

[8]Sakawa, Y.,"Feedback Stabilization of Linear Diffusion Systems," *SIAM J. Control and Optim.*, vol. 21, no. 5, pp. 667-676., 1983.

[9]Schumacher, J. M., "A Direct Approach to Compensator Design for Distributed Parameter Systems," *SIAM J. Control and Optim.*, vol. 21, no. 6, pp. 823-836, 1983.