行政院國家科學委員會專題研究計畫成果報告

以 LMI 方式設計離散時間無限維系統之控制器

Controller Design for Discrete-Time Infinite Dimensional Systems Using the LMI Approach

計畫編號：NSC 88-2213-E-002-089
執行期限：87 **年** 8 **月** 1 **日至** 88 **年** 7 **月** 31 **日**
主持人：馮蟻剛　　臺灣大學電機系

一、中文摘要

在本計畫中討論無限維參數系統在邊界控制下的強健穩定性問題。對於控制訊號由邊界進入之無限維系統，提出一個處理其強健穩定性的分析方式。

此一分析方式首先將邊界控制問題轉換成一個在內插空間上的歌西問題，使得一般狀態空間的分析方式得以引入。

對於幾類具有特殊形式的無限維參數系統，本計畫亦提出了較容易的計算方式，並給予一個例子以說明所推導理論的計算方式。

關鍵詞：無限維參數系統，邊界控制，強健穩定性

Abstract

In this report, we consider the stability robustness problem for infinite dimensional systems with boundary control inputs.

We first translate the problem into a standard Cauchy problem in certain interpolation space. In such an interpolation space, the boundary control robustness problem can be represented as a standard Cauchy problem with zero boundary conditions, therefore some standard stability robustness analysis methods can be modified to find the robustness bounds..

For certain types of infinite dimensional systems, a practical computation method is developed so that numerical results are easier to obtain.

Keywords: infinite dimensional systems, boundary control problem, stability robustness

二、緣由與目的

關於無限維參數系統的研究，有相當多的研究方向是受有限維系統中的結果所啟發。在半群理論(Semi-group Theory**)的發展下，的確看到無限維參數系統有許多性質是與有限維系統的表現相當接近**[5,8]**。但探究由偏微分方程所描述的無限維系統，則可看出邊界值問題是常微分與偏微分方程所描述系統間的最大差異。**

在由偏微分方程所描述的系統中，外界的能量交換通常是在邊界上進行，也因此，邊界控制問題一直是在實際物理及工程應用上所必須面對的問題。

在[7]**的研究中，曾經討論了特定無限維參數系統的強健穩定性問題，但所討論的系統侷限在沒有邊界控制的情況下，也因此並無法解決控制信號需由邊界進入的情況。**

關於無限維參數系統的邊界值問題，文獻上可看到由 Lion[6]**等人在** 60 **年代中所提出關於跡(**Trace**)及跡算子(**Trace Operator**)的處理方式，詳細討論並引入了內插空間(**Interpolation Space**)以解決此種邊界值的問題。**

在本篇報告中，我們參考由 Amann[2] **等關於邊界問題的處理模式，巧妙的將邊**

界值問題轉換為在內插空間上不具邊界輸入的問題模式。這種問題形式則可直接應用於在[7]所導出關於強健穩定性的結果，而直接處理具有邊界控制項的強健穩定性問題。

三、研究方法與成果

令 Z 為一希伯特空間(Hilbert Space)，$A_0 : D(A_0) \subset Z \to Z$ 為一定義在 Z 上的無界算子(Unbounded Operator)，$D(A_0)$ 在 Z 中為稠密(Dense)，且為閉算子(Close Operator)。由 A_0 產生出的線性半群(C_0 Semigroup)為 $T_0(t)$。考慮如下之系統

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} z(t) = A_0 z(t) + Bu(t) \\ Ez = g(t) \\ y(t) = Cz(t) \\ z(0) = z_0 \end{cases} \qquad (1)$$

其中 $B \in L(U,Z), C \in L(Z,Y)$ 為有界算子(Bounded Operator)，E 為邊界算子(Boundary Operator)。$u(t)$ 及 $g(t)$ 為控制輸入訊號，$y(t)$ 為輸出訊號。並假設(1)所描述的系統為指數穩定(Exponentially Stable)。定義 A_0 的相對有界算子(Relative Bounded Operators) $J(A_0)$ 為

$$J(A_0) = \{A \mid D(A_0) \subset D(A),$$
$$\|Az\| \le \sim \|A_0 z\| + \quad \|z\|\}$$

考慮擾動算子 $A_i \in J(A_0), i = 1,\dots,N_0$，及以下的受擾動系統：

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} z(t) = (A_0 + k_i \sum_{i-1}^{N_0} A_i) z(t) + Bu(t) \\ Ez = g(t) \\ y(t) = Cz(t) \\ z(0) = z_0 \end{cases} \qquad (2)$$

令 $u(t) = 0$，$g(t) = k_{N_0+1} y(t)$，即只考慮由邊界所提供的輸出回受控制，整理得如下之包含擾動項之輸出迴授控制系統：

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} z(t) = (A_0 + k_i \sum_{i-1}^{N_0} A_i) z(t) \\ Ez(t) = k_{N_0+1} \cdot Cz(t) \\ z(0) = z_0 \end{cases} \qquad (3)$$

注意在 $k_i = 0, i = 1,\dots,N_0+1$ 下，由(3)所描述的系統為指數穩定。

令 $k = \left[k_1,\dots,k_{N_0+1}\right]^T$，考慮由(3)所描述的系統，則一邊界強健穩定性問題即是找到 k 的一個上界 $\bar{k}$ 使得當 $|k| < \bar{k}$ 時由(3)所描述的系統仍是指數穩定。

在[7]中曾經討論了在沒有邊界輸入之下的強健穩定性問題，而在具有邊界控制項下，我們引入在內插空間(Interpolation Space)下的表達式，以處理邊界控制問題。

定義 1 若 $X \subset Y$, X, Y 為 Hilbert 空間，$A : X \to Y$ 為正定自伴算子(Positive and Self-Adjoint Operator)，對任意 $0 \le {}^{-} \le 1$，定義 X 與 Y 之間的內差空間為：

$$[X,Y]_{1-{}^{-}} = D(A^{-}) \qquad (4)$$

在內差空間的定義下，我們可由 A_0 建構出一組內插空間 $A_{0,s}$。首先，對於整數 $s \ge 0$ 定義 $H_s = (D(A_0^s), \|\bullet\|_s)$，而對於 $s < 0$ 定義 H_s 為 $(D(A_0^s), \|\bullet\|_s)$ 所完備化(Completion)之空間。接著，對於 $s \ge 0$ 令 $A_{0,s}$ 為 A_0 在 H_s 下的實現(Realization)，而 $s < 0$ 時則為 A_0 在 H_s 的閉延拓(Closed Extension)。再令 $H_{\sim} = [H_s, H_{s+1}]_{\sim - s}$, $s < \sim < s+1, s \in Z$，及 $A_{0,\sim}$ 為 $A_{0,s}$ 在 $H_{\sim}$ 下的實現 $s < \sim < s+1, s \in Z$。在此程序下，我們有了一組由 A_0 所建構出的函數空間 $\{(H_{\sim}, A_{0,\sim}), \sim \in \Re\}$，且每一 $A_{0,\sim}$ 產生一線性半群 $T_{0,\sim}(t) = e^{A_{0,\sim} t}$。

有了這組由 A_0 所產生的函數空間 $\{(H_{\sim}, A_{0,\sim}), \sim \in \Re\}$，令 $^{\circ}(A_0)$ 為 A_0 之預解集(Resolvent Set)，我們引入系統(3)在內插空間中的表達式。

定理 2[2] 給定一$\pm \in °(A_0)$，則存在一 $\in (0,1)$及一線性算子R，使得由(3)所描述的系統與下述之系統

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}z(t) = (A_{0,\ -1} + k_i\sum_{i-1}^{N_0} A_{i,\ -1})z(t) + \\ \qquad k_{N_0+1}(\pm I - A_{0,\ -1})R\ C\ z \\ z(0)=z_0 \end{cases} \qquad (5)$$

在由$H_{\ -1}$所決定的測試函數(Test Function)下其弱解(Weak Solution)是一致的。

以下的引理是敘述主要結果所必須的：

引理 3 $(\pm I - A_{0,\ -1})R\ C$ 為一$A_{0,\ -1}$之相對有界算子，即 $(\pm I - A_{0,\ -1})R\ C \in J(A_{0,\ -1})$，且其相對有界係數(Relative Bounded Coefficient)為 $\sim = \|R\ C\|$，$= |\pm| \cdot \|R\ C\|$。

下面的定理是主要的結果:

定理 4 若由(5)所描述的系統在$k_i = 0$時為指數穩定，且為正規算子，亦即有 $«, ´ > 0$ 使得 $\|T_{0,\ -1}(t)\|_{\ -1} \le «e^{-´t}$。令 $P_{0,\ -1}z = \int_0^\infty T^*_{0,\ -1}T_{0,\ -1}z\,dt$，且令

$$\bar{k}_i = \inf_{\|z\|=1} \left|\left\langle (P_{0,\ -1}A_{i,\ -1} + A^*_{i,\ -1}P_{0,\ -1})z, z\right\rangle_{\ -1}\right|^{-1}$$

$$\bar{k}_{N_0+1} = (2(1+r)\sim_{N_0+1} + \frac{«^2}{´}\ _{N_0+1})^{-1}$$

其中$r = \|A_{0,\ -1}P_{0,\ -1}\|_{\ -1}$，令$\bar{k} = (\sum_{k=1}^{N_0+1} \bar{k}_i^{-2})^{-1/2}$則當$|k| < \bar{k}$，由(3)所描述的系統仍為指數穩定。

定理 4 所描述的為一般性的結果，此結果在實際的計算上不太方便，故而對較特殊的A_0我們給出下面的結果：

系理 5 若$A_{0,\ -1}$為自伴算子(Self Adjoint)，且對每一個擾動$A_{i,\ -1}$其相對有界係數$\sim_i,\ _i$均為已知，則

$$\bar{k}_i \ge (\sim_i + \frac{«}{´}\ )^{-1},\quad i = 1,...,N_0+1$$

若對所有的擾動的相對有界係數皆是已知，則類理 5的結果提供了一個相當簡單估計強健穩定範圍的方式。下面是一個說明的例子。

範例 6 考慮如下的熱傳導方程式：

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial t}(t,x) = (\frac{\partial^2}{\partial x^2} - 1)z(t,x) \\ \begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial t}(t,0) \\ \frac{\partial z}{\partial t}(t,1) \end{bmatrix} = k_1 \begin{bmatrix} \int g_1(x)z(t,z)dx \\ \int g_2(x)z(t,z)dx \end{bmatrix} \\ z(0) = z_0 \end{cases} \qquad (6)$$

很容易可以檢查當$k_1 = 0$時此系統為指數穩定。給出相對應之算子：

$$A_0 = (\frac{\partial^2}{\partial x^2} - 1)$$

$$Ez = \begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial t}(t,0) \\ \frac{\partial z}{\partial t}(t,1) \end{bmatrix}, Cz = \begin{bmatrix} \int g_1(x)z(t,z)dx \\ \int g_2(x)z(t,z)dx \end{bmatrix}$$

選擇$\pm = 0 \in °(A_0)$，$\frac{1}{2} < \ < \frac{3}{4}$，並選取$g_1, g_2$使得$\|C\|\ = 1$，則有$\bar{k}_1 \ge \frac{1}{\|R\ \|}$故當$k_1 < \bar{k}_1$由(6)所描述的系統仍為指數穩定。

四、結論與討論

在本報告中提出了一個處理包含邊界迴授控制無限維參數系統的強健性問題分析處理方式。對特定形式的系統及擾動亦給出一較為簡易的計算方式。報告中並包含一個範例作為說明。

五、計畫成果自評

本計畫雖以離散時間無限維系統做為開始之研究對象，但在研究過程中，發現無限維參數系統之邊界控制問題十分特別，且具有其理論重要性，因而轉移研究目標。在新的研究目標中，我們發展出一套新的理論，使邊界控制之處理方式更為系統化。此部分結果目前正投稿國際期刊中。

六、參考文獻

[1]Ahmed, N. U. and X. Xiang, "Nonlinear Boundary Control of Semilinear Parabolic Systems," *SIAM J. Contr. Optim.*, vol. 34, no. 2, pp. 473-490, 1996.

[2]Amann, H., "Parabolic evolution equations and nonlinear boundary conditions," *J. Differ. Equations*, vol. 72, pp. 201-269, 1988.

[3]Bensoussan, A., G. D. Prato, M. C. Delfour, and S. K. Mitter, *Representation and Control of Infinite Dimensional Systems*, Volume I, Birkhäuser, Boston, 1992.

[4]Conway, J. B., *A Course in Functional Analysis*, Springer-Verlag, New York, 1990..

[5]Curtain, R. F. and H. Zwart, *An Introduction to Infinite-Dimensional Linear System Theory*, Springer-Verlag, New York, 1995.

[6]Hinrichsen, D. and A. J. Pritchard, "Robust stability of linear evolution operators on Banach spaces," *SIAM J. Contr. Optim.*, vol 32, no. 2, pp. 1503-1541, 1994.

[6]Lion, J. L., and E. Magenes, *Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications, Volume I*, Springer-Verlag, New York, 1972.

[7]Lu, S. H. and I-K. Fong, "Stability radius of linear normal distributed parameter systems with multiple directional perturbations", *Proc. 37th IEEE Conference on Decision and Control*, pp.819-820, 1998

[8]Pazy, A., *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, 1983.