行政院國家科學委員會專題研究計畫成果報告

具有限制條件之線性參數不確定系統的控制器設計
Controller Design for Linearly Constrained Parametric Uncertain Systems

計畫編號：NSC 89-2213-E-002-088
執行期限：88 **年** 8 **月** 1 **日至** 89 **年** 7 **月** 31 **日**
主持人：馮蟻剛　　臺灣大學電機系

一、中文摘要

當單一輸入受控系統中，使用之制動器具有常見的飽和或死區非線性特性時，本計畫提出一狀態迴授控制器的設計方式，可以在飽和與死區非線性特性之限制下，盡量求得大範圍之穩定區域，及減少由死區非線性特性所造成之性能影響。

由於本計畫採納線性矩陣不等式方法，其具備有效之運算工具，故所提出之設計法則可容易地被應用並求解。

關鍵詞：正定不變集，線性矩陣不等式，凸集最佳化，非線性制動器

Abstract

In this project, for single input systems equipped with actuators having the common saturation and deadzone characteristics, we propose methods for synthesizing state feed-back controllers that can stabilize the systems. The goals are to get a large stability region under the limitation of saturation, to minimize the effect of deadzone, and to ensure reasonable decay rates of state trajectories. By the adopted linear matrix inequality (LMI) formulations, the proposed methods are easy to apply because effective computation tools are readily available.

Keywords: positively invariant set, linear matrix inequality, convex optimization, nonlinear actuator

二、緣由與目的

在實際的控制系統中，制動器或功率放大器等控制元件都具有如飽和或死區等非線性特性。由於物理上的限制或不完美的製造過程常導致這類非線性特性的存在。無論原因為何，這些因素都會破壞系統性能，甚至使整個閉迴路系統不穩定。

在文獻上，處理飽和限制因素常被視為受限制控制 (constrained control) **或有界控制** (bounded control) **問題。大量的解決方式已被提出，例如：多面體集合** (polyhedral set) **外加線性規劃** (linear programming) **法**[1,10,12]**，特徵結構指定** (eigenstructure assignment) **法**[4]**，線性矩陣不等式** (LMI) **法**[5,7,8]**等。至於處理死區非線性問題方面，則鮮少文獻討論。傳統上，處理非線性元件問題時常採用敘述函數** (describing function) **去近似非線性特性在頻域上之影響，但此法主要目的在於檢驗如極限環** (limit-cycle) **之週期解**[9]**是否存在。因此，欲保證閉迴路系統的穩定度，更精確地分析手法有其必要性。**

本研究計畫針對單輸入之狀態空間模式，考量制動器同時具有飽和及死區非線性因素時之控制器設計問題。我們在狀態空間中，尋求一正定不變集[2]**作為穩定區域。為求與李雅普諾夫穩定法則**(Lyapunov stability criteria)**相關，我們選擇橢球型正定不變集，並相對應地推導出以線性矩陣不等式**[3]**為基礎之控制器存在條件，利用既有的運算工具**[6]**，方便並快速地求解。**

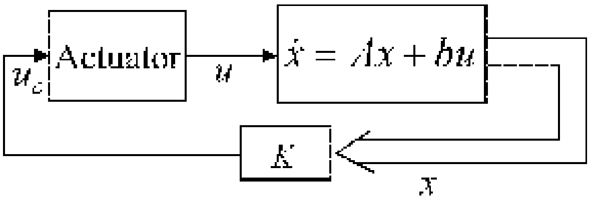
三、研究方法與成果

如圖一所示，考慮如下單一輸入狀態空間系統

$$\begin{aligned} \&(t) &= Ax(t) + bu(t) \\ x(0) &= x_o \end{aligned} \tag{1}$$

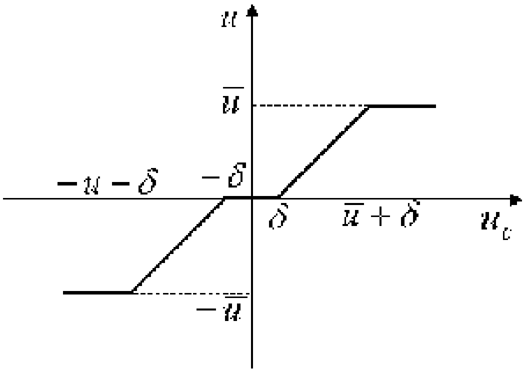
其中 $x \in R^n$ 為系統狀態變數，而控制輸入 $u \in R$ 為一非線性制動器之輸出，即 $u(t) = ¤[u_c(t)]$，在此採用狀態回授控制 $u_c(t) = kx(t)$ 使系統穩定化。因此整個閉回路系統可表示成

$$\&(t) = Ax(t) + b¤(kx) \tag{2}$$



圖一

假設 $\{A, b\}$ 是可控制的，且非線性制動器函數 $¤[u_c(t)]$ 係由對稱且片段線性曲線所組成（見圖二），它用來描述飽和 $(-\bar{u} \le u \le \bar{u})$ 和死區 $(-¢ \le u_c \le ¢)$ 的非線性特性。在此，我們試圖求得狀態回授增益 $k \in R^{1\times n}$ 以穩定整個閉迴路系統。



圖二

當 $¢ = 0$ 且 $0 < \bar{u} < \infty$ 時, 我們知道不可能僅利用狀態回授方式使狀態空間內所有狀態變數收斂至原點[11], 除非此開迴路系統本身是穩定的。因此在此情況下，我們必須尋求一正定不變集 $\mathrm{P} = \{x | x^T Px < 1\}$, 其中 $P \in R^{n\times n}$ 為一正定矩陣，使得從集合 P 中任意初始條件 $x(0)$ 出發之狀態變數軌跡 $x(t)$ 在 $t > 0$ 情況下仍屬於集合 P，且軌跡隨著時間的增加收斂至平衡點。

當 $0 < ¢ < \infty$ 且 $\bar{u} = \infty$ 時，我們不再要求將初始條件侷限於一有界集合。然而，因為死區非線性的存在，我們無法使系統所有軌跡收斂至平衡點，除非此系統是開回路穩定。因此，我們僅能保證終極穩定(ultimate boundedness)，即所有軌跡將收斂至一有界集合 $\mathrm{P}_£ = \{x | x^T Px \le £ < 1\}$，其中 $£$ 應被極小化。

當 $0 < ¢ < \infty$ 且 $0 < \bar{u} < \infty$ 時，我們須在設計此控制器的過程中同時考慮飽和及死區非線性因素。

[A] 飽和制動器因素$(-\bar{u} \le u \le \bar{u})$

考慮飽和限制非線性特性時，我們有兩類選擇性：飽和避免法(saturation avoidance)和飽和允許法(saturation allowance)，我們先討論前一作法。若制動器不飽和則整個閉迴路系統將是線性的，且可描述為

$$\&(t) = (A + bk)x(t), \quad x(0) = x_o \tag{3}$$

Theorem 1 (飽和避免法) 給定制動器飽和範圍條件 $[-\bar{u} \sim \bar{u}]$，若存在一正定矩陣 $Q \in R^{n\times n}$ 和 $y \in R^{1\times n}$ 滿足下列線性矩陣不等式:

$$\begin{aligned} & AQ + QA^T + by + y^T b^T < 0 \\ & \begin{bmatrix} \bar{u}^2 & y \\ y^T & Q \end{bmatrix} > 0 \end{aligned} \tag{4}$$

則制動器輸入 $u_c = kx = (yQ^{-1})x$ 將使集合 $\mathrm{P} = \{x | x^T Q^{-1} x < 1\}$ 為系統(3)之一正定不變集或一穩定區域，且由集合 P 出發之狀態變數軌跡將收斂至平衡點。

由於飽和非線性因素，我們要求集合 P 其範圍愈大愈好，因此我們可設定如下之標的函數以求解一凸集最佳化(convex optimization)問題：

(i) $\min \ \log\det Q^{-1}$

(ii) $\min -\mathrm{trace}(Q)$

(iii) $\min\limits_{0<ëI\le Q} -ë$

subject to (4)

接著，我們考慮飽和允許法。採用李雅普諾夫穩定法則求取一正定不變集 P 確保閉迴路系統為二次形式穩定(quadratically stable)並利用 S-procedure 將

多項限制條件整合為單一二次形式限制不等式。我們以下述定理總結之：

Theorem 2 （飽和允許法）給定制動器飽和範圍條件$[-\bar{u} \sim \bar{u}]$，若存在一正定矩陣$\hat{Q} \in R^{n\times n}$，$\hat{y} \in R^{1\times n}$和兩正數${²}_1$和${²}_3$滿足下列矩陣不等式:

$$\begin{bmatrix} A\hat{Q}+\hat{Q}A^T & b\bar{u}+\frac{1}{2}\hat{y}^T \\ \bar{u}b^T+\frac{1}{2}\hat{y} & {²}_3-\bar{u} \end{bmatrix} \le {²}_1 \begin{bmatrix} \hat{Q} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (5)$$

$$\hat{Q}>0,\ A\hat{Q}+\hat{Q}A^T+b\hat{y}+\hat{y}^T b^T<0$$

則制動器輸入$u_c = kx = (yQ^{-1})x$使集合$\mathrm{P} = \{x | x^T Q^{-1} x < 1\}$為系統一正定不變集且由集合P出發之軌跡將收斂至平衡點。其中$Q^{-1} = \frac{{²}_1}{{²}_3}\hat{Q}^{-1}$。

值得注意的是式(5)為一廣義特徵值問題 (GEVP) (Generalized Eigenvalue Problem)，我們可先求得一最小${²}_1^* > 0$滿足式(4)，再將之固定以形成 LMI，並間接地選取一標的函數$\min\ {²}_3$，藉以將集合P最大化。另外，無論是飽和限制或飽和允許法，對於滿足相對應條件之任意解$\{k, P\}$，可利用求解以下 GEVP (6)將系統正定不變集或穩定區域由$\mathrm{P} = \{x^T Px \le 1\}$擴展至$\{x^T Px \le 1+°;\ °>0\}$:

$$\begin{bmatrix} PA+A^T P-{²}_4 P & Pb\bar{u}+\frac{1}{2}{²}_5 k^T \\ \bar{u}b^T P+\frac{1}{2}{²}_5 k & -{²}_5\bar{u}+{²}_4 \end{bmatrix} \le - ° \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & {²}_4 \end{bmatrix} \qquad (6)$$

其中${²}_4, {²}_5, °$為大於零之變數。

[B]死區制動器因素

在僅考慮死區非線性的情況下，其系統動態模式為：

$$\dot{x}(t) = \begin{cases} Ax + b(kx - ¢), & ¢ \le kx, \\ Ax, & -¢ \le kx \le ¢, \\ Ax + b(kx + ¢), & kx \le -¢. \end{cases} \qquad (7)$$

由於死區因素的存在，我們只能使狀態軌跡收斂到狀態空間原點附近的集合$\mathrm{P}_{£} = \{x | x^T Px \le £ < 1\}$內。

Theorem 3 給定制動器死區範圍$[-¢ \sim ¢]$，若存在一正定矩陣$\hat{Q}>0$，$\hat{y}$和兩正數$0<£<1$及${²}_6>0$滿足下列矩陣不等式：

$$\begin{bmatrix} A\hat{Q}+\hat{Q}A^T+b\hat{y}+\hat{y}^T b^T & -b¢ \\ -¢b^T & -£ \end{bmatrix} \le {²}_6 \begin{bmatrix} \hat{Q} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (8)$$

則狀態回授增益$k = \hat{y}\hat{Q}^{-1}$將使得具有死區制動器之系統狀態軌跡收斂至集合$\mathrm{P}_{£} = \{x | x^T Px \le £ < 1\}$內，其中$P = {²}_6 \hat{Q}^{-1}$。

值得注意的是，式(8)為一 GEVP 問題而非標準 LMI 限制條件，在此，我們可先尋求一最大值${²}_6^* > 0$來滿足式(8)，再由範圍$(0, {²}_6^*]$中選取一適當數值並固定此變數，經選取一適當標的函數如$\min\ £$，則由式(8)所衍生之 LMI 將形成一凸集最佳化問題。

[C]飽和及死區非線性制動器

最後，我們同時考慮飽和與與死區非線性因素，對於$0<¢,\bar{u}<\infty$，結合上述[A]和[B]的結果，為保證由集合P出發之狀態軌跡都將收斂至集合$\mathrm{P}_{£}$並使得制動器不違反飽和條件，我們要求：

$$\begin{bmatrix} (\bar{u}+¢)^2 & k \\ k^T & P \end{bmatrix} > 0,$$

$$P>0,\ 0<£<1,\ \text{and} \qquad (9)$$

$$x^T(PA+A^T P+k^T b^T P+Pbk)x - x^T Pb¢ - ¢b^T Px \le {²}_7(£ - x^T Px) \qquad \forall x,$$

經由變數變換，令$Q = P^{-1} > 0$，$y = kQ$及${²}_8 = {²}_7 £ > 0$，我們可將條件(9)轉換成：

$$\begin{bmatrix} (\bar{u}+¢)^2 & y \\ y^T & Q \end{bmatrix} > 0,$$

$$Q>0,\ 0<{²}_8<{²}_7,\ \text{and}$$

$$\begin{bmatrix} AQ+QA^T+by+y^T b^T & -b¢ \\ -¢b & -{²}_8 \end{bmatrix} \le -{²}_7 \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (10)$$

則式(10)再度形成一廣義特徵值問題，我們可仿效上述方法，先求解 GEVP 確定是否

存在正數解 $²_7$ 且滿足式(10), 然後固定之以形成一組以 Q、 y 和 $£$ 為變數之 LMI。然後，根據將集合範圍 $P_£$ 的最小化和集合範圍 P 的最大化原則，選取適當標的函數求解此最佳化問題。

若我們採取飽和允許法，為了擴大其正定不變集 P，對於任一滿足式(10) GEVP 之解 $\{k, P, £\}$，我們可再度求解以 $²_9$，$²_{10}$ 及 $£$ 為變數的 GEVP:

$$
\begin{bmatrix} PA + A^T P - ²_9 P & Pb\bar{u} + \frac{1}{2} ²_{10} k^T \\ \bar{u} b^T P + \frac{1}{2} ²_{10} k & - ²_{10}(\bar{u} + ¢) + ²_9 \end{bmatrix} \leq - ° \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & ²_9 \end{bmatrix} \quad (11)
$$

將正定不變集或穩定區域由 $\{x \mid x^T P x < 1\}$ 擴張至 $\{x \mid x^T P x < 1 + °\}$。

四、結論與討論

在本報告中，對於常見於控制系統中的制動器非線性因素，提出了一狀態回授控制器的設計方式將系統穩定化。我們討論兩類非線性因素: 飽和與死區, 在設計控制器之過程中一併地將其考慮入內，並以線性矩陣不等式形式呈現控制器存在條件。因此，我們將非常容易地利用既有演算法或軟體求解控制器並應用之。

五、計畫成果自評

本計畫之研究目標包括系統限制條件及不確定性，前者在本報告中已針對死區及飽和限制條件敘明成果，後者為簡化公式未特別明列，但所有本報告之結果皆可延伸至 polytopic LDI 式不確定性系統[3]上。相關結果已被第 39 屆 IEEE Conference on Decision and Control 接受發表。

六、參考文獻

[1]Bitsoris, G. and M. Vassilaki, “Constrained regulation of linear systems,” *Automatica*, vol. 31, no. 2, pp. 223-227, 1995.

[2]Blanchini, F., “Set invariance in control,” *Automatica*, vol. 35, no. 11, pp. 1747-1767, 1999.

[3]Boyd, S., L. EI. Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan, *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, PA: SIAM, Philadelphia, 1994.

[4]Castelan, E. B., and J. C. Hennet, “On invariant polyhedra of continuous-time linear systems,” *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 38, no. 11, pp. 1680-1685, 1994.

[5]Da Silva, Jr., J. M. G. and S. Tarbouriech, “Local stabilization of discrete-time linear systems with saturating controls: an LMI-based approach,” *Proc. Of American Control Conf., pp. 92-96,* Philadelphia, PA, June, 1998.

[6]Gahinet, P., A. Nemirovski, A. J. Laub, and M. Chilali, *LMI Control Toolbox,* Natick, MA: The MathWorks Inc., 1995.

[7]Kapila, V., A. G. Sparks, and H. Pan, ”Control of systems with actuator nonlinearities: an LMI approach,” *Proc. Of American Control Conf.*, pp. 3201-3205, San Diego, CA, June, 1999.

[8]Kapila, V., H. Pan, and M. S. de Queiroz, “LMI-based control of linear systems with actuator amplitude and rate nonlinearities,” *Proc. IEEE Conf. On Dec. and Contr.,* pp. 1413-1418, Phoenix, AZ, December, 1999.

[9]Khalil, H. K., *Nonlinear Systems*, New York, NY: Macmillan Publishing Company, 1992.

[10]Milani, B. E. A., “Contractive polyhedra for discrete-time linear systems with saturating controls,” *Proc. IEEE Conf. On Dec. and Contr.,* pp. 2039-2044, Phoenix, AZ, December, 1999.

[11]Tarbouriech, S. and G. Garcia, *Control of Uncertain Systems with Bounded Inputs*, London, England: Springer-Verlag Limited, 1997.

[12]Vassilake, M. and G. Bitsoris, “Constrained regulation of linear continuous-time dynamical systems,” *Syst. Control Letters,* vol. 13, no. 3, pp. 247-252, 1989.