



# 行政院國家科學委員會專題研究計畫成果報告

## 利用積分平方限制式之系統強健穩定度分析及強健濾波器設計

### Robust Stability Analysis and Robust Filtering Design for a System Using Integral Quadratic Constraints

計畫編號：NSC 90-2213-E-002-084

執行期限：90年8月1日至91年7月31日

主持人：馮蟻剛

臺灣大學電機系

#### 一、中文摘要

本計畫研究符合積分平方限制式之各類系統不確定因素，建構與分析相關穩定性條件，並將結果應用至不確定系統的狀態濾波器設計與穩定性分析問題上。假設系統所涉及的各项不確定因素皆為有界，我們將討論其是否能以積分平方限制式描述之，同時能否建立相關之系統穩定性條件，並進一步表示成線性矩陣不等式，期使藉計算機求取可行的數值解更為容易。我們亦將在線性矩陣不等式之架構下，討論狀態濾波器的設計與分析問題，使其能有效的在系統不確定因素的影響下，滿足系統穩定性和包括封包限制在內性能方面的多目標要求。

**關鍵詞：**積分平方限制式，線性矩陣不等式，凸集最佳化，時域封包限制，強健濾波器

#### Abstract

In this project, the integral quadratic constraints will be studied to accommodate various uncertain factors in the system, the related stability conditions will be developed and analyzed, and the results will be applied to the state filter design problems. Suppose all the considered uncertain factors have bounded effects. We examine the feasibility of describing them with the integral quadratic constraints, and seek to establish the corresponding stability conditions in the form of linear matrix inequalities, from which numerical solutions may be obtained easily with the help of digital computers. Under the framework of linear matrix in-

quality, we also consider the analysis and synthesis problems for state filters. The goal is to satisfy the stability condition and other performance requirements, including the envelope constraints.

**Keywords:** integral quadratic constraints, linear matrix inequality, convex optimization, time-domain envelope constraint, robust filter

#### 二、緣由與目的

文獻中，常用的  $H_\infty$  濾波器設計方法可概分成三種：

- (1) 插補法 (interpolation approach) [4]；
- (2) 多項式法 (polynomial equation approach) [6]；
- (3) 代數 Riccati 方程式法 (algebraic Riccati equation (ARE) approach) [1][11]。

其中，插補法和多項式法是直接利用轉換函數的頻域法，但在考慮多變數系統時，所牽涉方程式的複雜度是其主要的問題。而屬於狀態空間法的 ARE 法，除了方程式及其解的表示方式較為精簡之外，也存在有效的數值演算法便於求解。然而，相對於線性矩陣不等式的發展與電腦輔助運算能力的強化，ARE 法的求解過程便顯得複雜。除此之外，上述的方法中，除了外來的雜訊，並未將系統其它的不確定因素納入考慮，所以，強健  $H_\infty$  濾波器設計的相關理論研究，即為本計畫的主要目的。

在具有不確定性系統之強健濾波器的設計問題上，文獻中[3][5][13][15][19]一般是以範數界定 (norm-bounded) 的形式表示該系統中狀態矩陣和 (或) 輸出入矩陣

不確定性參數之範圍，並利用前述的方式尋求降低或最小化誤差變異量的上界，以達到設計的目標。然而由積分平方限制式的發展目的分析[8][9][10]，積分平方限制式可以

- (1) 獲得關於擾動變數的結構性資訊；
- (2) 描述外來訊號的特性；
- (3) 分析同時具有一些擾動變數及外來訊號的組合。

僅單純以系統之不確定性的表示來比較，便明顯更具應用之彈性。

在很多通訊、雷達等訊號及影像處理的問題上[12][17][18]都可以發現到強健濾波器的應用，如解迴旋 (de-convolution) 的程序，就是利用濾波器移除系統中不要的雜訊，還原訊號的過程。在這些應用中，時域封包限制 (time-domain envelope constraints) 更常被設定為訊號處理的規格。但一如閉迴路控制系統中， $H_\infty$  控制器很難處理具有時域的規格要求，一般  $H_\infty$  的最佳解迴旋濾波器也很難處理時域上的封包限制條件[7][14][16]。因此，我們將於報告中提出兼具時域性能響應及符合系統穩定性的強健濾波器設計方案的相關成果。

### 三、研究方法與成果

若考慮系統中的兩個訊號  $\bar{w} \in L_2^m[0, \infty)$  和  $\bar{v} \in L_2[0, \infty)$  滿足關係式

$$\oint \begin{bmatrix} \hat{v}(z) \\ \hat{w}(z) \end{bmatrix}^* \Pi(z) \begin{bmatrix} \hat{v}(z) \\ \hat{w}(z) \end{bmatrix} dz \geq 0 \quad (1)$$

其中， $\hat{v}(z)$ ， $\hat{w}(z)$  分別是  $\bar{v}$ ， $\bar{w}$  的 Z 轉換， $\Pi(z)$  是一個 Hermitian 正定矩陣值函數。式 (1) 可視為  $(\bar{v}, \bar{w})$  的一種能量分佈條件，我們即定義這兩個訊號  $\bar{v}$ ， $\bar{w}$  滿足積分平方限制式。對於任意有界、有理數形式的矩陣值函數  $\Pi(z)$ ，式 (1) 可藉由以下分解及表示式

$$\begin{aligned} \Pi(z) &= \Psi(z)^* M \Psi(z) \\ \Psi(z) &= C_\Psi (zI - A_\Psi)^{-1} [B_{\bar{w}} \quad B_{\bar{v}}] + D_\Psi \end{aligned}$$

在時域上將之轉換成

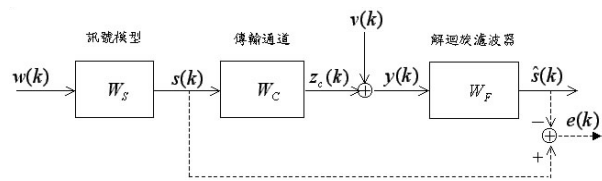
$$\sum_{k=0}^{\infty} \ell[x_f(k), \bar{w}(k), \bar{v}(k)] \geq 0 \quad (2)$$

在上式中  $\ell$  是一個平方式，而  $x_f$  滿足

$$x_f(k+1) = A_f x_f(k) + B_{\bar{w}} \bar{w}(k) + B_{\bar{v}} \bar{v}(k), \quad (3)$$

其中， $A_f$  是一 Jury 矩陣。換言之，這狀態空間形式的積分平方限制式，可以由 (2) 及 (3) 兩式組合而成。

今考慮圖一所示之系統，由訊號模型所產生之訊號  $s(k)$  經過壓縮調變等相關訊號處理程序，經由傳輸通道傳遞到接收端，



圖一

再透過接收端之解迴旋濾波器作用，得到回復後之訊號  $\hat{s}(k)$ 。在圖一中，訊號模型的狀態空間表示式為：

$$W_S: \begin{cases} x_S(k+1) = A_S x_S(k) + B_S w(k) \\ s(k) = C_S x_S(k) + D_S w(k) \end{cases}$$

其中  $x_S(k) \in \mathbf{R}^{n_S}$ 。而在實際的系統中，影響訊號傳送效率的因素，除了通道雜訊  $v(k)$  之外，更包括了通道中所隱含的不確定性因素，諸如通道中介質的電性特性等。因此，合理的傳輸通道的動態方程式，我們將之設定為：

$$W_C: \begin{cases} x_C(k+1) = A_C x_C(k) + B_C s(k) + \sum_{i=1}^p H_{C1i} \zeta_{C1i}(k) \\ z_C(k) = C_C x_C(k) + D_C s(k) + \sum_{i=1}^p H_{C2i} \zeta_{C2i}(k) \end{cases}$$

其中  $x_C(k) \in \mathbf{R}^{n_C}$ ， $p$  為不確定性變數之個數，而  $\zeta_{C1i}(k) \in \mathbf{R}^{n_i}$  為傳輸通道中之不確定性變數，滿足積分平方限制式的條件，即，當  $T \rightarrow \infty$  時，

$$\sum_{k=0}^T \|\zeta_{C1i}(k)\|^2 \leq \sum_{k=0}^T \|E_{1i} x_C(k) + E_{2i} s(k) + E_{3i} \zeta_{C2i}(k)\|^2 \quad (4)$$

成立。而其中  $\langle_C^T(k) = [\langle_{C1}^T(k) \cdots \langle_{Cp}^T(k)]$  ,  
 $H_{C1} = [H_{C11} \cdots H_{C1p}]$  ,  
 $H_{C2} = [H_{C21} \cdots H_{C2p}]$  ,  $E_1^T = [E_{11}^T \cdots E_{1p}^T]$  ,  
 $E_2^T = [E_{21}^T \cdots E_{2p}^T]$  ,  $E_3^T = [E_{31}^T \cdots E_{3p}^T]$  。

至於解迴旋濾波器的表示式為：

$$W_F: \begin{cases} x_F(k+1) = A_F x_F(k) + B_F y(k) \\ \hat{s}(k) = C_F x_F(k) + D_F y(k) \end{cases}$$

其中  $x_F(k) \in \mathbf{R}^{n_F}$  ,  $A_F, B_F, C_F, D_F$  為欲設計的常數狀態矩陣。因此，整個系統的濾波誤差動態方程式成為：

$$\Sigma_e: \begin{cases} x_e(k+1) = A_e x_e(k) + B_e w_e(k) + H_{1e} \langle_C(k) \\ e(k) = C_e x_e(k) + D_e w_e(k) + H_{2e} \langle_C(k) \end{cases}$$

其中  $x_e^T = [x_s^T \ x_c^T \ x_F^T]$  ,  $w_e^T = [w^T \ v^T]$  , 狀態矩陣  $A_e, B_e, C_e, D_e, H_{1e}, H_{2e}$  則為前述各子系統所定義之相關狀態矩陣的集合。

整個強健濾波器的設計要求，因此可以完整的描述如下：

針對圖一所示之系統，在接收端必能接收到訊號的前提下，假設已知濾波器的輸入訊號  $y(k)$ 。在特定濾波器輸出的時域封包限制下，設計一個強健濾波器  $W_F$ ，使得濾波誤差動態系統為有界穩定（bounded stable），同時達到最佳的雜訊抑制要求，即針對

$$x^{-1} \sum_{k=0}^T \|e(k)\|^2 \leq x \sum_{k=0}^T \|w_e(k)\|^2, \quad (5)$$

能找到合理且最小的  $x(>0)$  值。

**定義：**如果對於所有  $x_e(0)$  及  $w_e \in l_2[0, \infty)$ ，存在  $M \geq 0$ ，使得  $\|x_e(k)\| \leq M$ ，則我們稱  $\Sigma_e$  為有界穩定。

為了能順利結合濾波器輸出的時域響應值與濾波器狀態矩陣的關係，我們的作法是，考慮  $W_F$  為一個有限脈衝響應（finite impulse response, FIR）濾波器，即

$$W_F(z) = q(0) + q(1)z^{-1} + q(2)z^{-2} + \cdots + q(n_F)z^{-n_F} \quad (6)$$

$$= C_F(zI - A_F)^{-1} B_F + D_F,$$

而且， $C_F = [q(n_F) \ q(n_F-1) \cdots \ q(1)]$  ,  
 $D_F = q(0)$  ,

$$A_F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{n_F \times n_F}, B_F = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{n_F \times 1},$$

其中， $q(0), q(1), \cdots, q(n_F)$  成為我們所要求出的變數。而濾波器輸出的時域封包限制： $lb(k) \leq \hat{s}(k) \leq ub(k)$ ，可等效表示為

$$\text{diag}(l_b) \leq \text{diag}(YQ) \leq \text{diag}(u_b),$$

其中

$$Y = \begin{bmatrix} y(1) & 0 & \cdots & 0 \\ y(2) & y(1) & \cdots & 0 \\ \vdots & y(2) & \cdots & \vdots \\ y(m) & \vdots & & y(1) \\ 0 & y(m) & \vdots & y(2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & y(m) \end{bmatrix}_{N \times (n_F+1)},$$

$$Q^T = [q^T(0) \ q^T(1) \cdots \ q^T(n_F)],$$

$$l_b = [lb^T(1) \ lb^T(2) \cdots \ lb^T(N)],$$

$$u_b = [ub^T(1) \ ub^T(2) \cdots \ ub^T(N)],$$

而且  $N = m + n_F$ 。透過 S-procedure [2] 的運用，我們得到以下的結果。定理一描述濾波誤差動態系統有界穩定並滿足  $H_\infty$  性能要求的條件。前述問題的主要結果，即最佳強健濾波器的設計，則在定理二中陳述。

**定理一：**對於  $x_e(0) = 0$  與所有滿足積分平方限制式 (4) 之可接受的不確定性，若存在一對稱之正定矩陣  $X \in \mathbf{R}^{n_s+n_c+n_F}$ ，正純量參數  $f_1, f_2, \cdots, f_p$  及  $\lambda$  滿足不等式

$$(A_e x_e + B_e w_e + H_{1e} \langle_C)^T X (A_e x_e + B_e w_e + H_{1e} \langle_C) - x_e^T X x_e$$

$$+ \sum_{i=1}^p f_i (\|E_{1i} x_c + E_{2i} s + E_{3i} \langle_C\|^2 - \|\langle_C\|^2)$$

$$+ x^{-1} \|C_e x_e + D_e w_e + H_{2e} \langle_C\|^2 - x \|w_e\|^2 < 0 \quad (7)$$

則  $\Sigma_e$  滿足不等式 (5) 且為有界穩定。

**定理二：**一個型如 (6) 式，滿足時域封包限制  $lb(k) \leq \hat{s}(k) \leq ub(k)$  之最佳的有限脈衝響應濾波器可經由以下的最佳化產生。

$$\text{目標函數：} \min_{X, Q, J} \lambda$$

條件：

$$\begin{bmatrix} A_e^T X A_e - X + E_e^T J E_e & A_e^T X B_e + E_e^T J E_w \\ B_e^T X A_e + E_w^T J E_e & B_e^T X B_e + E_w^T J E_w - \lambda I \\ H_{1e}^T X A_e + E_3^T J E_e & H_{1e}^T X B_e + E_3^T J E_w \\ C_e & D_e \\ A_e^T X H_{1e} + E_e^T J E_3 & C_e^T \\ B_e^T X H_{1e} + E_w^T J E_3 & D_e^T \\ H_{1e}^T X H_{1e} + E_3^T J E_3 - J & H_{2e}^T \\ H_{2e} & -\lambda I \end{bmatrix} < 0,$$

$$\text{diag}(I_b) \leq \text{diag}(Y Q), \quad \text{diag}(Y Q) \leq \text{diag}(u_b),$$

$$X > 0, \quad J > 0, \quad \lambda > 0.$$

其中， $J = \text{diag}\{\ddagger_1 I_{k1}, \dots, \ddagger_p I_{kp}\}$ ,

$$E_e = [E_2 C_S \quad E_1 \quad 0], \quad E_w = [E_2 D_S \quad 0]$$

經過程式的模擬驗證，我們發現利用定理二所設計出的濾波器，其時域輸出值常有過於接近封包條件甚至接觸到封包條件的現象，以強健的觀點而言，此現象的發生，表示所設計的濾波器尚不能真正達到強健的目的。因此，為改善此一現象，我們將定理二中時域封包限制條件  $lb(k) \leq \hat{s}(k) \leq ub(k)$  修正為

$$mb(k) - y \cdot eb(k) \leq \hat{s}(k) \leq mb(k) + y \cdot eb(k)$$

目標函數也修正為

$$\min_{X, Q, J} (\dots_1 X + \dots_2 Y)$$

其中  $0 < y < 1$  為新增之變數， $\dots_1, \dots_2$  為允許設計者依系統所需調整的權重參數，而

$$mb(k) = \frac{1}{2}(ub(k) + lb(k))$$

$$eb(k) = \frac{1}{2}(ub(k) - lb(k))。$$

#### 四、結論與討論

在本報告中，除了提供對應於積分平方限制式所描述之不確定性的系統穩定性條件，也將具有時域封包限制的條件整合在最佳化的程序當中，透過線性矩陣不等式的優點及快速直接的電腦輔助運算，成功的設計強健有限脈衝響應濾波器。然而，

我們必須提出的是，隨著有限脈衝響應濾波器階數的增加，相關的性能表現當然隨之提高，相對的，實際實現濾波器時，所需花費的成本也會跟著提高，這是設計者必須仔細衡量的。除了積分平方限制式成功的應用，我們也在過程中發現了設計當初並未預期到的現象，然而，透過直覺化的想法，修正最佳化程序中相關的目標函數及封包限制條件後，就使得相關的結果變得更加完善。

#### 五、計畫成果自評

本計畫順利的藉由積分平方限制式描述系統的不確定性，並利用其適於轉換成線性矩陣不等式的優點，成功的將相關穩定條件發展成為適合電腦輔助運算的最佳化求解程序。結合時域封包限制條件的強健濾波器設計，更擴大了強健濾波器的實際應用範圍，諸如在雷達及通訊系統中，欲降低因脈衝壓縮 (pulse compression) 間接造成的旁波 (sidelobe) 效應；電視傳播頻道中的等化濾波器 (equalizing filter) 及高速通訊系統中資料通道的等化 (equalization) 等等。因此，整體而言，本計畫的執行是成功的。

#### 六、參考文獻

- [1] Bernstein, D. S., and W. H. Haddad, "Steady-state Kalman filtering with an  $H_\infty$  error bound," *Syst. Contr. Lett.*, vol. 12, pp. 9-16, 1989.
- [2] Boyd, S., L. El Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan, *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, Philadelphia, PA: SIAM, 1994.
- [3] de Souza, C. E., U. Shaked, and M. Fu, "Robust  $H_\infty$  filtering for continuous time varying uncertain systems with deterministic input signal," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 43, pp. 709-719, 1995.
- [4] Fu, M., "Interpolation approach to  $H_\infty$  optimal estimation and its interconnection to loop transfer recovery," *Syst. Contr. Lett.*, vol. 17, pp. 29-36, 1991.

- [5] Fu, M., C. E. de Souza and L. Xie, " $H_\infty$  estimation for continuous-time uncertain systems," in *Proc. 1st IFAC Symp. Des. Methods Contr. Syst.*, Zurich, Switzerland, 1991.
- [6] Grimble, M. J., and A. E. Sayed, "Solution of the  $H_\infty$  optimal linear filtering problem for discrete-time systems," *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, vol. 38, pp. 1092-1104, 1990.
- [7] Helton, J. W., and A. Sideris, "Frequency response algorithms for  $H_\infty$  optimization with time domain constraints," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 34, pp. 427-434, 1989.
- [8] Jonsson, U., and A. Megretski, "The Zames-Falb IQC for systems with integrators," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 45, pp. 560-565, 2000.
- [9] Li, H., and M. Fu, "A linear matrix inequality approach to robust  $H_\infty$  filtering," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 45, pp. 2338-2350, 1997.
- [10] Megretski, A., and A. Rantzer, "System analysis via integral quadratic constraints," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 42, pp. 819-830, 1997.
- [11] Nagpal, K. M., and P.P. Khargonekar, "Filtering and smoothing in an  $H_\infty$  setting," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 36, pp. 152-166, 1991.
- [12] Peng, S. C., and B. S. Chen, "Deconvolution filter design via  $l_1$  optimization technique," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 45, pp. 736-746, 1997.
- [13] Petersen, I. R., and D. C. MacFarlane, "Robust estimation for uncertain systems," in *Proc. 30th IEEE Conf. Decision Contr.*, U.K., 1991.
- [14] Rotstei, H., and A. Sideris, " $H_\infty$  optimization with time domain constraints," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 39, pp. 762-779, 1994.
- [15] Shaked, U., and C. E. de Souza, "Robust minimum variance filtering," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 43, pp. 2474-2483, 1995.
- [16] Sideris, A., and H. Rotstei, "Single-input-single-output  $H_\infty$  control with time domain constraints," *Automatica*, vol. 29, pp. 969-983, 1993.
- [17] Teo, K. L., A. Cantoni and X. G. Lin, "A new approach to the optimization of envelope-constrained filters with uncertain input," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 42, pp. 426-429, 1994.
- [18] Vo, B., A. Cantoni and K. L. Teo, "Envelope constrained filter with linear interpolator," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 45, pp. 1405-1414, 1997.
- [19] Xie, L., C. E. de Souza and Y. Wang, "Worst-case filter design for a class of uncertain dynamical system," in *Proc. 31st IEEE Conf. Decision Contr.*, Tucson, AZ, 1992.