行政院國家科學委員會專題研究計畫　期中進度報告

以線性矩陣不等式法發展廣義π分配理論及其應用(1/3)

計畫類別：個別型計畫
計畫編號：NSC91-2213-E-002-061-
執行期間：91年08月01日至92年10月31日
執行單位：國立臺灣大學電機工程學系暨研究所

計畫主持人：馮蟻剛

報告類型：精簡報告
報告附件：出席國際會議研究心得報告及發表論文
處理方式：本計畫可公開查詢

中　華　民　國 92 年 5 月 26 日

行政院國家科學委員會專題研究計畫成果報告

利用線性矩陣不等式法發展廣義®分配理論及其應用（1/3）

Development and Application of the Generalized π –Sharing Theory Using the LMI Approach (1/3)

計畫編號：NSC 91-2213-E-002-061

執行期限：91 年 8 月 1 日至 92 年 10 月 31 日

主持人：馮蟻剛　　　　臺灣大學電機系

一、中文摘要

®分配理論同時考慮了系統的狀態穩定性與輸入-輸出穩定性。在這篇報告中，我們簡述了針對數種不同型態的系統所進行的®分配理論的研究成果，並將之整理成線性矩陣不等式的形式，以利應用。應用之一為針對線性非時變多變數回授系統，提出 PID 控制器的設計方法。

關鍵詞：®分配理論，線性矩陣不等式，PID 控制器，耗散性。

Abstract: The ®-sharing theory accommodates the state and input-output stability simultaneously. In this report, we develop conditions based on the linear matrix inequality formulation for the ®-stability of different kinds of systems. Also the ®-sharing theory is utilized to develop a procedure for synthesizing PID-type controllers that stabilize multivariable linear time-invariant systems.

Keywords: ®-sharing theory, LMI, PID controller, dissipativity.

二、緣由與目的

學者 Lawrence 與 Johnson 在西元 1986 年，針對單輸入-單輸出之離散時間系統提出®分配理論(®sharing theory)[1]，其可視為被動性(passivity)[2]與超越穩定性(hyperstability)[3]理論的延伸，並建立輸入-輸出穩定性(input-output stability)和狀態空間穩定性(state-space stability)的關連。®分配理論透過能量觀點闡述穩定性。假設系統具®分配特性，並存在相對應的®係數，經由®係數的求得，得以定量地探討系統特性。系統若具®穩定性(®-stability)，則意謂其同時具內部穩定

性(internal stability)和輸入-輸出穩定性。相關而直接的應用之一，便是回授系統穩定性的探討。

因受限於系統®係數之計算深具困難度，尤其是高階數或多變數系統，文獻[4][5]曾針對一階及二階系統提出求解 Max-p 問題之最佳化®係數計算方式。另外，文獻[6]針對高階系統提出計算®係數的演算法則，採用 Kuhn-Tucker 條件求解 Max-p 問題，以利探討系統穩定性。但此求解方式為了達到某種最佳化程度，要求之條件相當複雜，尤其是對於高階系統。西元 1988 年，Nesterov 和 Nemirovskii 提出內點法(interior-point method)[7]，供求解如線性規劃(linear programming)、凸集規劃(convex)或二次式規劃(quadratic)等問題有效率的演算方法。因其具多項式時間(polynomial-time)之複雜度，使得求解以線性矩陣不等式(linear matrix inequality, LMI)為基礎之凸集最佳化問題[8]可利用數值運算軟體，如 Matlab LMI Toolbox [9]或 Scilab 等方便地達成。然而並非所有以數學模式描述的問題都具解析解(analytic solution)，因此，若能將討論之問題轉換成以線性矩陣不等式作為描述的條件，亦可說此問題已被適當地解出(well solved)。對於多變數系統，其®係數之計算問題正符合此情況。文獻[10]已將®分配理論推廣至連續時間之多輸入-多輸出系統。利用其發展的條件，對於線性非時變系統，®係數的計算可轉化為線性矩陣不等式條件，以利於分析相互連結回授系統之®穩定性問題。在此，進階應用於 PID 控制器設計問題的結果被提出來。

此外，因多數受控系統具不確定性，利用®分配理論，我們也針對特定的不確定系統進行探討，除了以線性矩陣不等式形式，推導系統具®分配特性之條件外，也再利用凸集最佳化的方式求解®係數，討論具不確定參數之回授系統的穩定性分析問題。有別於僅適用於方陣系統(square system)的®分配理論，我們同時提出適用於非方陣系統之廣義®分配理論與相關回授系統的穩定性條件及相對應®係數之計算方法。另外，®分配理論和耗散性理論(dissipativity)[11][12]的比較與討論，也會加以描述。

三、研究方法與成果

符號定義：

$X \geq 0$ 表示 X 為對稱(symmetric)且半正定(positive semi-definite)矩陣。

$X \geq Y$ 表示 $X - Y \geq 0$。類似符號亦適用於對稱正定(positive definite)或負定(negative definite)矩陣。

常數向量 x 的 2-範數(two-norm)以 $\|x\|$ 表示，而矩陣 X 的引出 2-範數(induced two-norm)表示成 $\|X\|$。

假設 $x(t)$ 和 $\Phi(t)$ 分別為以時間 t 為變數之向量和對稱矩陣函數，則

$$(\Phi)\|x(t)\|^2 \equiv x'(t)\Phi(t)x(t),$$

$$(\Phi)\|x\|_T^2 \equiv \int_0^T x'(t)\Phi(t)x(t)\,dt,$$

其中 $T \geq 0$ 為一常數。另外，兩實數向量函數 $x_1(t), x_2(t)$ 之內積定義為

$\langle x_1, x_2 \rangle_T \equiv \int_0^T x_1'(t) x_2(t) dt$ 。

3.1 ®分配理論與穩定條件

3.1.1 線性時變系統

考慮一連續時間動態系統Σ，其狀態空間表示式：

$$\Sigma: \begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t) \end{cases} \qquad (1)$$

其中，$x(t) \in \mathbf{R}^n$ 為系統狀態變數，$u(t), y(t) \in \mathbf{R}^m$ 為系統Σ之輸入與輸出變數。對於時間 $T \geq 0$ ，若 $x(t), y(t), u(t)$ 滿足下列不等式：

$$\begin{aligned} \langle u, y \rangle_T \geq (\Gamma)|x(T)|^2 - (\Gamma)|x(0)|^2 \\ + (Q)\|x\|_T^2 + (P)\|y\|_T^2 + (R)\|u\|_T^2, \end{aligned} \qquad (2)$$

則稱系統Σ具有®分配特性，且存在相對應之®係數 $\{\Gamma(t), Q(t), P(t), R(t)\}$ ，其中 $\Gamma(t), Q(t) \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 為半正定矩陣，$P(t), R(t) \in \mathbf{R}^{m \times m}$ 為對稱矩陣。式(2)描述系統Σ具有二次形式的能量供給率函數和能量之耗散性，其中，$\langle u, y \rangle_T$ 代表經由外界提供給Σ的能量，當Σ由外界獲得能量時，則 $\langle u, y \rangle_T \geq 0$；$(\Gamma)|x(T)|^2 - (\Gamma)|x(0)|^2$ 和 $(Q)\|x\|_T$ 分別表示系統Σ的狀態變數所儲存與耗散之能量，$(P)\|y\|_T^2 + (R)\|u\|_T^2$ 則描述系統Σ與其它相連系統之能量交換狀況與互動情形。對應式(1)與(2)，可定義一耗散矩陣，$M(t) = \begin{bmatrix} M_1(t) & M_2(t) \\ M_2^T(t) & M_4(t) \end{bmatrix} \leq 0$ ，其組成元素為：

$$M_1(t) = A^T(t)\Gamma(t) + \Gamma(t)A(t) + \dot{\Gamma}(t) + Q(t) + C^T(t)P(t)C(t),$$

$$M_2(t) = \Gamma(t)B(t) - \tfrac{1}{2}C^T(t) + C^T(t)P(t)D(t),$$

$$M_4(t) = D^T(t)P(t)D(t) - \tfrac{1}{2}(D(t) + D^T(t)) + R(t).$$

輔助定理 1 [1]：對於時間 $t \in [0, T]$ 且 $T \geq 0$ ，若 $M(t) \leq 0$ ，$\Gamma(t) \geq 0$ 和 $Q(t) \geq 0$ ，則系統Σ滿足®分配特性，且具有相對應之®係數 $\{\Gamma(t), Q(t), P(t), R(t)\}$ 。

定義 1 [1]:對於系統Σ，$\forall\, u(t) \in \mathbf{R}^m,\ \ x(0) \in \mathbf{R}^n, T \geq 0$ ，若存在 $¥_1, \cdots, ¥_4 \in \mathbf{R}$ 滿足下列條件：

$$\|y\|_T \leq ¥_1 \|u\|_T + ¥_2 |x(0)| \qquad (3)$$

$$\sup |x(t)| \leq ¥_3 \|u\|_T + ¥_4 |x(0)| \qquad (4)$$

則系統Σ為®穩定(®-stable)。

式(3)之條件描述系統輸入輸出的關係滿足L_2穩定度，而式(4)則意謂當外界輸入$u(t)=0$時，系統Σ具有李雅普諾夫穩定性(Lyapunov stability)，亦即系統具內部穩定性。在求得系統Σ的®係數後，定義 1 中增益參數$¥_1,\cdots,¥_4$將可利用輔助定理 2 間接地決定。

輔助定理 2 [1,10]：設系統Σ滿足®分配特性，並具有對應之®係數$\{\Gamma(t),Q(t),P(t),R(t)\}$。若存在$r_0,p_0,¥\in\mathbf{R}$使得對所有$t\in[0,T],\ T\geq 0$，滿足$R(t)\geq r_0 I,\ P(t)\geq p_0 I>0$及$\Gamma(t)\geq ¥I>0$，則系統$\Sigma$為®穩定，此時，

$¥_1 = (1+\sqrt{p_0¢})\big/p_0$，

$¥_2=\sqrt{¥_0/p_0}$,

$¥_3=¥_4=\sqrt{¶/¥}$,

其中

$¶=\max\{¥_0, ¢+(1+\sqrt{p_0¢})\big/p_0, \sqrt{¥_0/p_0}\}$ ， $¢=|\min\{0,r_0\}|,\ ¥_0=\Gamma(0)$ 最大的特徵值 (eigenvalue)。

輔助定理 3 [1,10]：考慮圖一，系統Σ代表整個回授系統，其子系統 S1 及 S2 皆滿足®分配特性，分別對應®係數$\{\Gamma_1(t),Q_1(t),P_1(t),R_1(t)\}$,$\{\Gamma_2(t),Q_2(t),P_2(t),R_2(t)\}$。若對所有$t\in[0,T],\ T\geq 0$，使得$R_1(t)+P_2(t)>0$，則系統$\Sigma$滿足®分配特性，而其對應之®係數為

$$\{\Gamma(t),Q(t),P(t),R(t)\}=\left\{\begin{bmatrix}\Gamma_1(t) & 0\\ 0 & \Gamma_2(t)\end{bmatrix},\begin{bmatrix}Q_1(t) & 0\\ 0 & Q_2(t)\end{bmatrix},\right.$$
$$\left. P_1(t)+R_2(t), R_1(t)[R_1(t)+P_2(t)]^{-1}P_2(t)\right\}.$$

輔助定理3說明了®分配理論中很重要的一個優點，即整個回授系統所對應的®係數，可以表示成個別子系統®係數的組合。此外，由上述輔助定理可推得系統Σ為®穩定的充分條件是$\Gamma_1(t)>0,\ \Gamma_2(t)>0,\ P_1(t)+R_2(t)>0,$及$R_1(t)+P_2(t)>0$。這也間接說明了，當一連結之子系統雖產生能量，但另一子系統若能消耗更多之能量時，則閉迴路系統仍具穩定性。

3.1.2 線性非時變系統

相對於線性時變系統，較為簡單的線性非時變系統的®分配理論當可根據輔助定理 1 導出，僅需假設®係數$\{\Gamma(t),Q(t),P(t),R(t)\}$均為常數矩陣，將其計算方式簡化為求解下列線性矩陣不等式:

$$\begin{bmatrix}A^T\Gamma+\Gamma A+Q+C^TPC & \Gamma B-\frac{1}{2}C^T+C^TPD\\ B^T\Gamma-\frac{1}{2}C+D^TPC & D^TPD-\frac{1}{2}(D+D^T)+R\end{bmatrix}\leq 0,\ \Gamma\geq 0,\ \ Q\geq 0 \qquad (5)$$

並相繼得到類似輔助定理 2、3 的結果。

3.1.3 不確定系統

仿上述方式，我們將討論之問題推廣至範數界定不確定系統(norm-bounded uncertain system)，Σ_U，其狀態空間表示式如下：

$$
\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= (A+\Delta A(t))x(t)+(B+\Delta B(t))u(t) \\
y(t) &= (C+\Delta C(t))x(t)+(D+\Delta D(t))u(t),
\end{aligned} \qquad (6)
$$

其中，式(6)內之不確定參數滿足下列條件：

$$
\begin{bmatrix} \Delta A & \Delta B \\ \Delta C & \Delta D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_x \\ H_y \end{bmatrix} F(t) \begin{bmatrix} E_x & E_y \end{bmatrix}, \ \|F(t)\| \le 1 \qquad (7)
$$

根據式(2)之®分配條件，並假設此系統的®係數$\{\Gamma, Q, P, R\}$為常數矩陣，將式(6)和(7)代入，利用特定矩陣不等式的輔助定理將其整理成線性矩陣不等式之形式，所推得之結果其維數和複雜度較式(5)高，但因求解線性矩陣不等式具有高度方便性，仍可計算®係數以供穩定度分析之應用。

定理 1：若存在矩陣$\Gamma, Q \ge 0$，係數$\pounds_1, \pounds_2^{-1}, \pounds_3^{-1}, \pounds_4^{-1} > 0$，使得$M_U \le 0$且$\pounds_1 I - H_z^T P H_z > 0$，則系統$\Sigma_U$滿足®分配特性且具有相對應之®係數$\{\Gamma, Q, P, R\}$，其中，

$$
M_U =
\begin{bmatrix}
\begin{pmatrix} A^T\Gamma+\Gamma A+Q+C^TPC \\ +\pounds_1 E_x^T E_x+\pounds_2^{-1}E_x^T E_x \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \Gamma B-\frac{1}{2}C^T+C^TPD \\ +\pounds_1 E_w^T E_w+\pounds_2^{-1}E_x^T E_w \end{pmatrix} & C^TPH_z & \Gamma H_x & H_z & 0 \\
\begin{pmatrix} B^T\Gamma-\frac{1}{2}C+D^TPC \\ +\pounds_1 E_w^T E_x+\pounds_2^{-1}E_w^T E_x \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}(D+D^T)+R+D^TPD \\ +\pounds_1 E_w^T E_w+\pounds_2^{-1}E_w^T E_w+ \\ \frac{1}{2}\pounds_3^{-1}E_x^T E_x+\frac{1}{2}\pounds_4^{-1}E_w^T E_w \end{pmatrix} & D^TPH_z & 0 & 0 & H_z \\
H_z^TPC & H_z^TPD & -(\pounds_1 I-H_z^TPH_z) & 0 & 0 & 0 \\
H_x^T\Gamma & 0 & 0 & -\pounds_2^{-1}I & 0 & 0 \\
H_z^T & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}\pounds_3^{-1}I & 0 \\
0 & H_z^T & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}\pounds_4^{-1}I
\end{bmatrix}.
$$

3.2 ®分配理論應用—PID 控制器設計

今考慮一線性非時變之方陣系統，希望透過控制器的設計，使得整個回授系統能

達到®穩定。如圖二所示，r為參考輸入訊號，假設不考慮干擾訊號 w 的影響。受控體(plant)表示成：

$$\dot{x}(t) = A_p x(t) + B_p u_1(t)$$
$$y_1(t) = C_p x(t) + D_p u_1(t),$$

其中，$x(t) \in \mathbf{R}^n,\ u_1(t), y_1(t) \in \mathbf{R}^m,\ A_p, B_p, C_p, D_p$為已知的常數矩陣。而欲設計之 PI 控制器可表示成:

$$\dot{x}_c(t) = B_c u_2(t)$$
$$y_2(t) = C_c x_c(t) + D_c u_2(t),$$

其中，$\mathrm{x_c}(t), u_2(t), y_2(t) \in \mathbf{R}^m,\ B_c, C_c, D_c$為欲求之常數矩陣。通常$B_c$可假設已給定或預設為單位矩陣 I，因此，整個設計的問題，就是找到合適的積分增益C_c(I-gain)和比例增益D_c(P-gain)。

以前述®分配理論為基礎，得到所對應的穩定條件共有：

$$\begin{gathered}\Gamma_1 > 0,\ Q_1 \geq 0, \\ \begin{bmatrix} A_p^T\Gamma_1 + \Gamma_1 A_p + Q_1 + C_p^T P_1 C_p & \Gamma_1 B_p - C_p^T/2 + C_p^T P_1 D_p \\ (\Gamma_1 B_p - C_p^T/2 + C_p^T P_1 D_p)^T & D_p^T P_1 D_p - (D_p^T + D_p)/2 + R_1 \end{bmatrix} \leq 0\end{gathered} \tag{8}$$

$$\begin{gathered}\Gamma_2 > 0,\ Q_2 \geq 0, \\ \begin{bmatrix} Q_2 + C_c^T P_2 C_c & \Gamma_2 - C_c^T/2 + C_c^T P_2 D_c \\ (\Gamma_2 - C_c^T/2 + C_c^T P_2 D_c)^T & D_c^T P_2 D_c - (D_c^T + D_c)/2 + R_2 \end{bmatrix} \leq 0\end{gathered} \tag{9}$$

$$P_1 + R_2 > 0,\ R_1 + P_2 > 0,\ P_2 < 0. \tag{10}$$

整個設計流程概略區分成兩個步驟：

步驟一：以$\Gamma_1,\ Q_1,\ P_1,\ R_1,\ P_2,\ R_2$為變數，求解以不等式(8)與(10)為條件之 LMI 問題。

步驟二：若步驟一存在一合適解(feasible solution)，則令

$$D_c = -P_2^{-1/2}(R_2 - \tfrac{1}{4}P_2^{-1} + Z)^{1/2} + \tfrac{1}{2}P_2^{-1},$$
$$C_c = -(D_c^T P_2 - \tfrac{1}{2}I_m)^{-1}\Gamma_2,$$

其中，任取$\Gamma_2 > 0,\ Q_2 \geq 0,$及滿足$R_2 - \frac{1}{4}P_2^{-1} + Z > 0$之正定$Z$。

必須注意的是，此設計結果受限於不等式(8)中D_p必須是非奇異(non-singular)的限制。因此，當D_p為奇異時，我們前饋(feedforward)補償一個高通濾波器於原受控體，圖三所示，使得擴增受控體(augmented plant)之直接轉換增益矩陣變成

$D_p + D_f$ 且為非奇異。換言之，所設計的控制器將相當於 PID 形式的控制器。更詳細的內容描述與成果，請參考[13]。

3.3 廣義®分配理論

由於®分配理論的推導，必須先假設系統Σ之外界輸入變數維數等於輸出變數維數。因此，對於非方陣系統，前述®分配理論便無法完全適用。針對此一限制，我們重新定義以下的廣義®分配理論。目前僅針對線性非時變系統做討論。線性非時變系統Σ_0之狀態空間表示式為:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t), \end{aligned} \tag{11}$$

其中，$x(t) \in \mathbf{R}^n,\ y(t) \in \mathbf{R}^p,\ u(t) \in \mathbf{R}^m$ 。

定義 2:對於系統Σ_0，$\forall\ T \geq 0$，若 $x(t),\ y(t),\ u(t)$ 滿足下列條件:

$$\begin{aligned} \langle u, Sy \rangle_T &\geq (\Gamma)|x(T)|^2 - (\Gamma)|x(0)|^2 \\ &\quad + (Q)\|x\|_T^2 + (P)\|y\|_T^2 + (R)\|u\|_T^2 \end{aligned} \tag{12}$$

則系統Σ_0具有®分配特性，且存在相對應之®係數 $\{S, \Gamma, P, Q, R\}$，其中，$\Gamma, Q \in \mathbf{R}^{n\times n}$ 為半正定矩陣，$P \in \mathbf{R}^{p\times p}, R \in \mathbf{R}^{m\times m}$ 為對稱矩陣，$S \in \mathbf{R}^{m\times p}$ 。

將式(11)代入式(12)中，可得等效條件：

$$\begin{bmatrix} A^T\Gamma + \Gamma A + Q + C^T PC & \Gamma B - \frac{1}{2}C^T S^T + C^T PD \\ B^T\Gamma - \frac{1}{2}SC + D^T PC & D^T PD - \frac{1}{2}(SD + D^T S^T) + R \end{bmatrix} \leq 0,\ \Gamma \geq 0\text{，}\ Q \geq 0. \tag{13}$$

式(13)為一組以$\{S, \Gamma, P, Q, R\}$為變數之線性矩陣不等式，給定系統資訊$\{A, B, C, D\}$，將可有效率地計算®係數。在求得系統所對應之®係數後，定義 1 中增益參數$¥_1, \cdots, ¥_4$，將可利用定理 2 決定。

定理 2：假設系統Σ_0滿足®分配特性，並具有對應之®係數$\{S, \Gamma, P, Q, R\}$。若存在$r_0, p_0, ¥ \in \mathbf{R}$，滿足$R \geq r_0 I,\ P \geq p_0 I > 0$及$\Gamma \geq ¥I > 0$，則系統$\Sigma_0$為®穩定。此時，

$¥_1 = (s_0 + \sqrt{p_0 ¢})/p_0$,

$¥_2 = \sqrt{¥_0/p_0}$,

$¥_3 = ¥_4 = \sqrt{¶/¥}$,

其中，$s_0 = \|S\|$，$¢ = |\min\{0, r_0\}|$，

$¥_0 = \Gamma$的最大特徵值，

$¶ = \max\{¥_0, ¢ + (s_0 + \sqrt{p_0 ¢})\big/ p_0, \sqrt{¥_0 / p_0}\}$ 。

定理 3：考慮圖一，系統Σ_0代表整個回授系統，其子系統 S1 及 S2 分別滿足®分配特性，並分別對應®係數$\{S_1, \Gamma_1, P_1, Q_1, R_1\}$及$\{S_2, \Gamma_2, P_2, Q_2, R_2\}$。則系統$\Sigma_0$滿足®分配特性且其對應之®係數為

$$\{S, \Gamma, Q, P, R\} = \left\{ \begin{bmatrix} S_1 & 2R_1 \\ -2R_2 & S_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \Gamma_1 & 0 \\ 0 & \Gamma_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{bmatrix}, \right.$$

$$\left. \begin{bmatrix} P_1 + R_2 & \frac{1}{2}(S_1' - S_2) \\ \frac{1}{2}(S_1 - S_2') & P_2 + R_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix} \right\}.$$

同時，若$S_1' = S_2,\ \Gamma_1 > 0,\ \Gamma_2 > 0,\ P_1 + R_2 > 0,$及$R_1 + P_2 > 0$，則系統$\Sigma_0$為®穩定。

3.4. ®**分配理論與耗散性理論之比較**

耗散性理論可視為被動性理論的推廣。由能量觀點，系統之輸入訊號$u(t)$、輸出訊號$y(t)$與系統狀態變數$x(t)$，若滿足耗散不等式$\dot{V}(x(t)) \le w(u(t), y(t))$，其中$V(x)$為正定貯存函數(storage function)，$w(u, y)$為供給率函數(supply rate function)，則此系統具耗散性。對線性非時變系統，若系統具被動性，即耗散性之特例，經正實性輔助定理(positive real lemma)可推論系統之轉移函數具正實性。耗散性理論在回授系統穩定度問題的研究上深具重要性。對相互連結之回授耗散系統，若各子系統均具耗散性，則閉迴路系統在滿足某些條件下將具內部穩定性或輸入與輸出穩定性。與®分配特性及®穩定性相比較，系統具®分配特性，則其輸入訊號$u(t)$、輸出訊號$y(t)$和狀態變數$x(t)$滿足

$$u^T(t) S y(t) \ge \frac{d}{dt}[x^T(t) \Gamma x(t)] + y^T(t) P y(t) + u^T(t) R u(t) + x^T(t) Q x(t)$$

其中，Γ, Q為半正定矩陣，P, R為對稱矩陣，此條件來自上述廣義®分配條件中不等式左右兩側對時間變數t進行微分所得。由此我們可瞭解此條件與耗散性理論之相異處僅於不等式中，®分配理論具二次項$x^T(t)Qx(t)$，其用來描述狀態變數在系統內部耗散能量之情況。由此可知兩學理深具關連性，相同之處在於兩者均可用來判斷系統是否具有限增益、被動性或正實性。對回授系統而言，兩理論具有相似條件的穩定度判斷法則。然而，對於耗散性理論，欲保證此回授系統達到穩定，則要求各子系統均具耗散性。相對的，由(輔助)定理 3 得知，回授系統的®穩定性並不需強制要求各子系統皆具耗散性，因此，由®分配理論所得穩定度條件將較不具保守性。

四、結論

本年度我們針對線性時變與非時變系統建立了相關的®分配特性與®穩定性條件，並以線性矩陣不等式的形式表現之。不僅提供相對應®係數的計算方式，其

結果也應用在穩定性分析和線性非時變回授系統 PID 控制器設計上。此外，針對不確定性系統，我們也獲得相關®分配特性及條件，將作為未來計畫中，強健回授控制器設計的基礎。同時，針對®分配理論的既有限制，我們定義廣義®分配理論做為因應，在廣義®分配理論的界定下，我們已完成針對線性非時變系統的相關討論，此一結果，也將成為後續研究廣義®分配理論的基礎。

五、計畫成果自評

本年度計畫的成果應是相當的豐富,除了以®分配理論為應用之 PID 控制器設計的研究成果[13]將在 2003 年 9 月於劍橋大學 ECC 年會上發表，關於系統具有馬可夫跳動參數的先期研究成果[14],也將在 2003 年 8 月於日本福井大學 SICE 年會上發表，此結果將成為第二年度計畫的基礎。

六、參考文獻

[1] Lawrence, D. A., and C. R. Johnson, Jr., "Recursive parameter identification algorithm stability analysis via pi-sharing," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. 31, pp. 16-24, 1986.

[2] Vidyasagar, M., *Nonlinear System Analysis*, Second Edition, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1992.

[3] Popov, V. M., *Hyperstability of Control Systems*, Springer-Verlag, New York, NY, 1973.

[4] Wu, J. F., J. S. Heh, and I K. Fong, "On computing pi-coefficients," *Syst. Contr. Lett.*, Vol. 16, pp. 457-463, 1991.

[5] Wu, J. F., J. S. Heh, I K. Fong, and T. S. Kuo, "The optimal pi-coefficients of second-order systems," *J. Chin. Inst. Eng*, Vol. 15, pp. 179-187, 1992.

[6] Heh, J. S., J. F. Wu, and I K. Fong, "About the computation of optimal pi-coefficients," *Proc. Amer. Control Conf.*, Chicago, IL. , pp. 1063-1064, 1992.

[7] Nesterov, Y. and A. Nemirovsky, *Interior-Point Polynomial Methods in Convex Programming*, SIAM, Philadelphia, PA, 1994.

[8] Boyd, S., L. El. Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan, *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, SIAM, Philadelphia, PA, 1994.

[9] Gahinet, P., A. Nemirovski, A. J. Laub, and M. Chilali, *LMI Control Toolbox*, The MathWorks Inc., Natick, MA, 1995.

[10] Hu S. C., I K. Fong, and T. S. Kuo, "Multivariable pi-sharing theory and its application on the Lur'e problem," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. 43, pp.

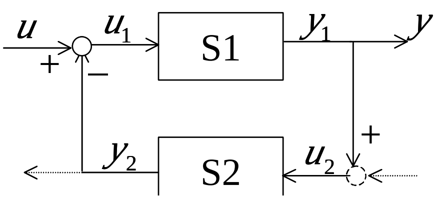
1501-1505, 1998.

[11] Willems, J. C., "Dissipative dynamical system part I: general theory," *Arch. Ration. Mechanical Anal.*, Vol. 45, pp. 325-351, 1972.

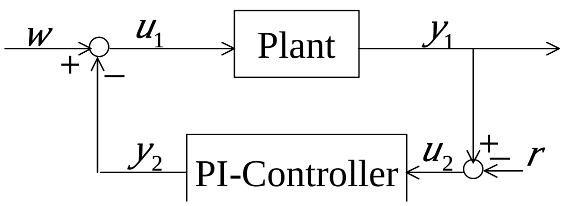
[12] Willems, J. C., "Dissipative dynamical system part II: linear systems with quadratic supply rates," *Arch. Ration. Mechanical Anal.*, Vol. 45, pp. 352-393, 1972.

[13] Fong, I K., J. K. Horng, and C. C. Hsu, "PID-type controller synthesis via ® −sharing theory," paper accepted for presentation in the *European Control Conference 2003*, Cambridge, UK, 2003.

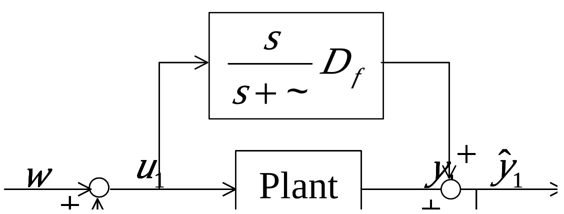
[14] Lee, C. M. and I K. Fong, "Robust Kalman filter design for discrete-time systems with Markovian jumping parameters," paper accepted for presentation in the *SICE Annual Conference*, Fukui, Japan, 2003.



圖一



圖二



圖三