

# 行政院國家科學委員會專題研究計畫 期中進度報告

## 以線性矩陣不等式法發展廣義 分配理論及其應用(2/3)

計畫類別：個別型計畫

計畫編號：NSC92-2213-E-002-040-

執行期間：92年08月01日至93年07月31日

執行單位：國立臺灣大學電機工程學系暨研究所

計畫主持人：馮蟻剛

報告類型：精簡報告

報告附件：出席國際會議研究心得報告及發表論文

處理方式：本計畫可公開查詢

中 華 民 國 93 年 5 月 20 日

# 行政院國家科學委員會補助專題研究計畫成果報告

## 以線性矩陣不等式法發展 廣義 $\pi$ 分配理論及其應用 (2/3)

計畫類別：個別型計畫      整合型計畫

計畫編號：NSC 92 - 2213 - E - 002 - 040

執行期間：92年8月1日至93年7月31日

計畫主持人：馮 蟻 剛 教授

共同主持人：

本成果報告包括以下應繳交之附件：

赴國外出差或研習心得報告一份

赴大陸地區出差或研習心得報告一份

出席國際學術會議心得報告及發表之論文各一份

國際合作研究計畫國外研究報告書一份

執行單位：國立臺灣大學電機工程學系

中華民國 93 年 5 月 17 日

# 行政院國家科學委員會專題研究計畫成果報告

## 以線性矩陣不等式法發展廣義 $\pi$ 分配理論及其應用 (2/3)

### Developing and Applying The Generalized $\pi$ -Sharing Theory

#### Using Linear Matrix Inequality (2/3)

計畫編號：NSC 92-2213-E-002-040

執行期限：92 年 8 月 1 日至 93 年 7 月 31 日

主持人：馮蟻剛

國立臺灣大學電機工程學系

#### 一、中文摘要

延續上一年度的研究，本年度  $\pi$  分配理論的主要研究成果有三。首先是討論非線性系統的穩定性分析，其次是針對回授控制器設計之線性矩陣不等式演算法的改進，最後是強健濾波器設計的應用。其中，濾波器的設計問題，區分具有時域響應封包限制與濾波器極點配置條件兩種情況。所有結果都整理成線性矩陣不等式的形式，以利凸集最佳化的運算。

**關鍵詞：**  $\pi$  分配理論，線性矩陣不等式，控制器/濾波器設計，封包限制，極點配置。

**Abstract:** In this report, there are three main achievements with respect to the  $\pi$ -sharing theory. First of all, there are some results about the  $\pi$ -stability analysis for a class of nonlinear systems. Then, an improved algorithm for the design of state feedback controller via the linear matrix inequalities is proposed. Finally, two types of robust filters with time-domain mask and pole region constraints, respectively, are designed using the  $\pi$ -sharing theory. All of the design methods and constraints are expressed via linear matrix inequalities so that convex optimization problems can be considered.

**Keywords:**  $\pi$ -sharing theory, LMI, controller/filter design, mask constraint, pole region constraint.

#### 二、緣由與目的

耗散性理論 (dissipativity theory) 是由學者 J. C. Willems 在西元 1972 年所提出[1]，可視為被動性理論 (passivity theory) 的推廣。在研究如圖一所示的標準回授系統穩

定度問題上深具重要性。對相互連結之回授耗散系統，若各子系統均具耗散性，則閉迴路系統在滿足某些條件下將具內部穩定性或輸入與輸出穩定性。此理論已廣泛地應用在非線性系統之穩定度分析[2]和控制器設計問題上[3][4]。雖然  $\pi$  分配理論與耗散性理論具有相似特性，可以是耗散理論的推廣[5]，然而對於較複雜之非線性系統，一般而言， $\pi$  係數之計算有其困難性[6]。因此，這方面的研究在文獻上較少被探討。本年度計畫中即對  $\pi$  分配特性在非線性系統上的討論加以推展。

除了回授控制器的設計應用之外，文獻中常見的另一類設計應用，就是各類濾波器的設計。其中，濾波器輸出訊號具有時域封包限制 (time-domain envelope constraints) 的情況就常發生在許多訊號處理方面的例子上。例如，早期電視訊號波形量化 (equalization) 的 K-mask；通訊或雷達系統中資料傳遞時在通道上的量化或解迴旋 (deconvolution) 問題等[7]。利用最佳化模式求得此類濾波器的方法雖陸續被提出[8][9]，然而卻都忽略了傳輸通道 (channel) 上不確定因素對訊號傳遞與解迴旋可能造成的影響[10]。因此，我們將不確定因素納入考慮範圍內。

類似輸出訊號封包限制的概念，濾波器本身性能規格的要求，近年來也陸續以極點配置區域 (pole placement region) 的方式逐漸被開發引用[11]。然而，因演算法條件的限制，使得目前文獻[12][13]中提供的方案，都必須討論的整個擴增系統 (augmented system) 的極點配置。換句話說，設計之前必須先假設不包含濾波器的原系統，其極點已經在所設定的極點區域之內。這不僅

不實用，所求的結果也相對保守與費時。因此，在  $\pi$  分配特性的基礎上，我們將嘗試提出這方面解決的方案。由於不乏利用能量耗散觀點來進行濾波器設計的例子 [14]，因此，除了利用  $\pi$  分配特性對濾波器設計進行討論，也可幫助研究人員思考其應用上的可適性。

### 三、研究方法與成果

符號定義：

1.  $X \geq 0$  表示  $X$  為對稱(symmetric)且半正定(positive semi-definite)矩陣。
2.  $X \geq Y$  表示  $X - Y \geq 0$  為對稱且半正定矩陣。類似符號亦適用於對稱正定(positive definite)或負定(negative definite)矩陣。
3. 常數向量  $x$  的 2-範數(two-norm)以  $\|x\|$  表示，而矩陣  $X$  的引出 2-範數(induced two-norm)表示成  $\|X\|$ 。
4. 假設  $x(k)$  和  $\Phi(k)$  分別為以離散時間  $k$  為變數之向量和對稱矩陣，則

$$(\Phi)x(k)^2 \equiv x'(k)\Phi(k)x(k),$$

$$(\Phi)\|x\|_T^2 \equiv \sum_{k=0}^T x'(k)\Phi(k)x(k),$$

其中  $T \geq 0$  為一常數。另外，兩實數向量  $x_1(k), x_2(k)$  之內積定義為

$$\langle x_1, x_2 \rangle_T \equiv \sum_{k=0}^T x_1'(k)x_2(k).$$

#### 3.1 $\pi$ 分配理論與穩定條件

##### 3.1.1 線性系統

考慮一離散時間動態系統  $\Sigma$ ，其狀態空間表示式：

$$\Sigma: \begin{cases} x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u(k) \\ y(k) = C(k)x(k) + D(k)u(k) \end{cases} \quad (1)$$

其中， $x(k) \in \mathbb{R}^n$  為系統狀態變數， $u(k), y(k) \in \mathbb{R}^m$  為系統  $\Sigma$  之輸入與輸出變數。對於時間  $T \geq 0$ ，若  $x(k), y(k), u(k)$  滿

足下列不等式：

$$\langle u, y \rangle_T \geq (\Gamma)|x(T+1)|^2 - (\Gamma)|x(0)|^2 + (Q)\|x\|_T^2 + (P)\|y\|_T^2 + (R)\|u\|_T^2, \quad (2)$$

則稱系統  $\Sigma$  具有  $\pi$  分配特性，且存在相對應之  $\pi$  係數  $\{\Gamma(k), Q(k), P(k), R(k)\}$ ，其中  $\Gamma(k), Q(k) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  為半正定矩陣， $P(k), R(k) \in \mathbb{R}^{m \times m}$  為對稱矩陣。式 (2) 描述系統  $\Sigma$  具有二次形式的能量供給率函數和能量之耗散性，其中， $\langle u, y \rangle_T$  代表經由外界提供給  $\Sigma$  的能量。當  $\Sigma$  由外界獲得能量時，則  $\langle u, y \rangle_T \geq 0$ 。 $(\Gamma)|x(T)|^2 - (\Gamma)|x(0)|^2$  和  $(Q)\|x\|_T^2$  分別表示系統  $\Sigma$  的狀態變數所儲存與耗散之能量， $(P)\|y\|_T^2 + (R)\|u\|_T^2$  則描述系統  $\Sigma$  與其它相連系統之能量交換狀況與互動情形。對應式 (1) 與 (2)，可定義一耗散矩陣，

$$M(k) = \begin{bmatrix} M_1(k) & M_2(k) \\ M_2^T(k) & M_4(k) \end{bmatrix} \leq 0, \text{ 其組成元素為：}$$

$$\begin{aligned} M_1(k) &= A^T(k)\Gamma(k)A(k) - \Gamma(k) + Q(k) + C^T(k)P(k)C(k), \\ M_2(k) &= A^T(k)\Gamma(k)B(k) - \frac{1}{2}C^T(k) + C^T(k)P(k)D(k), \\ M_4(k) &= B^T(k)\Gamma(k)B(k) + D^T(k)P(k)D(k) \\ &\quad - \frac{1}{2}(D(k) + D^T(k)) + R(k). \end{aligned}$$

**輔助定理 1** [5]：對於時間  $k \in [0, T]$  且  $T \geq 0$ ，若  $M(k) \leq 0$ ， $\Gamma(k) \geq 0$  和  $Q(k) \geq 0$ ，則系統  $\Sigma$  滿足  $\pi$  分配特性，且具有相對應之  $\pi$  係數  $\{\Gamma(k), Q(k), P(k), R(k)\}$ 。

**定義 1** [5]：對於系統  $\Sigma$ ， $\forall u(k) \in \mathbb{R}^m$ ， $x(0) \in \mathbb{R}^n$ ， $T \geq 0$ ，若存在  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4 \in \mathbb{R}$  滿足下列條件：

$$\|y\|_T \leq \gamma_1 \|u\|_T + \gamma_2 |x(0)| \quad (3)$$

$$\sup |x(t)| \leq \gamma_3 \|u\|_T + \gamma_4 |x(0)| \quad (4)$$

則系統  $\Sigma$  為  $\pi$  穩定 ( $\pi$ -stable)。

式(3)之條件描述系統輸入輸出的關係滿足 $l_2$ 穩定性，而式(4)則意謂當外界輸入 $u(k)=0$ 時，系統 $\Sigma$ 具有李雅普諾夫穩定性(Lyapunov stability)，即系統具內部穩定性。在求得系統 $\Sigma$ 的 $\pi$ 係數後，定義1中增益參數 $\gamma_1, \Lambda, \gamma_4$ 將可利用輔助定理2間接地決定。

**輔助定理 2** [5,15]：設系統 $\Sigma$ 滿足 $\pi$ 分配特性，並具有對應之 $\pi$ 係數 $\{\Gamma(k), Q(k), P(k), R(k)\}$ 。若存在 $r_0, p_0, \gamma \in \mathbb{R}$ 使得對所有 $k \in [0, T], T \geq 0$ ，滿足 $R(k) \geq r_0 I, P(k) \geq p_0 I > 0$ 及 $\Gamma(k) \geq \gamma > 0$ ，則系統 $\Sigma$ 為 $\pi$ 穩定。此時，

$$\gamma_1 = (1 + \sqrt{p_0 \delta}) / p_0,$$

$$\gamma_2 = \sqrt{\gamma_0 / p_0},$$

$$\gamma_3 = \gamma_4 = \sqrt{\xi / \gamma},$$

其中， $\delta = |\min\{0, r_0\}|$ ,

$\gamma_0 = \Gamma(0)$ 中最大的特徵值(eigenvalue)，

$$\xi = \max\{\gamma_0, \delta + (1 + \sqrt{p_0 \delta}) / p_0, \sqrt{\gamma_0 / p_0}\}。$$

**輔助定理 3** [5,15]：考慮圖一，系統 $\Sigma$ 代表整個回授系統，其子系統S1及S2皆滿足 $\pi$ 特性，分別對應 $\pi$ 係數 $\{\Gamma_1(k), Q_1(k), P_1(k), R_1(k)\}$ 及 $\{\Gamma_2(k), Q_2(k), P_2(k), R_2(k)\}$ 。若對所有 $k \in [0, T], T \geq 0$ ，使得 $R_1(k) + P_2(k) > 0$ ，則系統 $\Sigma$ 滿足 $\pi$ 分配特性而其對應之 $\pi$ 係數：

$$\{\Gamma(k), Q(k), P(k), R(k)\} = \left\{ \begin{bmatrix} \Gamma_1(k) & 0 \\ 0 & \Gamma_2(k) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} Q_1(k) & 0 \\ 0 & Q_2(k) \end{bmatrix} \right\}$$

$$P_1(k) + R_2(k), R_1(k) [R_1(k) + P_2(k)]^{-1} P_2(k) \}$$

輔助定理3說明了 $\pi$ 分配理論中很重要的一個優點，即整個回授系統所對應的 $\pi$ 係數，可以表示成個別子系統 $\pi$ 係數的組合。此外，由上述輔助定理可推得系統 $\Sigma$ 為 $\pi$ 穩定的充分條件是 $\Gamma_1(k) > 0, \Gamma_2(k) > 0, P_1(k) + R_2(k) > 0$ ，和 $R_1(k) + P_2(k) > 0$ 。這間接說明，當一連結之子系統雖產生能量，但另一子系統若能消耗

更多之能量時，則閉迴路系統仍具穩定性。線性系統具有不確定參數時的穩定條件與相關的討論，可參考上一年度的報告進行比對。

### 3.1.2 非線性不確定系統

本小節中，我們直接將結果推廣至非線性系統具有範數界定不確定性(norm-bounded uncertainty)的情況。非線性系統 $\Sigma_{NL}$ ，其狀態空間表示式如下：

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A(k)x(k) + G_1(k)f(x(k)) + B(k)u(k), \\ y(k) &= C(k)x(k) + G_2(k)f(x(k)) + D(k)u(k). \end{aligned} \quad (6)$$

式(6)內之不確定參數滿足下列條件：

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} A(k) & B(k) & G_1(k) \\ C(k) & D(k) & G_2(k) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A & B & G_1 \\ C & D & G_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix} F(k) [E_1 \ E_2 \ E_3] \quad (7) \\ & F^T(k)F(k) \leq I. \end{aligned}$$

而非線性項 $f(x(k))$ 滿足以下的假設：

- (1)  $\|f(x(k))\| \leq \|Nx(k)\|, k \geq 0, N$  為已知常數矩陣。
- (2)  $f(0) = 0$ .

類比式(2)之線性系統的 $\pi$ 分配條件，對於非線性系統的 $\pi$ 分配條件，因設定李雅普諾夫方程式(Lyapunov function)為：

$$V(k) = x^T(k)\Gamma x(k) + \sum_{l=0}^{k-1} (x^T(l)N^T N x(l) - f^T(x(l))f(x(l))), \quad (8)$$

而定為：

$$\langle u, y \rangle_T \geq (\Gamma)x(T+1)^2 - (\Gamma)x(0)^2 + (N^T N)\|x\|_T^2 - \|f(x)\|_T^2 + (Q)\|x\|_T^2 + (P)\|y\|_T^2 + (R)\|u\|_T^2. \quad (9)$$

假設此系統的 $\pi$ 係數 $\{\Gamma, Q, P, R\}$ 為常數矩陣，將式(6)和(7)代入，再利用特定矩陣不等式的輔助定理[16]將其整理成線性矩陣不等式之形式。由於求解線性矩陣不等式具有高度方便性，因此雖然維度與複雜度有所增加，仍可計算相關的 $\pi$ 係數以供穩定性分析之應用。

**定理 1**：若存在矩陣 $\Gamma, Q \geq 0, P^{-1} > 0$ ，係

數  $\varepsilon_1, \varepsilon_2^{-1}, \varepsilon_3^{-1}, \varepsilon_4^{-1} > 0$  , 使得  $M_{NL} \leq 0$  且  $\varepsilon_1 I - H_1^T P H_1 > 0$  ,  $\begin{bmatrix} P^{-1} & H_2 \\ H_2^T & \varepsilon_2^{-1} I \end{bmatrix} > 0$  , 則系統  $\Sigma_{NL}$  滿足  $\pi$  分配特性且具有相對應之  $\pi$  係數  $\{\Gamma, Q, P, R\}$  , 其中  $M_{NL} =$

$$\begin{bmatrix} \begin{pmatrix} -\Gamma + Q + N^T N + A^T \Gamma A \\ + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2^{-1} + \frac{1}{2} \varepsilon_3^{-1}) E_1^T E_1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} C^T + A^T \Gamma B + \\ (\varepsilon_1 + \varepsilon_2^{-1} + \frac{1}{2} \varepsilon_3^{-1}) E_1^T E_2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} C + B^T \Gamma A + \\ (\varepsilon_1 + \varepsilon_2^{-1} + \frac{1}{2} \varepsilon_3^{-1}) E_2^T E_1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} (D + D^T) + R + B^T \Gamma B \\ + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2^{-1} + \frac{1}{2} \varepsilon_3^{-1}) E_2^T E_2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} G_1^T \Gamma A + \\ (\varepsilon_1 + \varepsilon_2^{-1}) E_3^T E_1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} G_1^T \Gamma B + \\ (\varepsilon_1 + \varepsilon_2^{-1}) E_3^T E_2 \end{pmatrix} \\ H_1^T \Gamma A & H_1^T \Gamma B \\ C & D \\ 0 & H_2^T \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} A^T \Gamma G_1 + \\ (\varepsilon_1 + \varepsilon_2^{-1}) E_1^T E_3 \end{pmatrix} & A^T \Gamma H_1 & C^T & 0 & 0 \\ \begin{pmatrix} B^T \Gamma G_1 + \\ (\varepsilon_1 + \varepsilon_2^{-1}) E_2^T E_3 \end{pmatrix} & B^T \Gamma H_1 & D^T & H_2 & 0 \\ \begin{pmatrix} -I + G_1^T \Gamma G_1 + \\ (\varepsilon_1 + \varepsilon_2^{-1}) E_3^T E_3 \end{pmatrix} & G_1^T \Gamma H_1 & G_2^T & 0 & 0 \\ H_1^T \Gamma G_1 & -(\varepsilon_1 I - H_1^T \Gamma H_1) & 0 & 0 & 0 \\ G_2 & 0 & -P^{-1} & 0 & H_2 \\ 0 & 0 & 0 & -2\varepsilon_3^{-1} I & 0 \\ 0 & 0 & H_2^T & 0 & -\varepsilon_2^{-1} I \end{pmatrix} \end{bmatrix}$$

對於以式 (9) 為  $\pi$  分配條件的非線性系統，除了定理 1 所對應的  $\pi$  分配特性條件與線性系統有所區別之外，其他如輔助定理 2, 3 的描述仍一體適用。

### 3.2 $\pi$ 分配理論應用(I) — 控制器設計

以  $\pi$  分配特性為條件所進行的 (強健) 控制器設計，其流程可利用輔助定理 3 允許受控體(plant)和控制器分別討論的優點有所精簡，這與應用在 PID 控制器的設計[17] 有所不同。

今暫僅考慮一線性非時變之方陣系統，希望透過控制器的設計，使得整個回授系統能達到  $\pi$  穩定。如圖二所示， $r$  為參考輸入訊號，假設不考慮干擾訊號  $w$  的影響。受控體表示成：

$$x(k+1) = A_p x(k) + B_p u_1(k)$$

$$y_1(k) = C_p x(k) + D_p u_1(k),$$

其中， $x(k) \in \mathbf{R}^n$ ， $u_1(k), y_1(k) \in \mathbf{R}^m$ ， $A_p, B_p, C_p, D_p$  為已知的常數矩陣。欲設計之控制器表示成：

$$x_c(k+1) = A_c x_c(k) + B_c u_2(k)$$

$$y_2(k) = C_c x_c(k) + D_c u_2(k),$$

其中， $x_c(k), u_2(k), y_2(k) \in \mathbf{R}^m$ ， $B_c, C_c, D_c$  為欲求之常數矩陣。以前述  $\pi$  分配理論為基礎，可得到對應的穩定條件共有：

$$\begin{aligned} & \Gamma_1 > 0, Q_1 \geq 0, \\ & \begin{bmatrix} A_p^T \Gamma_1 A_p - \Gamma_1 + Q_1 + C_p^T P_1 C_p & A_p^T \Gamma_1 B_p + C_p^T P_1 D_p - \frac{1}{2} C_p^T \\ B_p^T \Gamma_1 A_p + D_p^T P_1 C_p - \frac{1}{2} C_p & B_p^T \Gamma_1 B_p + D_p^T P_1 D_p + R_1 - \frac{1}{2} (D_p + D_p^T) \end{bmatrix} \leq 0, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\Gamma_2 > 0, Q_2 \geq 0,$$

$$\begin{bmatrix} -\Gamma_2 + Q_2 & -\frac{1}{2} C_c^T & C_c^T & A_c^T \Gamma_2 \\ -\frac{1}{2} C_c & R_2 - \frac{1}{2} (D_c + D_c^T) & D_c^T & B_c^T \Gamma_2 \\ C_c & D_c & -P_2^{-1} & 0 \\ \Gamma_2 A_c & \Gamma_2 B_c & 0 & -\Gamma_2 \end{bmatrix} \leq 0, \quad (11)$$

$$P_1 + R_2 > 0, R_1 + P_2 > 0, P_2^{-1} > 0. \quad (12)$$

控制器的設計流程即可簡化成為以  $\Gamma_1, Q_1, P_1, R_1, \Gamma_2, Q_2, P_2^{-1}, R_2, \Gamma_2 A_c, \Gamma_2 B_c, C_c, D_c$  為變數，以不等式(10-12)為條件之 LMI 問題。

### 3.3 $\pi$ 分配理論應用(II) — 濾波器設計

#### 3.3.1 時域封包限制條件下的 FIR 濾波器

考慮圖三系統，各子系統分別表示為

$$W_S : \begin{cases} x_S(k+1) = A_S x_S(k) + B_S w(k) \\ s(k) = C_S x_S(k) + D_S w(k), \end{cases}$$

$$W_C : \begin{cases} x_C(k+1) = (A_C + \Delta A_C(k)) x_C(k) + (B_C + \Delta B_C(k)) s(k) \\ z_C(k) = (C_C + \Delta C_C(k)) x_C(k) + (D_C + \Delta D_C(k)) s(k), \end{cases}$$

$$W_F : \begin{cases} x_F(k+1) = A_F x_F(k) + B_F y(k) \\ \hat{s}(k) = C_F x_F(k) + D_F y(k), \end{cases}$$

$$\text{其中, } \begin{bmatrix} \Delta A_C(k) & \Delta B_C(k) \\ \Delta C_C(k) & \Delta D_C(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{C1} \\ H_{C2} \end{bmatrix} F_C(k) [E_{C1} \ E_{C2}]$$

且  $F_C^T(k) F_C(k) \leq I$ ，希望透過 FIR 濾波器  $W_F$  的設計，使得整個誤差動態系統

$$\begin{cases} x_e(k+1) = (A_e + \Delta A_e(k)) x_e(k) + (B_e + \Delta B_e(k)) u_e(k) \\ y_e(k) = (C_e + \Delta C_e(k)) x_e(k) + (D_e + \Delta D_e(k)) u_e(k), \end{cases}$$

不僅是穩定，而且能達到另兩項要求：

(1) 給定輸入訊號  $y(k)$ , 輸出訊號  $\hat{s}(k)$  滿足特定時域封包限制, 即

$$l_{bi}(k) \leq \hat{s}_i(k) \leq u_{bi}(k),$$

(2) 當  $x_e(0) = 0, \mu > 0$ , 滿足  $\|e(k)\|_T^2 \leq \mu^2 \|u_e(k)\|_T^2$ 。

其中,  $x_e^T = [x_S^T \ x_C^T \ x_F^T]$ ,  $u_e^T = [w^T \ v^T]$ ,

$$y_e^T = [e^T \ e^T], e(k) = s(k) - \hat{s}(k), x_S \in \mathbb{R}^{n_s},$$

$$x_C \in \mathbb{R}^{n_c}, y, s, w, v, z_C \in \mathbb{R}^{m_s}, i = 1, \Lambda, m_s.$$

為了能有效地將所有條件表示成 LMIs, 我們讓  $A_F, B_F, C_F, D_F$ , 分別以

$$[A_F]_{\sum_{i=1}^{m_s} n_{F_i} \times \sum_{i=1}^{m_s} n_{F_i}} = \text{diag}(A_{F1}, A_{F2}, \Lambda, A_{Fm_s}),$$

$$[B_F]_{\sum_{i=1}^{m_s} n_{F_i} \times m_s} = \text{diag}(B_{F1}, B_{F2}, \Lambda, B_{Fm_s}),$$

$$[C_F]_{m_s \times \sum_{i=1}^{m_s} n_{F_i}} = \text{diag}(C_{F1}, C_{F2}, \Lambda, C_{Fm_s}),$$

$$[D_F]_{m_s \times m_s} = \text{diag}(D_{F1}, D_{F2}, \Lambda, D_{Fm_s}).$$

表示。其中,

$$A_{F_i} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \Lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \Lambda & 0 \\ \text{M} & \text{M} & \text{M} & \Lambda & 0 \\ 0 & 0 & \Lambda & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{n_{F_i} \times n_{F_i}}, B_{F_i} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \text{M} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{n_{F_i} \times 1},$$

$$C_{F_i} = [f_i(n_{F_i}) \ f_i(n_{F_i}-1) \ \Lambda \ f_i(1)], D_{F_i} = f_i(0),$$

$f_i(0), f_i(1), \Lambda, f_i(n_{F_i})$  為轉換後,  $W_F$  真正待求的變數。

**定理 2:** 若存在滿足 LMIs (13-17) 之最佳化問題的合適解, 則存在前述條件的最佳 FIR 濾波器。

$$\min \mu^2,$$

$$\varepsilon_1 I - H_{e1}^T \Gamma H_{e1} > 0, P^{-1} - \varepsilon_2 H_{e2} H_{e2}^T > 0, \quad (13)$$

$$\Gamma \geq 0, Q \geq 0, P^{-1} > 0, \varepsilon_1, \varepsilon_2^{-1}, \varepsilon_3^{-1} > 0, \mu > 0, \quad (14)$$

$$\text{diag}(l_{bi}) \leq \text{diag}(Y_i f_i) \leq \text{diag}(u_{bi}), \quad (15)$$

$$\begin{bmatrix} -P^{-1} & \frac{1}{2}P^{-1} & P^{-1} \\ \frac{1}{2}P^{-1} & -2\mu^2 I - R & 0 \\ P^{-1} & 0 & -I \end{bmatrix} \leq 0 \quad (16)$$

$$\begin{bmatrix} \begin{pmatrix} -\Gamma + Q + A_e^T \Gamma A_e + \varepsilon_1 E_{e1}^T E_{e1} + \varepsilon_2^{-1} E_{e1}^T E_{e1} \\ + \frac{1}{2} \varepsilon_3^{-1} E_{e1}^T E_{e1} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} C_e^T + A_e^T \Gamma B_e + \varepsilon_1 E_{e1}^T E_{e2} + \varepsilon_2^{-1} E_{e1}^T E_{e2} \\ + \frac{1}{2} \varepsilon_3^{-1} E_{e1}^T E_{e2} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} C_e + B_e^T \Gamma A_e + \varepsilon_1 E_{e2}^T E_{e1} + \varepsilon_2^{-1} E_{e2}^T E_{e1} \\ + \frac{1}{2} \varepsilon_3^{-1} E_{e2}^T E_{e1} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} (D_e + D_e^T) + R \\ + B_e^T \Gamma B_e + \varepsilon_1 E_{e2}^T E_{e2} + \varepsilon_2^{-1} E_{e2}^T E_{e2} + \frac{1}{2} \varepsilon_3^{-1} E_{e2}^T E_{e2} \end{pmatrix} \\ H_{e1}^T \Gamma A_e & H_{e1}^T \Gamma B_e \\ C_e & D_e \\ 0 & H_{e2}^T \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A_e^T \Gamma H_{e1} & C_e^T & 0 & 0 \\ B_e^T \Gamma H_{e1} & D_e^T & H_{e2} & 0 \\ H_{e1}^T \Gamma H_{e1} - \varepsilon_1 I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -P^{-1} & 0 & H_{e2} \\ 0 & 0 & -2\varepsilon_3^{-1} I & 0 \\ 0 & H_{e2}^T & 0 & -\varepsilon_2^{-1} I \end{bmatrix} \leq 0, \quad (17)$$

其中,

$$f_i = \begin{bmatrix} f_i(0) \\ f_i(1) \\ \text{M} \\ f_i(n_{F_i}) \end{bmatrix}, l_{bi} = \begin{bmatrix} lb_i(0) \\ lb_i(1) \\ \text{M} \\ lb_i(n_i) \end{bmatrix}, u_{bi} = \begin{bmatrix} ub_i(0) \\ ub_i(1) \\ \text{M} \\ ub_i(n_i) \end{bmatrix},$$

$$Y_i = \begin{bmatrix} y_i(0) & 0 & \Lambda & 0 \\ y_i(1) & y_i(0) & \Lambda & 0 \\ \text{M} & y_i(1) & \Lambda & \text{M} \\ y_i(m_i) & \text{M} & y_i(0) & \\ 0 & y_i(m_i) & \text{M} & y_i(1) \\ \text{M} & \text{M} & \text{M} & \\ 0 & 0 & \Lambda & y_i(m_i) \end{bmatrix}_{n_i \times (n_{F_i} + 1)},$$

$$n_i = m_i + n_{F_i} + 1, \quad i = 1, 2, \Lambda, m_s.$$

相關結果詳細的推導與論述, 可參考[18]。

### 3.3.2 區域極點配置條件下之強健濾波器

同樣考慮圖三所示之系統,  $W_S, W_F$  之表示式與前一節相同, 而

$$W_C : \begin{cases} x_C(k+1) = A_C x_C(k) + B_C s(k) \\ z_C(k) = C_C x_C(k) + D_C s(k), \end{cases}$$

$A_C, B_C, C_C, D_C$  滿足多邊集合 (polytopic set):

$$\mathbf{D} \equiv \left\{ (A_C, B_C, C_C, D_C) = \sum_{i=1}^l \tau_i (A_{Ci}, B_{Ci}, C_{Ci}, D_{Ci}); \tau_i \geq 0; \sum_{i=1}^l \tau_i = 1 \right\}$$

將  $W_S$ ,  $W_C$  整合表示成：

$$\Sigma: \begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}_e(k) \\ \mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}_e(k) \\ \mathbf{s}(k) = \mathbf{L}\mathbf{x}(k) + \mathbf{J}\mathbf{u}_e(k), \end{cases}$$

希望透過  $W_F$  的設計，不僅使誤差動態系統

$$\Sigma_e: \begin{cases} \mathbf{x}_e(k+1) = \mathbf{A}_e\mathbf{x}_e(k) + \mathbf{B}_e\mathbf{u}_e(k) \\ \mathbf{y}_e(k) = \mathbf{C}_e\mathbf{x}_e(k) + \mathbf{D}_e\mathbf{u}_e(k), \end{cases}$$

穩定，能達到  $H_\infty$  規格的要求：

當  $\mathbf{x}_e(0) = 0$ ,  $\mu > 0$ , 滿足  $\|e(k)\|_T^2 \leq \mu^2 \|u_e(k)\|_T^2$ .

同時，也要滿足濾波器本身極點配置區域的性能規格要求。

### 極點配置區域的基本形式

(1) 圓 (disk region):  $P_D(\eta, \rho)$  表示以為  $\eta$  中心， $\rho$  為半徑的圓形區域。等效條件為： $(\mathbf{A}_F - \eta\mathbf{I})^T \Gamma_F (\mathbf{A}_F - \eta\mathbf{I}) - \rho^2 \Gamma_F < 0$ .

(2) 直立帶狀 (vertical strip):  $P_V(r_1, r_2)$  表示極點的實部位於  $r_1 \sim r_2$  的區域， $r_1 < r_2 \in \mathbb{R}$ 。等效條件為：

$$(\mathbf{A}_F - r_2\mathbf{I})^T \Gamma_F + \Gamma_F (\mathbf{A}_F - r_2\mathbf{I}) < 0,$$

$$(r_1\mathbf{I} - \mathbf{A}_F)^T \Gamma_F + \Gamma_F (r_1\mathbf{I} - \mathbf{A}_F) < 0.$$

(3) 錐扇形 (conic sector):  $P_C(r_0, \theta)$  表示以  $(r_0, 0)$  為頂點， $\theta$  為開口角度的開放扇形區域。可區分為：開口在左邊和開口在右邊兩類。左開口的等效條件為：

$$\begin{bmatrix} \sin \frac{\theta}{2} ((\mathbf{A}_F - r_0\mathbf{I})^T \Gamma_F + \Gamma_F (\mathbf{A}_F - r_0\mathbf{I})) & \cos \frac{\theta}{2} ((\mathbf{A}_F - r_0\mathbf{I})^T \Gamma_F - \Gamma_F (\mathbf{A}_F - r_0\mathbf{I})) \\ \cos \frac{\theta}{2} (\Gamma_F (\mathbf{A}_F - r_0\mathbf{I}) - (\mathbf{A}_F - r_0\mathbf{I})^T \Gamma_F) & \sin \frac{\theta}{2} ((\mathbf{A}_F - r_0\mathbf{I})^T \Gamma_F + \Gamma_F (\mathbf{A}_F - r_0\mathbf{I})) \end{bmatrix} < 0.$$

右開口的等效條件為：

$$\begin{bmatrix} \sin \frac{\theta_r}{2} ((r_0\mathbf{I} - \mathbf{A}_F)^T \Gamma_F + \Gamma_F (r_0\mathbf{I} - \mathbf{A}_F)) & \cos \frac{\theta_r}{2} ((r_0\mathbf{I} - \mathbf{A}_F)^T \Gamma_F - \Gamma_F (r_0\mathbf{I} - \mathbf{A}_F)) \\ \cos \frac{\theta_r}{2} (\Gamma_F (r_0\mathbf{I} - \mathbf{A}_F) - (r_0\mathbf{I} - \mathbf{A}_F)^T \Gamma_F) & \sin \frac{\theta_r}{2} ((r_0\mathbf{I} - \mathbf{A}_F)^T \Gamma_F + \Gamma_F (r_0\mathbf{I} - \mathbf{A}_F)) \end{bmatrix} < 0.$$

若在離散系統中，則這些區域必須在單位圓內；若是連續系統，則必須在複數平面的左半平面。

為了能有效地利用 LMIs 求解，上述相關的要求轉換成為對應 LMI 條件的結果整理於定理 3。

**定理 3**：若存在適當解滿足下列 LMIs 條件，則存在濾波器  $W_F$ ，使得前述穩定與性能規格得以被滿足。

$$\min \mu^2,$$

LMIs:  $\pi$ -stable:

$$\begin{bmatrix} \Phi - \Psi & \Phi - \Psi & \frac{1}{2}(\tilde{\mathbf{L}} - \tilde{\mathbf{D}}_F \tilde{\mathbf{C}} - \tilde{\mathbf{N}})^T \\ \Phi - \Psi & \mathbf{X} - \mathbf{Y} & \frac{1}{2}(\tilde{\mathbf{L}} - \tilde{\mathbf{D}}_F \tilde{\mathbf{C}})^T \\ \frac{1}{2}(\tilde{\mathbf{L}} - \tilde{\mathbf{D}}_F \tilde{\mathbf{C}} - \tilde{\mathbf{N}}) & \frac{1}{2}(\tilde{\mathbf{L}} - \tilde{\mathbf{D}}_F \tilde{\mathbf{C}}) & \frac{1}{2}(\tilde{\mathbf{J}} - \tilde{\mathbf{D}}_F \tilde{\mathbf{D}} + \tilde{\mathbf{J}}^T - \tilde{\mathbf{D}}^T \tilde{\mathbf{D}}_F^T) - \mathbf{R}_e \\ \Phi \mathbf{A} & \Phi \mathbf{A} & \Phi \mathbf{B} \\ \mathbf{X} \mathbf{A} + \mathbf{Z} \mathbf{C} + \mathbf{M} & \mathbf{X} \mathbf{A} + \mathbf{Z} \mathbf{C} & \mathbf{X} \mathbf{B} + \mathbf{Z} \mathbf{D} \\ \tilde{\mathbf{L}} - \tilde{\mathbf{D}}_F \tilde{\mathbf{C}} - \tilde{\mathbf{N}} & \tilde{\mathbf{L}} - \tilde{\mathbf{D}}_F \tilde{\mathbf{C}} & \tilde{\mathbf{J}} - \tilde{\mathbf{D}}_F \tilde{\mathbf{D}} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}^T \Phi & \mathbf{A}^T \mathbf{X} + \mathbf{C}^T \mathbf{Z}^T + \mathbf{M}^T & \tilde{\mathbf{L}}^T - \tilde{\mathbf{C}}^T \tilde{\mathbf{D}}_F^T - \tilde{\mathbf{N}}^T \\ \mathbf{A}^T \Phi & \mathbf{A}^T \mathbf{X} + \mathbf{C}^T \mathbf{Z}^T & \tilde{\mathbf{L}}^T - \tilde{\mathbf{C}}^T \tilde{\mathbf{D}}_F^T \\ \mathbf{B}^T \Phi & \mathbf{B}^T \mathbf{X} + \mathbf{D}^T \mathbf{Z}^T & \tilde{\mathbf{J}}^T - \tilde{\mathbf{D}}^T \tilde{\mathbf{D}}_F^T \\ \Phi & \Phi & \mathbf{0} \\ \Phi & \mathbf{X} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{P}_e^{-1} \end{bmatrix} \geq 0,$$

$$\begin{bmatrix} \Phi & \Phi \\ \Phi & \mathbf{X} \end{bmatrix} > 0, \begin{bmatrix} \Psi & \Psi \\ \Psi & \mathbf{Y} \end{bmatrix} \geq 0, \text{diag}\{\mathbf{P}_e^{-1}, \Phi, \Psi\} > 0,$$

LMI:  $H_\infty$ -spec.

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{P}_e^{-1} & \frac{1}{2}\mathbf{P}_e^{-1} & \mathbf{P}_e^{-1} \\ \frac{1}{2}\mathbf{P}_e^{-1} & -2\mu^2\mathbf{I} - \mathbf{R}_e & \mathbf{0} \\ \mathbf{P}_e^{-1} & \mathbf{0} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \leq 0,$$

LMIs: Pole-placement region:

(1) disk region

$$\begin{bmatrix} \rho^2(\Phi - \mathbf{X}) & -\mathbf{M}^T + \eta(\Phi - \mathbf{X}) \\ -\mathbf{M} + \eta(\Phi - \mathbf{X}) & \Phi - \mathbf{X} \end{bmatrix} < 0,$$

(2) vertical strip

$$-\mathbf{M} - \mathbf{M}^T + 2r_2\Phi - 2r_2\mathbf{X} < 0,$$

$$\mathbf{M} + \mathbf{M}^T - 2r_1\Phi + 2r_1\mathbf{X} < \mathbf{0},$$

(3) conic sector

$$\begin{bmatrix} \sin \frac{\theta}{2} (-\mathbf{M}^T - \mathbf{M} + 2r_0\Phi - 2r_0\mathbf{X}) & \cos \frac{\theta}{2} (-\mathbf{M}^T + \mathbf{M}) \\ \cos \frac{\theta}{2} (-\mathbf{M} + \mathbf{M}^T) & \sin \frac{\theta}{2} (-\mathbf{M}^T - \mathbf{M} + 2r_0\Phi - 2r_0\mathbf{X}) \end{bmatrix} < \mathbf{0},$$

$$\begin{bmatrix} \sin \frac{\theta_r}{2} (\mathbf{M}^T + \mathbf{M} - 2r_{r,0}\Phi + 2r_{r,0}\mathbf{X}) & \cos \frac{\theta_r}{2} (\mathbf{M}^T - \mathbf{M}) \\ \cos \frac{\theta_r}{2} (\mathbf{M} - \mathbf{M}^T) & \sin \frac{\theta_r}{2} (\mathbf{M}^T + \mathbf{M} - 2r_{r,0}\Phi + 2r_{r,0}\mathbf{X}) \end{bmatrix} < \mathbf{0}.$$

#### 四、結論

承接上一年度的基礎，本年度我們針對非線性系統建立了相關的  $\pi$  分配特性與  $\pi$  穩定性條件；精簡控制器設計的流程；也將相關的應用擴大到濾波器的設計問題上。所有的條件與結果都能以線性矩陣不等式的形式表現。

#### 五、計畫成果自評

本次報告內容就三個主要的部分簡述，計畫成果實頗為豐碩。除了以  $\pi$  分配理論為應用之 PID 控制器設計的研究成果已發表於 [17]；在輸出訊號具有時域封包限制條件下之 FIR 濾波器設計，其結果已經彙整投稿於國際期刊[18]；區域極點配置條件下的濾波器設計結果，也將於近期內完成彙整，並擬投稿發表於國際期刊。

#### 六、參考文獻

- [1] Willems, J. C., "Dissipative dynamical system part I and part II," *Arch. Ration. Mechanical Anal.*, Vol. 45, pp. 325-393, 1972.
- [2] Vidyasagar, M., *Nonlinear System Analysis*, second edition, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1992.
- [3] Slotine, J. J., and W. Li, *Applied Nonlinear Control*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1991.
- [4] Tan, Z., Y. C. Soh, and L. Xie,

"Dissipative control for linear discrete-time systems, *Automatica*, Vol. 35, pp. 1557-1564, 1999.

- [5] Lawrence, D. A., and C. R. Johnson, Jr., "Recursive parameter identification algorithm stability analysis via pi-sharing," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. 31, pp. 16-24, 1986.
- [6] Wu, J. F., J. S. Heh, and I K. Fong, "On computing pi-coefficients," *Syst. Contr. Lett.*, Vol. 16, pp. 457-463, 1991.
- [7] Vo, B., A. Cantoni, and K. L. Teo, *Filter Design with Time Domain Mask Constraints: Theory and Applications*, Dordrecht Hardbound: Kluwer Academic Publishers, 2001.
- [8] Zang, Z., A. Cantoni, and K. L. Teo, "Envelope-constrained IIR filter design via  $H_\infty$  optimization methods," *IEEE Trans. Circuits and Syst. I*, Vol. 46, pp. 648-653, 1999.
- [9] Tan, Z., Y. C. Soh, and L. Xie, "Envelope-constrained  $H_\infty$  filter design: An LMI optimization approach," *IEEE Trans. Signal Processing*, Vol. 48, pp. 2960-2963, 2000.
- [10] Lee, C. M., and I K. Fong, "Robust FIR filter design with envelope constraints and channel uncertainty," paper accepted for publication in *IEEE Trans. Signal Processing*, 2003.
- [11] Prochazka, H., and I. D. Landau, "Pole placement with sensitivity function shaping using 2<sup>nd</sup> order digital notch filters," *Automatica*, Vol. 39, pp. 1103-1107, 2003.
- [12] Yang, F., and Y. S. Hung, "Robust mixed  $H_2/H_\infty$  filtering with regional pole assignment for uncertain discrete-time systems," *IEEE Trans. Circuits and Syst. I*, Vol. 49, pp. 1236-1241, 2002.

[13] Palhares, R. M., and P. L. D. Peres, "Robust filtering design with pole constraints for discrete-time systems: an LMI approach," in *Proceedings of ACC*, San Diego, CA, June 1999, pp. 4418-4422.

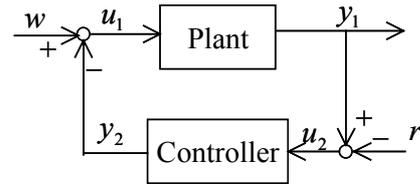
[14] Sergeev, V. V., "Analysis and design of reactive filters by energy criteria," *Automation and Remote Control*, Vol. 63, pp. 1013-1021, 2002.

[15] Hu S. C., I K. Fong, and T. S. Kuo, "Multivariable pi-sharing theory and its application on the Lur'e problem," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. 43, pp. 1501-1505, 1998.

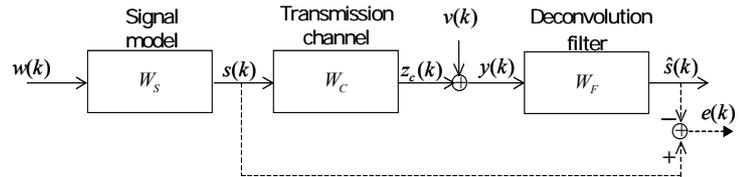
[16] Boyd, S., L. El. Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan, *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, SIAM, Philadelphia, PA, 1994.

[17] Fong, I K., J. K. Horng, and C. C. Hsu, "PID-type controller synthesis via  $\pi$ -sharing theory," *European Control Conference*, University of Cambridge, UK, 2003.

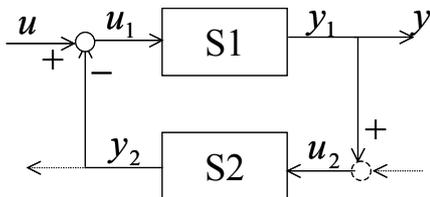
[18] Lee, C. M., and I K. Fong, "Robust MIMO FIR filter design with time-domain mask constraints via  $\pi$ -sharing theory," paper submitted to *IEEE Trans. Circuits and Syst. II*.



圖二



圖三



圖一