行政院國家科學委員會專題研究計畫　成果報告

以線性矩陣不等式法發展廣義π分配理論及其應用(3/3)

計畫類別：個別型計畫
計畫編號：NSC93-2213-E-002-020-
執行期間：93 年 08 月 01 日至 94 年 10 月 31 日
執行單位：國立臺灣大學電機工程學系暨研究所

計畫主持人：馮蟻剛

報告類型：完整報告
報告附件：出席國際會議研究心得報告及發表論文
處理方式：本計畫可公開查詢

中　華　民　國 94 年 12 月 20 日

行政院國家科學委員會補助專題研究計畫成果報告

※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※
※ ※
※ 以線性矩陣不等式法發展 ※
※ 廣義π分配理論及其應用（**3/3**） ※
※ ※
※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※

計畫類別：☑個別型計畫　　☐整合型計畫
計畫編號：NSC　93 - 2213 - E - 002 - 020
執行期間：93 年 8 月 1 日 至 94 年 10 月 31 日

計畫主持人：馮 蟻 剛　教 授
共同主持人：

本成果報告包括以下應繳交之附件：
☐赴國外出差或研習心得報告一份
☐赴大陸地區出差或研習心得報告一份
☑出席國際學術會議心得報告及發表之論文各一份
☐國際合作研究計畫國外研究報告書一份

執行單位： 國 立 臺 灣 大 學 電 機 工 程 學 系

中　華　民　國　94　年　10　月　7　日

行政院國家科學委員會專題研究計畫成果報告
以線性矩陣不等式法發展廣義π分配理論及其應用（3/3）
Developing and Applying The Generalized π-Sharing Theory Using Linear Matrix Inequality (3/3)

計畫編號：NSC 93-2213-E-002-020
執行期限：93 年 8 月 1 日至 94 年 10 月 31 日
主持人：馮蟻剛　　　國立臺灣大學電機工程學系

一、中文摘要

本年度計畫主要利用廣義π分配理論，針對在時間延遲系統中的穩定性分析與應用進行研究。與時間延遲參數無關的延遲獨立穩定性之充分條件是主要的結果，並針對迴授控制器設計的應用問題，提出對應的設計演算法。所有結果都以線性矩陣不等式的形式呈現，以利凸集最佳化的運算。

關鍵詞：π分配理論，時間延遲，線性矩陣不等式，控制器設計，被動性。

Abstract: In this report, the generalized π-sharing theory for the retarded type linear time-delay systems is established and used to develop a procedure for synthesizing stabilizing controllers, including PI-controllers. The proposed method is based on the linear matrix inequality formulation and is easy to apply.

Keywords: π-sharing theory, time delay, LMI, controller design, passivity.

二、緣由與目的

在實際控制系統中狀態具有時間延遲的現象極為普遍[1]，如熱軋鋼系統中，溫度控制機制中狀態的延遲，將直接造成輥輪壓力的不均，而影響軋滾的成效和品質。因此，對於線性時間延遲系統的分析和控制問題，長久以來即引發許多學者注意與研究。而在時域上的穩定性分析及控制方法，又多以 Lyapunov-Krasovskii 函數或 Lyapunov-Razumikhin 函數的李雅普諾夫第二方法(Lyapunov's second method)為根據加以討論[2][3]。即便如此，仍有一些問題並未完全被解決，例如，如何設計相關固定階數的控制器問題等。在[4] 中說明了構成具時間延遲之線性系統被動性(passivity) 的某些充分條件及可穩定的條件。本年度計畫藉著π分配理論對被動性理論的包容性，以系統能量耗散的觀點，對時間延遲系統的π穩定度進行研究，並針對具未知延遲時間的不穩定系統，設計固定階數的穩定控制器以穩定之。

三、研究方法與成果

符號定義：

1. $X \geq 0$ 表示 X 為對稱(symmetric)且半正定(positive semi-definite)矩陣。
2. $X \geq Y$ 表示 $X - Y \geq 0$ 為對稱且半正定矩陣。類似符號亦適用於對稱正定(positive definite)或負定(negative definite)矩陣。
3. 常數向量 x 的 2-範數(two-norm)以$\|x\|$表示，而矩陣 X 的歸納 2-範數(induced two-norm) 表示成$\|X\|$。

以連續時間t為變數之向量$x_1(t), x_2(t)$，其內積定義為

$$\langle x_1, x_2 \rangle_T \equiv \int_0^T x_1'(t) x_2(t) dt \text{ ，}$$

其中$T \geq 0$為一常數。

3.1 針對時間延遲系統之π分配理論

考慮以下狀態具時間延遲之線性動態系統Σ，其狀態空間表示式：

$$\Sigma:\begin{cases}\dot{x}(t)=Ax(t)+A_d x(t-d)+Bu(t)\\ y(t)=Cx(t)+C_d x(t-d)+Du(t)\\ \quad x(t)=\phi(t)\quad \forall t\in[-d,\ \ 0],\end{cases}\qquad(1)$$

其中，$x(t)\in\Re^n$ 為系統狀態變數，$u(t),y(t)\in\Re^m$ 為系統 Σ 之輸入與輸出變數，A,A_d,B,C,C_d,D 皆為常數系統矩陣，d 是延遲時間，$\phi(\cdot)$ 為初始條件函數。對於時間 $T\geq 0$，若 $x(t),y(t),u(t)$ 滿足下列不等式：

$$\langle u,Sy\rangle_T \geq v(T)-v(0)+\langle y,Py\rangle_T+\langle u,Ru\rangle_T,\qquad(2)$$

則稱此時間延遲系統 Σ 具有 π 分配特性，且存在相對應之 π 係數 $\{S,\Gamma,Q,P,R\}$，其中 $S\in\Re^{m\times m}$ 為任意之方陣，$v(t)=x^T(t)\Gamma x(t)+\int_{t-d}^{t}x^T(\tau)Qx(\tau)d\tau$，$\Gamma,Q\in\Re^{n\times n}$ 為半正定矩陣，$P,R\in\Re^{m\times m}$ 為對稱矩陣。式(2)描述系統 Σ 具有二次形式的能量供給率函數和能量之耗散性，其中，$\langle u,Sy\rangle_T$ 代表經由外界提供給 Σ 的能量。當 Σ 由外界獲得能量時，則 $\langle u,Sy\rangle_T\geq 0$。$v(T)-v(0)$ 表示系統狀態變數所儲存之能量，$\langle y,Py\rangle_T+\langle u,Ru\rangle_T$ 則描述系統 Σ 與其它相連系統之能量交換狀況與互動情形。對應式（1）與（2），可定義一耗散矩陣，

$$M=\begin{bmatrix}M_{11} & M_{12} & M_{13}\\ M_{12}^T & M_{22} & M_{23}\\ M_{13}^T & M_{23}^T & M_{33}\end{bmatrix}\leq 0,\qquad(3)$$

其組成元素為：

$$\begin{aligned}M_{11}&=A^T\Gamma+\Gamma A+Q+C^TPC,\\ M_{12}&=\Gamma B-\tfrac{1}{2}(SC)^T+C^TPD,\\ M_{13}&=\Gamma A_d+C^TPC_d,\\ M_{22}&=D^TPD-\tfrac{1}{2}(SD+(SD)^T)+R,\qquad(4)\\ M_{23}&=D^TPC_d-\tfrac{1}{2}SC_d,\\ M_{33}&=C_d^TPC_d-Q.\end{aligned}$$

就半負定的耗散矩陣而言，以下的輔助定理證明了 π 係數集合的存在。

輔助定理 1：若 $M\leq 0$，$\Gamma\geq 0$ 和 $Q\geq 0$，則系統 Σ 滿足 π 分配特性，且具有相對應之 π 係數 $\{S,\Gamma,Q,P,R\}$。

證明：利用系統 Σ 之(1)，不等式(2)相當於

$$-\langle u,Sy\rangle_T+\int_0^T\dot{v}(t)dt+\langle y,Py\rangle_T+\langle u,Ru\rangle_T\leq 0.$$

當取 $\zeta^T(t)=\begin{bmatrix}x^T(t) & u^T(t) & x^T(t-d)\end{bmatrix}$ 時，即可得到 $\langle\zeta,M\zeta\rangle\leq 0.$ □

從 π 分配理論的討論中[5]可知，系統的 π 穩定性是同時包含著狀態與輸入輸出的穩定性。以下的充分條件說明了在時間延遲系統 Σ 中，相對於 π 係數 $\{S,\Gamma,Q,P,R\}$ 的廣義 π 穩定度。

輔助定理 2：設系統 Σ 滿足 π 分配特性，並具有對應之 π 係數 $\{S,\Gamma,Q,P,R\}$，其中 $\Gamma>0,\ P>0$。令 $s_0=\|S\|,\ \ \gamma_0=\lambda_{\min}(\Gamma)$, $p_0=\lambda_{\min}(P)$，且 $r_0=\min\{s_0^2/4p_0,\lambda_{\min}(R)\}$。則對所有 $T\geq 0$，

$$\max_{0\leq t\leq T}\|x(t)\|\leq\frac{1}{\sqrt{\gamma_0}}\left[\sqrt{v(0)}+\sqrt{\left(\frac{s_0^2}{4p_0}-r_0\right)}\|u\|_T\right],\qquad(5)$$

$$\|y\|_T\leq\sqrt{\frac{v(0)}{p_0}}+\left(\frac{s_0+\sqrt{s_0^2-4p_0r_0}}{2p_0}\right)\|u\|_T.\qquad(6)$$

證明：從(2)式及 Schwarz 不等式可以很快地得到以下的關係。

$$\begin{aligned}s_0\|u\|_T\|y\|_T&\geq v(T)-v(0)+p_0\|y\|_T^2+r_0\|u\|_T^2\\ &\geq\gamma_0\|x(T)\|^2-v(0)+p_0\|y\|_T^2+r_0\|u\|_T^2.\end{aligned}$$

相當於，

$$\gamma_0\|x(T)\|^2 \le v(0) - p_0\left(\|y\|_T - \frac{s_0}{2p_0}\|u\|_T\right)^2 + \left(\frac{s_0^2}{4p_0} - r_0\right)\|u\|_T^2 \le v(0) + \left(\frac{s_0^2}{4p_0} - r_0\right)\|u\|_T^2.$$

所以，對於時間 $T \ge 0$ ，

$$\|x(T)\| \le \frac{1}{\sqrt{\gamma_0}}\sqrt{v(0) + \left(\frac{s_0^2}{4p_0} - r_0\right)\|u\|_T^2} \le \frac{1}{\sqrt{\gamma_0}}\left[\sqrt{v(0)} + \sqrt{\left(\frac{s_0^2}{4p_0} - r_0\right)}\|u\|_T\right],$$

對於所有 $t \in [0, T]$，

$$\|x(t)\| \le \frac{1}{\sqrt{\gamma_0}}\left[\sqrt{v(0)} + \sqrt{\left(\frac{s_0^2}{4p_0} - r_0\right)}\|u\|_t\right] \le \frac{1}{\sqrt{\gamma_0}}\left[\sqrt{v(0)} + \sqrt{\left(\frac{s_0^2}{4p_0} - r_0\right)}\|u\|_T\right],$$

即驗證了(5)。而(6)式的驗證則是以關係式

$$p_0\|y\|_T^2 - s_0\|u\|_T\|y\|_T + r_0\|u\|_T^2 \le v(0) - v(T) \le v(0)$$

為起點，同樣依循(5)的類似技巧推演。細節的部分，在此省略之。 □

值得注意的是，一旦輔助定理 2 的條件被滿足，則當系統Σ的初始函數$\phi(\cdot)$為有界函數，且系統輸入訊號包含有限能量時，則系統Σ便擁有有界之狀態響應及有限能量之輸出訊號。這就是針對時間延遲系統的廣義π分配穩定。

π分配理論一個重要的優點是，在迴授系統中，該迴授系統的π係數可以由其個別子系統的π係數加以結合[5]，因此，計算上方便許多。這樣的特性，也存在於時間延遲系統的廣義π分配理論上。

輔助定理 3：考慮圖一， Σ代表整個回授系統，其子系統 S1 及 S2 都表示成如(1)之形式，且皆滿足π特性，而分別對應π係數$\{S_1, \Gamma_1, Q_1, P_1, R_1\}$及$\{S_2, \Gamma_2, Q_2, P_2, R_2\}$。則系統$\Sigma$滿足$\pi$分配特性，且其對應之$\pi$係數為

$$\{S, \Gamma, Q, P, R\} = \left\{\begin{bmatrix} S_1 & 2R_1 \\ -2R_2 & S_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \Gamma_1 & 0 \\ 0 & \Gamma_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} P_1 + R_2 & \frac{1}{2}(S_1^T - S_2) \\ \frac{1}{2}(S_1 - S_2^T) & P_2 + R_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix}\right\}. \quad (7)$$

證明：令 $x^T = [x_1^T \quad x_2^T]$, $u^T = [u_1^T \quad u_2^T]$, $y^T = [y_1^T \quad y_2^T]$, $u_e^T = [u_{e1}^T \quad u_{e2}^T]$, 且

$$\widetilde{S} = \begin{bmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & S_2 \end{bmatrix}, \widetilde{P} = \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix}.$$

針對 $i = 1,2,$ 將以下的不等式

$$\langle u_i, S_i y_i \rangle_T \ge v_i(T) - v_i(0) + \langle y_i, P_i y_i \rangle_T + \langle u_i, R_i u_i \rangle_T,$$

相加，可以得到

$$\langle u, \widetilde{S}y \rangle_T \ge v(T) - v(0) + \langle y, \widetilde{P}y \rangle_T + \langle u, Ru \rangle_T,$$

其中 $v_i(t) = x_i^T(t)\Gamma_i x_i(t) + \int_{t-d}^{t} x_i^T(\tau)Q_i x_i(\tau)d\tau.$

由圖一，將 $u = u_e - Hy$ 帶入上述不等式中，可得到

$$\langle u, \widetilde{S}y \rangle_T - \langle y, H^T\widetilde{S}y \rangle_T \ge v(T) - v(0) + \langle y, \widetilde{P}y \rangle_T + \langle u_e, Ru_e \rangle_T - 2\langle u_e, RHy \rangle_T + \langle y, H^T RHy \rangle_T,$$

這相當於

$$\langle u_e, Sy \rangle_T \ge v(T) - v(0) + \langle y, Py \rangle_T + \langle u_e, Ru_e \rangle_T.$$

□

由以上的輔助定理，若 $S_1^T = S_2$, $\Gamma_1 > 0, \Gamma_2 > 0, P_1 + R_2 > 0,$ 及 $P_2 + R_1 > 0,$ 則系統Σ便滿足輔助定理 2 之條件。

3.2 π 分配理論應用 — 控制器設計

考慮一線性非時變之方陣系統，如圖二所示，希望透過控制器的設計，使得整個回授系統能達到 π 穩定。其中，r 為外部輸入訊號。假設不考慮干擾訊號 w 的影響。受控體表示成：

$$\begin{aligned} \dot{x}_p(t) &= A_p x_p(t) + A_d x_p(t-d) + B_p u_1(t) \\ y_1(t) &= C_p x_p(t) + C_d x_p(t-d) + D_p u_1(t), \end{aligned} \tag{8}$$

其中，$x_p(t) \in \Re^n,\ u_1(t), y_1(t) \in \Re^m$, 且 $A_p, B_p, C_p, D_p, A_d, C_d$ 為已知的常數矩陣。欲設計之控制器表示成:

$$\begin{aligned} \dot{x}_c(t) &= A_c x(t) + B_c u_2(t) \\ y_2(t) &= C_c x_c(t) + D_c u_2(t), \end{aligned} \tag{9}$$

其中， $\mathrm{x_c}(t) \in \Re^l, u_2(t), y_2(t) \in \Re^m$, A_c, B_c, C_c, D_c 為欲求之常數矩陣，假設系統 $n \ge m, l \ge m$ 。

儘管輔助定理 3 是針對迴授系統之子系統皆包含時間延遲狀態的情況的結果，但對於上述迴授系統控制器的設計，仍是一體適用的。只需將欲設計之控制器，視其中對應延遲狀態的系統矩陣為 0 之特例即可。因此，對應於 π 係數 $\{S_2, \Gamma_2, Q_2, P_2, R_2\}$ 之 π 穩定控制器應該滿足不等式 $\Gamma_2 > 0, Q_2 \ge 0$ 和

$$\begin{bmatrix} A_c^T\Gamma_2 + \Gamma_2 A_c + Q_2 + C_c^T P_2 C_c & \left(B_c^T\Gamma_2 - \frac{1}{2}S_2 C_c + D_c^T P_2 C_c\right)^T & 0 \\ B_c^T\Gamma_2 - \frac{1}{2}S_2 C_c + D_c^T P_2 C_c & D_c^T P_2 D_c - \frac{1}{2}\left[S_2 D_c + \left(S_2 D_c\right)^T\right] + R_2 & 0 \\ 0 & 0 & -Q_2 \end{bmatrix} \le 0.$$

所以，結合此一不等式和輔助定理 2，3 的結果，可以知道當存在 $\{A_\mathrm{c}, B_\mathrm{c}, C_\mathrm{c}, D_\mathrm{c}\}$, $\{\Gamma_1, Q_1, P_1, R_1\}$, 和 $\{\Gamma_2, Q_2, P_2, R_2\}$ ，滿足下列的條件 (10)-(14)，

$$P_1 + R_2 > 0,\ P_2 + R_1 > 0, \tag{10}$$

$$\Gamma_1 > 0, Q_1 \ge 0 \tag{11}$$

$$\Gamma_2 > 0, Q_2 \ge 0, \tag{12}$$

$$M_1 = \begin{bmatrix} A_p^T\Gamma_1 + \Gamma_1 A_p + Q_1 + C_p^T P_1 C_p & \left(B_p^T\Gamma_1 - \frac{1}{2}C_p + D_p^T P_1 C_p\right)^T & \left(A_d^T\Gamma_1 + C_d^T P_1 C_p\right)^T \\ B_p^T\Gamma_1 - \frac{1}{2}C_p + D_p^T P_1 C_p & D_p^T P_1 D_p - \frac{1}{2}\left[D_p + D_p^T\right] + R_1 & \left(C_d^T P_1 D_p - \frac{1}{2}C_d^T\right)^T \\ A_d^T\Gamma_1 + C_d^T P_1 C_p & C_d^T P_1 D_p - \frac{1}{2}C_d^T & C_d^T P_1 C_d - Q_1 \end{bmatrix} \le 0, \tag{13}$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} A_c^T\Gamma_2 + \Gamma_2 A_c + Q_2 + C_c^T P_2 C_c & \left(B_c^T\Gamma_2 - \frac{1}{2}C_c + D_c^T P_2 C_c\right)^T \\ B_c^T\Gamma_2 - \frac{1}{2}C_c + D_c^T P_2 C_c & D_c^T P_2 D_c - \frac{1}{2}\left(D_c + D_c^T\right) + R_2 \end{bmatrix} \le 0. \tag{14}$$

則所設計的控制器將滿足所要求的目標，其中利用近似轉換讓 $S_1 = S_2 = I_m$ 。為了獲得一個合適的解集合，我們提供了一個求解的流程，摘要如下：

1. 忽略不等式 (12) (14)，增加 $P_2 > 0$, 配合不等式(10) (11) (13)，以求解 $\{P_2, R_2\}$ 和 $\{\Gamma_1, Q_1, P_1, R_1\}$ 。
2. 增加一目標函數 $4\lambda_{\max}(P_2) + \lambda_{\max}(R_2)$，並配合上述不等式，求其最小化解。
3. 取 $M_2 = 0$, 求解 $\{A_\mathrm{c}, B_\mathrm{c}, C_\mathrm{c}, D_\mathrm{c}\}$。分別為

$$\begin{aligned} A_c &= -\tfrac{1}{2}\Gamma_2^{-1}\left(Q_2 + C_c^T P_2 C_c\right), \\ C_c &= -\left(D_c^T P_2 - \tfrac{1}{2}I_m\right)^{-1} B_c^T \Gamma_2, \\ D_c &= P_2^{-1/2}\left(\tfrac{1}{4}P_2^{-1} - R_2\right)^{1/2} + \tfrac{1}{2}P_2^{-1}, \end{aligned} \tag{15}$$

而 B_c 允許設計者自由選擇。

此外，相對於[6] ，對於系統(8)，也可進一步利用 π 穩定的條件，設計 PI 控制器。對於 PI 控制器，可以描述成

$$\begin{aligned} \dot{x}_c(t) &= B_c u_2(t) \\ y_2(t) &= C_c x_c(t) + D_c u_2(t). \end{aligned} \tag{16}$$

不等式(10)-(14)仍需要，唯(14)需修改為

$$\begin{bmatrix} Q_2 + C_c^T P_2 C_c & \left(B_c^T\Gamma_2 - \frac{1}{2}C_c + D_c^T P_2 C_c\right)^T \\ B_c^T\Gamma_2 - \frac{1}{2}C_c + D_c^T P_2 C_c & D_c^T P_2 D_c - \frac{1}{2}\left(D_c + D_c^T\right) + R_2 \end{bmatrix} \le 0.$$

同時因應 PI 控制器，$P_2 < 0$ 必須加入求解

過程中。更詳細的相關推導、說明及數值範例，請參考[7]。最後得到

$$C_c = \left(-D_c^T P_2 + \tfrac{1}{2} I_m\right)^{-1} B_c^T \Gamma_2,$$

$$D_c = \left(-P_2\right)^{-1/2}\left(\tfrac{1}{4}\left(-P_2\right)^{-1} + R_2 + Z\right)^{1/2} - \tfrac{1}{2}\left(-P_2\right)^{-1},$$

而 B_c, Γ_2, Z 允許設計者依照需求自行調整。一般我們選擇 B_c 為 I，同時選擇 $\Gamma_2 = gI$, 其中 $g > 0$, 為與 I-增益 C_c 有關的調整參數。

四、結論

承接前兩年度的基礎，本年度我們針對線性系統建立了與時間延遲相關的 π 分配特性與 π 穩定性條件，並討論相關控制器的設計，包括一般穩定控制器和 PI 控制器兩種。所有的條件與結果都能以矩陣不等式的形式呈現，並提供有用的求解程序。

五、計畫成果自評

本年度計畫之報告內容係以具時間延遲之線性系統為討論對象，雖暫時未將系統不確定性因素考量進來，然所呈現的結果，仍可參照上一年度所提及之討論方式，非常容易地，就可將之延展到強健穩定性的討論範疇。本年度計畫成果仍屬豐碩，以上的相關內容已發表於 SICE 2005 [7] 研討會上，並以此為基礎，繼續以時間延遲現象相關的領域進行更進一步的研究。

六、參考文獻

[1] Mahmoud, M. S., *Robust Control and Filtering for Time-Delay Systems*, Marcel Dekker Inc., New York, NY, 2000.

[2] Niculescu, S. I., E. I. Verriest, L. Dugard, and J. M. Dion, "Stability and robust stability of time-delay systems: A guided tour," *Stability and Robust Control of Time Delay Systems*, Springer-Verlag, New York, NY, 1997, pp. 1-71.

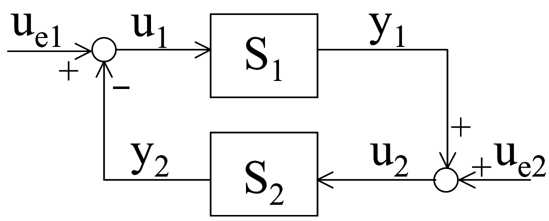
[3] Verriest, E. I. and A. F. Ivanov, "Robust stability of systems with delayed feedback," *Circuits, Syst. Signal Processing*, Vol. 13, pp. 213-222, 1994.

[4] Niculescu, S. I. and R. Lozano, "On the passivity of linear delay systems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. 46, pp. 460-464, 2001.

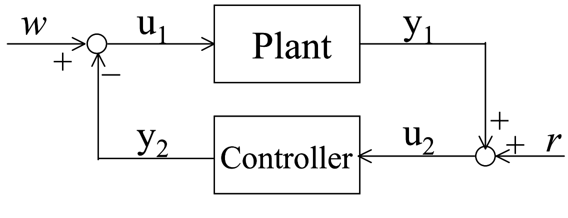
[5] Hu, S. C., I K. Fong, and T. S. Kuo, "Multivariable pi-sharing theory and its application on the Lur'e problem," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. 43, pp. 1501-1505, 1998.

[6] Fong, I K., J. K. Horng, and C. C. Hsu, "PID-type controller synthesis via $\pi-$sharing theory," *European Control Conference*, Cambridge, UK, 2003.

[7] Horng, J. K. and I K. Fong, "The π sharing theory for retarded type linear time-delay systems and a stabilizing controller synthesis procedure," *SICE Annual Conference*, Okayama , Japan, 2005.



圖一



圖二