

# 彈塑性之閔氏時空群論與模式識別實驗 (二)

Elastoplasticity: group action on Minkowski spacetime and experimentation for model identification (2)

計劃編號： NSC 88-2211-E-002-008

執行期限： 87.08.01—88.07.31

計劃主持人：洪宏基 教授

博士後研究：劉進賢 博士

研究助理：蕭雅柏

執行機構：臺灣大學土木工程學研究所

## 1 中文摘要

關鍵詞：塑性、微觀力學、閔氏時空、Lorentz 群、雙滑移模式、循環棘齒行為、環向應變。

本計畫利用閔氏時空群論研究彈塑性組成模式。對一般嚴格凸的彈塑性模式，以高斯映射法將降伏梯度向量映成單位向量，並引進正規化增廣應力向量，滿足零錐條件。此正規化增廣應力向量滿足擬線性微分方程系統， $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X}$ ， $\mathbf{A} \in so(n, 1)$  是 Lorentz 群的局部李代數。根據 Lorentz 群的基本性質，我們發展高精度保持群結構的算法，使得降伏一致性條件皆能自動滿足。

本計畫將彈性完全塑性模式用於實驗上常用的軸扭雙向控制問題，得出軸應力、剪應力、徑向應變及環向應變的閉合解。並進一步探討變率收縮比及全收縮比，在不同初始應力條件及相同比例加應變條件下的歷時變化。全收縮比在彈塑性狀態轉換時連續變化，其值皆小於 1/2。但是變率收縮比在彈塑性狀態轉換時可能會發生不連續變化，其值可能大於 1/2。

本計畫將多晶材料的微觀力學行為，利用晶粒的雙滑移模式，與宏觀的應力應變關係連結起來。推導晶粒在外加應變條件下的方位演化方程，並求出方位分佈函數的閉合解。以方位分佈函數對每個晶粒的微觀應力做統計平均，得出材料的應力反應。利用 Lorentz 群  $SO(2, 1)$  的性質，我們證出方位分佈函數的歸一化及守恆。觀察微觀的晶粒滑移線方位變化，本模式可以求出宏觀的應力應變關係。由鎳試片在微觀實驗得出的應力變化與理論值比較，結果相當不錯。

實驗方面使用 MTS809 軸扭試驗機及油壓式加內壓機，配合中空薄壁試桿進行鋁 6061 及不銹鋼 304 的軸扭雙向與軸扭及內壓三向循環行為實驗，對於非對稱循環振幅的棘齒行為及環向應變在循環負載下的行為有完整觀察及詳盡的描述。

## 2 英文摘要

Keywords: Plasticity, Micro-mechanics, Minkowski spacetime, Lorentz group, Double slip model, Cyclic ratchetting behavior, Hoop strain.

The project employed a group-theoretical approach to investigate constitutive models of elastoplasticity. For the model of strict convex elastoplasticity, we adopt the Gauss map to map the gradient of the yield function to a normalized augmented stress vector, which is governed by a quasi-linear system  $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X}$ , where  $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{X}) \in so(n, 1)$  is a local Lie algebra of the Lorentz group  $SO(n, 1)$ . Consequently, we can develop a highly accurate group-preserving scheme, which guarantees the satisfying of the consistency condition in every time marching of the calculation.

We study contraction ratios, one *rate form* and one *total form*, of the Prandtl-Reuss model under axial and torsional controls. In the transition point of elasticity and plasticity, the rate form contraction ratio may undergo a discontinuous jump, which, depending on the control paths and initial stresses, may be positive, zero or negative. The value of the rate form contraction ratio may be greater than 1/2. For the total form contraction ratio, there has no similar jump phenomenon in the elasticity-plasticity transition point. In the biaxial test, the hoop and radial strains are usually not known a priori; hence, in the constitutive model simulation of the responses they can not be viewed as inputs. This greatly complicates the constitutive analyses because the resulting differential constitutive equations become highly nonlinear. To tackle this problem, we derive a new parameterization of the axial stress and shear stress and a first order differential equation to solve the parameter variable, with which the consistency condition and initial conditions are fulfilled automatically.

Constitutive postulates for two-dimensional double slip model of polycrystal are selected. The micro-macro transition is based on the averaging of crystal behavior over all crystal orientations. A method is developed to transform the nonlinear governing equation of orientation to a system

of time-varying linear differential equations. It is found that the underlying structure of planar orientation is a  $(2+1)$ -dimensional Minkowski spacetime  $M^{2+1}$ , where the Lorentz group  $SO_0(2,1)$  plays a key role to sketch the evolution of orientation and orientation distribution function (ODF). Being a scalar function of orientation and time we find that ODF is the third component, "time" component, of the Minkowski spacetime. With this identification not only the continuity equation is verified but also the normalization condition can be proved rigorously with the help of the group properties.

The axial-torsional test equipment MTS809 of the NTU College of Engineering and the pressure control machine was used to study the cyclic and ratchetting behavior of tubular specimens of Al-6061 and stainless steel 3034. The ratchetting effect was observed in various loading conditions, in particular, in hoop strain under unsymmetric cyclic axial-torsional loading.

### 3 計劃緣由與目的

彈塑性模式是一種極為複雜的非線性微分動態系統，兼具可逆機制與不可逆機制，其中可逆機制經常存在，而不可逆機制並不是經常存在。在以前的研究中[2-7]我們曾經探討過的模式包括

模式	塑性不可逆開關	等向參數	走動參數
彈性完全塑性	一個	常數	無
雙線性	一個	常數	常數
走動	一個	常數	函數
混合硬化	一個	函數	函數
非線性走動	一個	函數	非線性
溫度有關模式	一個		
應變率有關模式	一個		
兩面模式	一個		
雙互補三元	二個		

上表所列模式由簡單逐步複雜，所需決定的待參數個數亦由少增多，若能以較簡單的模式，就能對想要了解的實驗現象進行模擬應是較佳的模式選擇目標。較複雜的模式雖然會有較多能力去模擬各種不同效應的實驗結果，但因為需要識別的參數較多，要逐一或獨立求取參數所需的實驗條件，往往會遠超出實驗技術所及的範疇。我們一直在思索什麼是固態系統宏觀力學性質的本質？特別是固體材料為什麼有彈塑性這樣的性質？為什麼個別的材料又性質殊異難以一爐冶之？它們的共性何在？特殊處又在那裡？可有什麼分類法則可以調和其共性又務實而不失其特異？答案就在怎麼建立它們的層級組織架構。經由多年的研究，輪廓已漸趨明朗，這個本質應該就是一種真善美的對稱性「滿足因果律的時空結構，有界耗散的狀態空間」。因此我們以內部對稱性來刻劃組成模式的層級組織架構，並滿足閔氏時空

的因果關係。其作用群包括 Lorentz 群、Poincaré 群、因果群、共形群。

對稱群	塑性不可逆開關	模式	走動
Lorentz 群	一個	彈性完全塑性	無
Poincaré 群	一個	雙線性	有
Poincaré 群	二個		有
因果群	一個	粘彈粘塑性	有
因果群	二個	粘彈粘塑性	有
共形群	一個	非線性粘彈粘塑性	有
共形群	二個	非線性粘彈粘塑性	有

材料工程設計及實務上常遇到的許多問題，其主要環節在於材料的組成模式較難掌握。所以不得不做適度的簡化與假設。事實上，當材料承受較大的外在作用力時，如金屬塑性成形加工，切削加工等，其力學性質有非常複雜的異向性演化，其根源在於微結構的變化。工程材料的微元大小約為一立方毫米，其中包含數百至上千大大小小不同的晶粒。工程材料性質都是建立在這些內部微組織的隨機均佈上。造成材料異向性的原因，在於微結構的演化。因此藉由對紋理結構演化的分析，將微觀的晶粒方位變化與宏觀的應力行為結合起來。泰勒所提出的晶粒均勻應變模式，是最早也是較簡單的模式。該模式假設宏觀的速度梯度場可以一致的作用在每個晶粒上，而且每個晶粒的變形一致，速度場在晶界上連續。滑移理論則從晶粒和晶界出發，探討滑移系的出現、消長與演化。觀察滑移線方位的演化，以晶體大變形理論推導晶粒微觀應力與應變的關係，再以方位分佈函數做平均，求出整個材料的應力反應。本研究以雙滑移模式，見圖一，推導出晶粒方位在加應變條件下的演化方程，並求出方位分佈函數 (orientation distribution function) 的閉合解。以方位分佈函數對每個晶粒的微觀應力做統計平均，得出材料的應力反應。圖二給出鎳試片在微觀實驗得出的應力變化與理論值的比較，結果相當不錯。

在以往相關文獻中可發現不論軸扭單向或雙向實驗，實驗結果所記錄的資料中往往僅有軸向及扭向，但實際的材料行為卻是多維，理論上實驗應當記錄所有非零應力或應變維度的數據，但受限於現實實驗技術而變得困難甚至不可能，所以量測環向應變的實驗資料具有相當重要的意義。從模式模擬的角度來看，材料在線性彈性範圍時，徑向應變相對於軸向應變的比值（在單軸向單調拉伸時稱為 Poisson 比）為固定常數，不隨應力狀態而改變，但當材料進入塑性時，比值卻會隨著應力狀態不同而改變。為了方便模擬在缺乏環向或徑向應變實驗數據時，一般假設材料進入塑性後為完全不可壓縮材料，簡化該值為 0.5，

但是事實上應僅可假設為塑性不可壓縮才符合模式架構的假設。不可壓縮材料的假設在軸向應變很大時才較接近實際實驗結果，而多數實驗的應變範圍並不很大。所以環向或徑向的量測顯得相當重要。棘齒效應是循環負載下（無論應力或應變或混合控制），隨著循環圈數增加而應變逐漸累積的一種現象。對循環失穩破壞的瞭解非常重要。我們延續前期計畫實驗的結果，進行更完整的雙向及三向應力或混和控制循環實驗。

#### 4 研究方法

本研究考慮一般的嚴格凸彈塑性模式，其中降伏函數 $f(\mathbf{Q})$  滿足嚴格凸條件：

$$\mathbf{H}(\mathbf{Q}) := \nabla^2 f(\mathbf{Q}) > 0. \quad (1)$$

以高斯映射法將降伏梯度向量映成單位向量，見圖三，

$$\mathbf{n} := \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}. \quad (2)$$

因此可得出 $\mathbf{n}$ 的微分方程如下：

$$\dot{\mathbf{n}} = \mathbf{A}^s_0 - (\mathbf{A}^s_0 \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}, \quad (3)$$

其中

$$\mathbf{A}^s_0 := \frac{k_e}{\|\nabla f\|} \mathbf{H}\dot{\mathbf{q}} - \frac{k_e \mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{q}}}{\|\nabla f\|} \mathbf{H}\mathbf{n}. \quad (4)$$

引進內時

$$X^0(t) := \|\nabla f(\mathbf{Q}(t_i))\| \exp \left[ \int_{t_i}^t (\mathbf{A}^s_0 \cdot \mathbf{n}) d\xi \right], \quad (5)$$

方程(3)及(5)變成

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X}, \quad (6)$$

其中

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}^s \\ X^0 \end{bmatrix} := X^0 \begin{bmatrix} \mathbf{n} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

是正規化增廣應力向量，滿足零錐條件，見圖四。

$$\mathbf{A} := \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n \times n} & \mathbf{A}^s_0 \\ \mathbf{A}^0_s & 0 \end{bmatrix} \quad (8)$$

滿足Lorentz群的局部李代數條件

$$\mathbf{A}^t \mathbf{g} + \mathbf{g} \mathbf{A} = \mathbf{0}, \quad (9)$$

此處 $\mathbf{g}$ 是閔氏時空的度量張量。利用以上結果我們發現對嚴格凸彈塑性模式可以引進閔氏時空結構，並推導出閔氏時空上的作用群，從而發展固態系統彈塑性行為的閔氏時空上作用群的研究方法。在此，並進一步發展保持作用群結構的計算方法。

具體地探討模式的計算除了在計算力學上的重要性外，也有助於識別方法的建立及改進，對於實驗研究的驗證工作以及工程材料性質試驗步驟實務亦可大大地簡化。實際上對模式的深入瞭解之後，我們發現要將模式具體的應用於模擬實驗的響應，仍存有相當大的問題。若我們不滿意祇用數值求解的方法，對模式的計算方法應深入研究。本研究將彈性完全塑性模式用於實驗上常用的軸扭應變控制問題。經過一些分析要求解下列微分方程，

$$\frac{1}{G} \frac{\dot{\sigma}_{11}}{\sqrt{3}} + \frac{\lambda}{h} \frac{\sigma_{11}}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}(\dot{\epsilon}_{11} - \frac{1}{3} \text{tr}\dot{\epsilon}), \quad (10)$$

$$\frac{1}{G} \dot{\sigma}_{12} + \frac{\lambda}{h} \sigma_{12} = 2\dot{\epsilon}_{12}, \quad (11)$$

其中在塑性狀態，

$$\lambda = \frac{3h(E\sigma_{11}\dot{\epsilon}_{11} + 6G\sigma_{12}\dot{\epsilon}_{12})}{E\sigma_{11}^2 + 9G\sigma_{12}^2}, \quad (12)$$

若將 $\lambda$ 代入前面兩個微分方程式，可看出求解是相當困難。

在本研究我們利用變數變換的方法推導出

$$\sigma_{11}(t) = \frac{\sigma_{11}(t_i) - \sqrt{3}\sigma_{12}(t_i) \sinh x}{\cosh x}, \quad (13)$$

$$\sigma_{12}(t) = \frac{\sigma_{12}(t_i) + \frac{\sigma_{11}(t_i)}{\sqrt{3}} \sinh x}{\cosh x}. \quad (14)$$

以上這兩個方程自動滿足降伏一致性條件及初始應力條件，其中參數 $x$ 滿足一階微分方程：

$$\dot{x} = \frac{6GK \cosh^2 x [\frac{\sigma_{11}(t_i)}{\sqrt{3}} - \sigma_{12}(t_i) \sinh x]}{37_y^2 K \cosh^2 x + G[\sigma_{12}(t_i) + \frac{\sigma_{11}(t_i)}{\sqrt{3}} \sinh x]^2} \dot{\epsilon}_{12} - \frac{3\sqrt{3}GK \cosh^2 x [\sigma_{12}(t_i) + \frac{\sigma_{11}(t_i)}{\sqrt{3}} \sinh x]}{37_y^2 K \cosh^2 x + G[\sigma_{12}(t_i) + \frac{\sigma_{11}(t_i)}{\sqrt{3}} \sinh x]^2} \dot{\epsilon}_{11}.$$

利用以上的結果我們探討收縮比的問題，提出

$$\nu_r := \frac{-\dot{\epsilon}_{22}}{\dot{\epsilon}_{11}}, \quad \nu_t := \frac{-\epsilon_{22}}{\epsilon_{11}}. \quad (15)$$

前者為變率收縮比，後者為全收縮比。對於給定的應變路徑，我們可以求出參數 $x$ ，代入(13)及(14)式便可得出軸應力及剪應力。

本計畫中我們成功地自行設計製造了量測徑向變形的伸長計（圖六），經由嚴謹的校正程序，伸長計的量測精度符合ASTM E83-96 Class A等級，可用來獲得環向應變的實驗資料，擴展了實驗量測維度。實驗使用國立台灣大學工學院固體力學聯合實驗室MTS軸扭雙向試驗機及油壓式加

內壓機，進行軸、扭及內壓多向循環實驗，在軸扭向皆能選擇應力或應變控制，內壓則為加壓控制(無法負壓)。實驗採用的材料為鋁6061及不銹鋼 304，試桿為薄壁圓剖面中空桿，外徑25mm、內徑22mm、中央平行段長60mm。進行的實驗包括固定內壓應力，軸向應力控制循環實驗、固定軸向應力，扭向應力控制循環實驗、固定內壓應力，軸扭雙向應力控制圓形路徑實驗、軸扭雙向應變控制矩形路徑實驗、軸扭及內壓三向應力控制立方體路徑實驗(圖七)。三向應變反應路徑見圖八。

## 5 結論與討論

根據理論分析、數值模擬及實驗之結果[1]，本研究之結論如下：

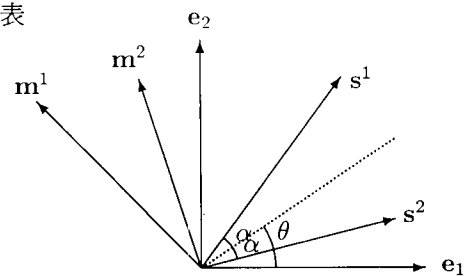
- I. 一般嚴格凸的彈塑性模式內稟閔氏時空結構，作用群是 Lorentz 群。利用 Lorentz 群的性質，發展保持一致性的數值算法，用在固體力學的初邊值問題計算上精度非常高。
- II. 將彈性完全塑性模式用於實驗上常用的軸扭雙向控制問題，得出軸應力、剪應力、徑向應變及環向應變的閉合解。並進一步探討變率收縮比及全收縮比。圖五給出在不同初始應力條件及相同比例加應變的條件下，兩個收縮比的歷時變化。全收縮比在彈塑性狀態轉換時連續變化，其值皆小於1/2。變率收縮比在彈塑性狀態轉換時可能會發生不連續變化，其值可能大於1/2。
- III. 利用晶粒的雙滑移模式，本報告[1]將多晶材料的微觀力學行為與宏觀的應力應變關係連結起來。求出晶粒方位及方位分佈函數的閉合解。以方位分佈函數對每個晶粒的微觀應力做統計平均，得出材料的應力反應。利用 Lorentz 群  $SO(2, 1)$  的性質，我們證出方位分佈函數的歸一化及守恆。由鋁試片在微觀實驗得出的應力變化與理論值比較，結果相當不錯。證明本模式可以求出宏觀的應力應變關係。
- IV. 實驗結果顯示材料在多軸混和或全應力控制的不同路徑型態實驗結果中展現出複雜多變的彈塑性行為，包括彈塑性耦合、路徑型態效應、循環硬化(或軟化)、循環飽和...等，其中最引起我們興趣的是棘齒效應及環向應變行為。從實驗結果可進一步確認對於對稱循環振幅實驗，在不同初始應力或應變條件下，仍然會發生棘齒效應，這項結果有異於多數文獻中所描述的棘齒效應只發生在非對稱循環振幅實驗。此外棘齒效應的累積應變在應變空間中其增長的方向似乎難以預估，有待進一步研究。實驗結果顯示，在軸向為應力控制的實驗中(圖九)，環向應變大

致上會隨著軸向應變的變化而變化，在軸向應變與環向應變的關係曲線中，可看出材料在彈性及彈塑性時，分別為斜率固定的直線，且彈塑性時的斜率絕對值大於彈性時(圖十)。但是當軸向為應變控制實驗時，環向應變與軸向應變的關係將會受到扭向的影響。在軸扭雙向應變控制矩形路徑實驗中(圖十一)可明顯看出，當軸向應變控制固定不變時，環向應變卻會隨著扭向剪應變所造成的塑性耦合效應而改變(圖十二)，此結果有別於一般文獻所常用的假設條件。

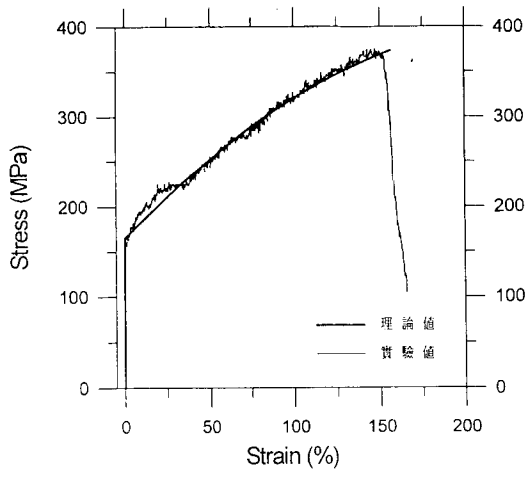
## 6 參考文獻

1. 洪宏基，劉進賢，蕭雅柏，彈塑性之閔氏時空群論與模式識別實驗(二)，國科會專題研究計劃成果報告，NSC 88-2211-E-002-008，1999。
2. 洪宏基，劉進賢，蕭雅柏，彈塑性之閔氏時空群論與模式識別實驗，國科會專題研究計劃成果報告，NSC 87-2211-E-002-035，1998。
3. 洪宏基，劉進賢，蕭雅柏，彈塑性動態系統分析實驗與識別(二)，國科會專題研究計劃成果報告，NSC 85-2211-E-002-001，1997。
4. 洪宏基，劉進賢，蕭雅柏，王智睿，陳俊佑，彈塑性動態系統分析實驗與識別，國科會專題研究計劃成果報告，NSC 84-2211-E-002-026，1996。
5. 洪宏基，劉進賢，彈塑材料力熱耦合的穩定與破壞研究，國科會專題研究計劃成果報告，NSC 83-0410-E-002-041，1994。
6. 洪宏基，劉進賢，鄧宏達，蕭雅柏，構造鋼受循環負載與衝擊熱之反應，國科會專題研究計劃成果報告，NSC 82-0410-E-002-104，1993。
7. 洪宏基，劉進賢，蕭雅柏，彈塑性材料之應變率效應與溫度效應研究(二)，國防科技發展推行委員會學術合作協調小組委託專題研究計劃成果報告，NSC 82-0405-D-002-024，1995。

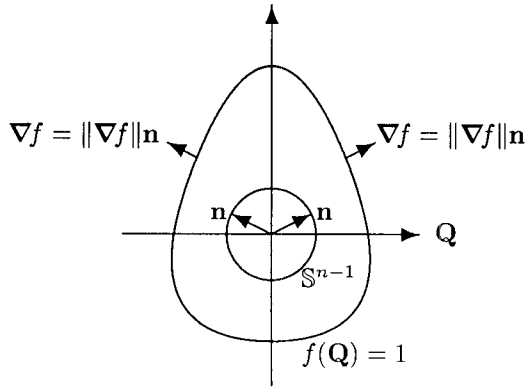
7 圖表



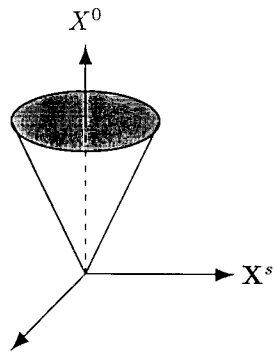
圖一微觀雙滑移模式晶粒方位視意圖。



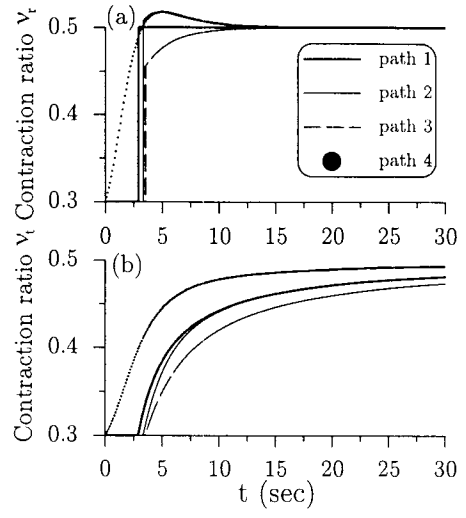
圖二鎳試片實驗與理論值的比較。



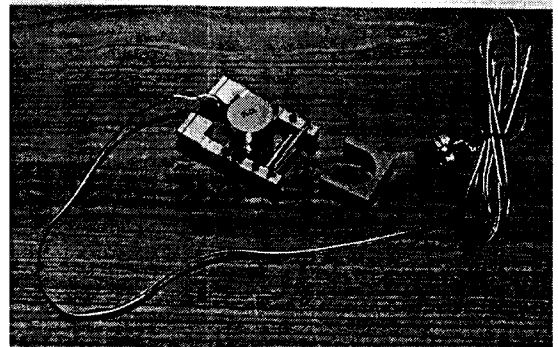
圖三以高斯映射將降伏梯度向量映成單位向量。



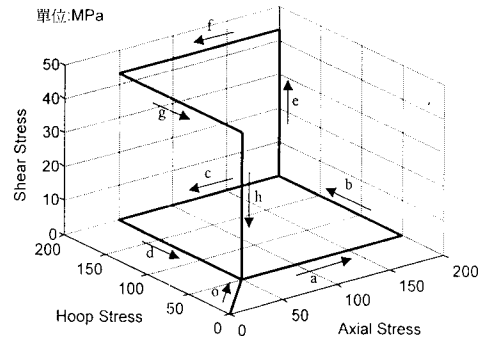
圖四閔氏時空的零錐構造。



圖五變率收縮比及全收縮比歷時圖。

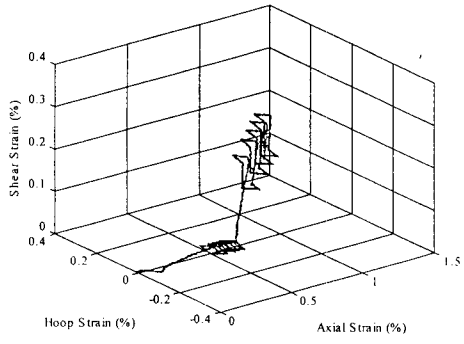


圖六自製量測徑向變形的伸長計。

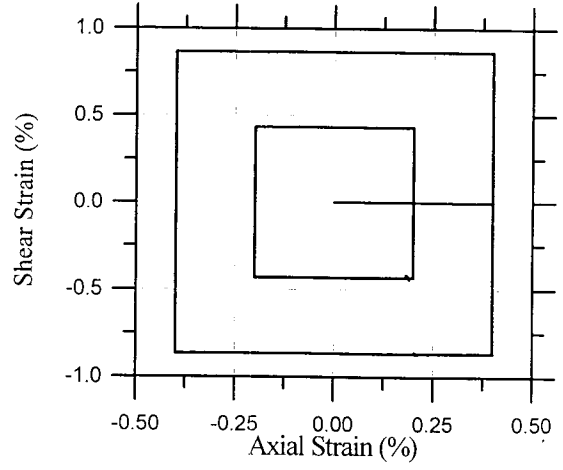


矩形路徑：a-b-c-d  
立方路徑：a-b-e-f-g-h

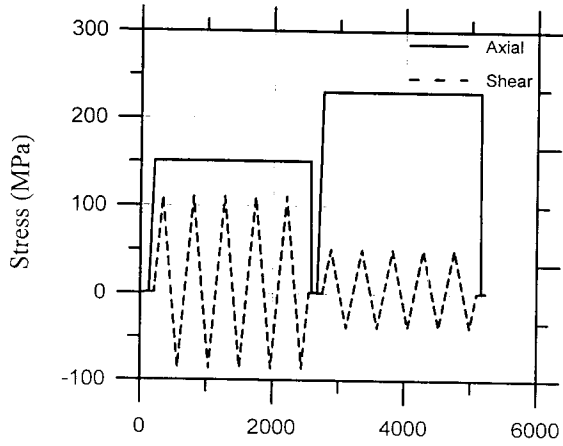
圖七三向應力控制矩形及立方體實驗路徑。



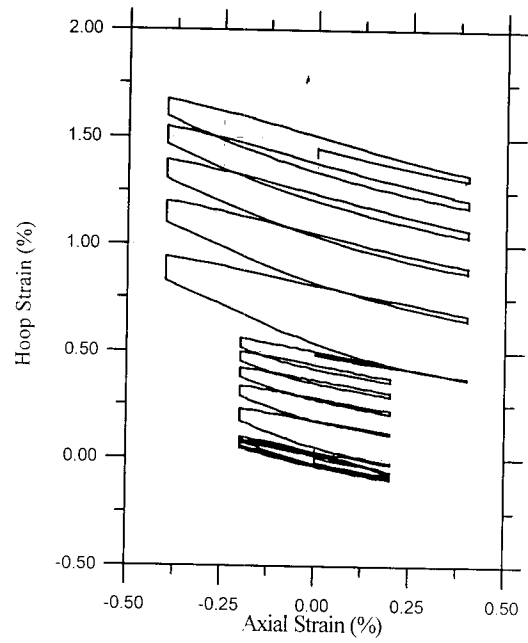
圖八三向應變反應路徑。



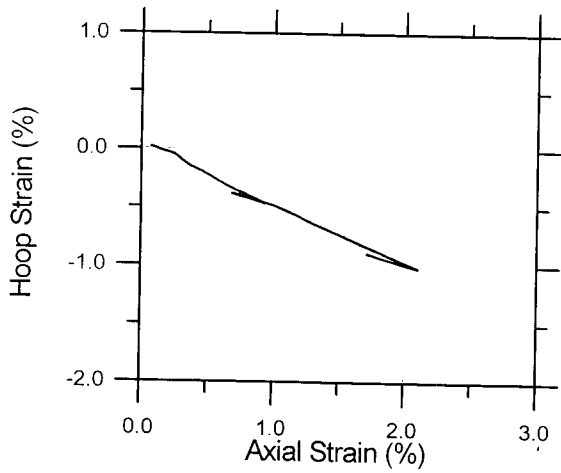
圖十一軸扭雙向應變控制實驗路徑。



圖九軸扭雙向應力控制實驗路徑。



圖十二軸扭雙向應變控制實驗環向應變與軸向應變關係。



圖十軸扭雙向應力控制實驗環向應變與軸向應變關係。