

行政院國家科學委員會專題研究計畫成果報告

平行子結構有限元素計算之效率研究

On The Efficiency of Parallel Substructure Finite Element Computations

計畫編號：NSC 88-2211-E-002-018

執行期限：87年8月1日至88年7月31日

主持人：謝尚賢 國立臺灣大學土木工程學系

電子郵件信箱：shhsieh@ce.ntu.edu.tw

一、中英文摘要

隨著工程分析複雜度的提高，有限元素分析的運算量與所需分析時間日益增加，使得平行有限元素計算技術逐漸受到重視。然而平行有限元素分析仍有許多尚未圓滿解決的問題，至今並沒有一種方法，能將任何工程問題之有限元素數值分析，高效率地平行化。尤其在有限元素網格形狀不規則的情況下，平行有限元素計算之效率將更難提高。

平行子結構法是目前平行有限元素計算領域中，較廣為使用的方法。為了解決目前平行子結構法在效率上的瓶頸，本研究針對平行子結構法中可能影響其平行效率之因素，包括對於自動網格分割演算法與子結構內結點重新編號的研究與測試，以及探討多階層平行子結構法與平行求解界面自由度。

關鍵詞：平行計算、有限元素計算、平行子結構法、自動網格分割、子結構結點重新編號

Abstract

In the past two decades, finite element method has become a common computational approach for solving complicated engineering problems. In recent years, the scale and complexity of engineering computations have increased significantly. Therefore, considerable research efforts have been devoted to the area of parallel finite element computations for obtaining more computing power and for achieving better computational efficiency. However, several issues still need to be addressed before parallel finite element analysis can be easily and feasibly used for

solving general large-scale and computation-intensive engineering problems.

In this work, the focus is placed on improving the efficiency of a popularly used parallel finite element approach, namely parallel substructure method. Several issues related to the efficiency of parallel substructure method are carefully investigated in this work. These issues include: (1) mesh partitioning for balance of computational loads among processors and for minimization of inter-process communication, (2) substructure nodal renumbering for minimizing condensation computations using general sparse matrix technique. In addition, parallel multi-level substructure method and parallel equation solvers for solution of interface degrees of freedom using concurrent processors are discussed. Several examples are used in this work for studying the efficiency of the improved parallel substructure method proposed.

Keywords: Parallel computing, Finite element analysis, Parallel substructure method, Automatic mesh partitioning, Substructure Nodal Renumbering

二、緣由與目的

近十年來，高速電腦的發展已逐漸走向平行化，利用多個處理器(processors)同時運作，來達到整體運算速度的提升。由於平行電腦與傳統循序電腦的運作方式有所不同，因此有限元素法的演算流程與平行電腦計算架構之間的彼此相互關係則日顯重要。但是早期關於有限元素法的研究，大多並未考慮其演算法的平行化可行性，而仍重於循序式

的計算流程。故至今有限元素分析領域，仍缺乏一個通用而很有效的平行演算法，可充份利用現今的高速電腦。

在有限元素結構分析方面，隨著工程問題複雜度與其所需的分析精確度提高，有限元素計算所需的運算量亦日益龐大。大型有限元素結構模型之非線性分析、動力歷時分析、與結構最佳化設計，往往耗去大量的運算時間。雖然目前電腦硬體科技仍在進步，對於一些精確度要求較高的工程分析問題，其數值計算速度有時仍不足以應付工程分析之需求[1,2]。若是在結構設計階段，欲對結構體進行最佳化設計，其疊代過程所需的運算量將更可觀。

近年來由於工作站與個人電腦的普及與其運算性能的提昇，使工程界與學術界利用數台工作站或個人電腦進行平行有限元素分析的可行性大幅提高。利用平行處理技術，將原本的問題分割為數個較小的子問題，再將每個子問題分配予各電腦進行運算，不但對整體運算速度有所助益，亦能減少單一電腦的記憶體負荷。然而平行有限元素分析仍有許多尚未圓滿解決的問題，即使是基本的線性靜力分析問題，目前並沒有一種方法能保證在任何情況下均能達到高效率的平行計算。以目前廣為使用的平行子結構有限元素計算為例，如何使各處理器所分配到的運算量平衡並有效控制其整體運算量，以提高平行效率，都是目前仍有待進一步研究的課題[3-5]。

本研究對目前平行子結構法在效率上所面臨的瓶頸提出解決的方法，以提升平行子結構有限元素計算，在網路平行電腦上之計算效率。高效率的平行子結構計算，一方面將有助於縮短工程分析的時間與提高更精細工程分析的可行性，另一方面將減少大型結構分析所需的硬體成本，使一般的學術界與工程界更有能力進行大型的結構分析。本研究之成果，將有助於工程界與學術界應用平行有限元素計算技術，一方面減少結構分析所需時間，另一方面能在有效時間內，完成更精確之結構分析。

三、結果與討論

本研究主要完成的工作有四項：(1) 建立個人電腦叢集平行計算系統；(2) 開發一套

子結構有限元素運算程式庫 FE2000；(3) 提出一套改良式網格分割機制；(4) 研究與測試子結構結點重排對於平行效率之影響。

本研究以六台個人電腦與網路設備，配合 Linux 作業系統與 MPI 訊息傳遞程式庫 [6]，組成一套個人電腦叢集系統，作為平行有限元素結構分析之測試環境(如圖 1)。本研究並以 LINPACK 標準測試程式與本研究上年度所整合的物件導向平行有限元素計算環境(編號 NSC 87-2211-E-002-034)，進行該個人電腦叢集之測試。表 1 為本研究利用上年度所整合之平行計算環境[7]，進行個人電腦叢集系統與 IBM/SP2(66MHz 型)平行工作站的計算效率之比較結果。詳細的測試結果請參考本研究完整報告。結果顯示，本研究之個人電腦叢集較 IBM/SP2(66MHz) 快約 32%。這顯示個人電腦叢集具有相當的潛力，作為未來工程或研究單位主要的高速運算硬體資源。

本研究參照有限元素計算程式庫 FE++[8]、PFE++[9]與本研究之上年度計畫之計算環境，開發一套有限元素計算程式庫 FE2000。重新開發 FE2000 程式庫主要是為了提供一套架構簡潔的程式庫，以作為平行子結構有限元素計算效率之相關研究的工具。表 2 為其循序與平行計算之比較範例測試結果。表格中之 NSC87 表示上年度開發與整合之計算環境，FE2000 表示本年度開發之程式。詳細的測試結果請參考本研究完整報告。測試結果顯示，FE2000 之計算效率優於本研究上年度之計算環境約 28%，較適合作為進行平行效率研究之工具。

為了達到各處理器(或各子結構)之運算量平衡，本研究針對網格分割演算法進行修改，並提出一套網格分割疊代機制。為了達到較好的網格分割結果，本研究提出一個網格分割疊代機制。目前本研究以 METIS 圖分割程式庫[10]為本研究網格分割機制的運作核心。本研究所採用的疊代機制，是利用 METIS 所提供之各種關於圖權重功能。在疊代過程中，每進行一次網格分割，該機制即重新調整各元素之權重，期能使得進行下一疊代之網格分割時，具有較多界面結點之子結構，擁有較少的元素數目，以達較好的運算量平衡。表三為使用原本 METIS 進行網格分割與搭配本研究之網格分割疊代機制，所進行之測試結果。詳細的測試結果請參考本

研究完整報告。測試結果顯示，本研究之網格分割疊代機制，大致上不但能使各子結構運算量較為平衡，有時亦能減少子結構間界面結點的數目，減少界面自由度求解時間，提高平行效率。

為了有效控制子結構法運算量的增加，本研究亦進行子結構結點重排方面之研究。除了本研究過去使用的 MMD (Multiple Minimum Degree)重排法[11]之外，本研究並將 ND(Nested Dissection)[12] 與 MSMD (Multi-Stage Minimum Degree)重排法[13]，應用於各子結構矩陣重排。其中，MSMD 演算法本身即考慮子結構結點重排限制，而 MMD 與 ND 法則是經重排後，再經強制修正，使其重排結果滿足子結構重排限制。表四為採用 MMD 與 MSMD 不同子結構結點重排法所測試之結果。詳細的測試結果請參考本研究完整報告。研究與測試結果顯示，MSMD 子結構結點重排演算法相對優於其它演算法。在靜態濃縮時間方面，MSMD 法較去年使用之 MMD 法節省約 20% 的時間。表 5 之左邊數據為採用 METIS 程式庫與 MMD 法進行網格分割與子結構結點重排，右邊數據為採用網格分割疊代機制與 MSMD 子結構結點重排法。這顯示同時採用此兩法，將可以明顯地縮短平行子結構有限元素分析所需的時間。

為了更進一步提高平行子結構法之平行化程度，本研究研讀多階層子結構法 (multi-level substructuring) 之流程，並與本研究採用的單層平行子結構法之流程進行比較，並探討多階層平行子結構法之可行性。

整體而言，經過本研究重新撰寫 FE2000 程式庫、提出改良式網格分割機制，並引入 MSMD 子結構結點重排法，均有助於平行子結構法之計算速度提升。此外，經初步測試，本研究之 FE2000 程式庫，可以支援多階層子結構計算。此法若能完成，預期將能有效地改善邊界自由度方程式求解時間過長的問題。這些研究成果，將作為未來進行結構非線性動力歷時分析之平行有限元素計算的基本工具，以有效縮短結構非線性動力歷時分析所需之運算時間。

四、計畫成果自評

本研究基本上已完成預期之工作項目。

研究中除了建立一套個人電腦叢集系統，並開發一套平行有限元素運算程式庫之外，本研究並研究與嚐試多種關於平行有限元素計算效率之因素與方法。整體而言，本研究大幅度地提升平行子結構有限元素計算之效率，縮短整體分析之時間。

如前所述，本研究成果與當初預期目標相當符合。唯在求解界面自由度計算方面，並未採用平行線性聯立方程式求解法。研究過程中，本研究亦研讀多階層子結構法，預期此法將可能有助於減少求解界面自由度計算時間。此法的實作與測試將列為本研究下年度之研究目標之一。

本研究已將利用個人電腦叢集系統進行平行有限元素計算之研究成果，投稿於國內期刊，目前正審稿中。本研究所提出的網格分割疊代機制，目前已發表於 EASEC-7 研討會[14]。在子結構結點重排方面，雖其矩陣重排法為已被提出的演算法，但目前卻不見將其應用於結構計算方面，用以控制子結構法之整體運算量。故在子結構結點重排方面之研究成果，稍作整理之後，應可發表於學術期刊。

五、參考文獻

- [1] Hsieh, S. H. and Abel, J. F. (1997). "Parallel Computation of Nonlinear Seismic Responses of Steel Frames with Flexible Floors Using Network Workstations," *Journal of the Chinese Institute of Civil and Hydraulic Engineering*, Vol.9, No.1, pp.77-85.
- [2] Chi, W. M., Sherif, E. -T., Gregory, G. D. and Abel, J. F. (1997). "Nonlinear Transient Seismic Analysis of 3D Multistory Moment-Frame Buildings," *Proceedings of The International Colloquium on Computation of Shell & Spatial Structures*, November 5-7, 1997, Taipei, Taiwan, R.O.C.
- [3] 謝尚賢，楊元森，與鄭維中 (1997). "平行有限元素計算之網格分割研究," 國科會專題研究計畫成果報告, 計畫編號: NSC 86-2211-E-002- 029.
- [4] Yang, Y. S. and Hsieh, S. H. (1997). "Some Experiences on Parallel Finite Element Computations Using IBM/SP2," *Proceedings of The 7th KAIST-NTU-KU Tri-Lateral Seminar/Workshop on Civil Engineering*, Dec. 1-3, 1997, Kyoto University, Kyoto, Japan, pp.63-68.
- [5] Vanderstraeten, D., Farhat, C., Chen, P. S., Keuning, R., and Ozone, O. (1996). "A Retrofit Based Methodology for the Fast Generation and Optimization of Large-Scale Mesh Partitions: Beyond the Minimum Interface Size Criterion," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*,

Vol.133, pp.25-45.

- [6] Message Passing Interface Forum (1994). "MPI: A Message-Passing Interface Standard," *International Journal of Supercomputer Applications*, Vol.8, No.3/4, pp.159-416.
- [7] 謝尚賢, 楊元森, 與鄭維中 (1998). "物件導向平行有限元素計算環境之發展研究," 國科會專題研究計畫成果報告, 計畫編號: NSC 87-2211-E-002-034.
- [8] Lu, J. (1994). "FE++: An Object-Oriented Application Framework for Finite Element Programming," Proceedings of the 2nd Annual Object-Oriented Numerics Conference, pp.438-447, Sunriver, OR.
- [9] Mukunda, G. R., Sotelino, E. D. and Hsieh, S. H. (1998). "Distributed Finite Element Computations Using Object-Oriented Techniques," *Engineering with Computers*, Vol.14, No.1, pp.59-72.
- [10] Karypis, G. and Kumar, V. (1995). "METIS: Unstructured Graph Partitioning and Sparse Matrix Ordering Version 2.0," Technical report, Department of Computer Science, University of Minnesota, MN, USA.
- [11] Liu, J. W. H. (1985). "Modification of The Minimum-Degree Algorithm by Multiple Elimination," *ACM Transactions on Mathematical Software*, Vol.11, No.2, pp.141-153.
- [12] George, A. (1973). "Nested Dissection of a Regular Finite Element Mesh," *SIAM Journal on Numerical Analysis*, Vol.10, pp.345-363.
- [13] Ashcraft, C., Pierce, D., Wah, D. K. and Wu, J. (1999). "The Reference Manual for SPOOLES, Release 2.2: An Object Oriented Software Library for Solving Sparse Linear Systems of Equations," Technical report, Boeing Shared Services Group, USA.
- [14] Hsieh, S. H., Yang, Y. S. and Tsai, P. L. (1999). "Improved Mesh Partitioning For Parallel Finite Element Computations," *Proceedings of the 7th East Asia-Pacific Conference on Structural Engineering and Construction*, Aug. 27-29, 1999, Kochi, Japan.



圖 1 本研究建立之個人電腦叢集系統

表 1 個人電腦叢集測試比較結果

網 格 名 稱	IBM/SP2 (66MHz) (RST, Np=4)		個人電腦叢集(P II 350) (RST, Np=4)	
	各處理器靜態濃縮總時間(秒)	平行計算時間(秒)	各處理器靜態濃縮總時間(秒)	平行計算時間(秒)
M12BD	5.4	11.4	2.5	7.8
BLADE	111.1	117.2	67.5	64.4
20STORY01	91.6	148.4	75.2	88.7
C-BUILDIN	50.4	50.4	36.1	32.5
E-BUILDIN	61.8	68.7	45.7	43.6
總計	320.3	396.1	227.0	241.0

表 2 NSC87 與 FE2000 之測試比較結果

網 格 名 稱	NSC87		FE2000	
	循序計算	平行計算 (RST,Np=4)	循序計算	平行計算 (RST,Np=4)
M12BD	13.3	7.8	6.3	2.6
BLADE	100.1	64.4	82.1	51.7
20STORY01	76.5	88.7	51.5	69.3
C-BUILDIN	48.7	32.5	30.8	21.0
E-BUILDIN	61.4	43.6	39.1	29.7
總計	300.0	241.0	209.8	178.3

表 3 網 格 分 割 疊 代 機 制 測 試 比 較 結 果

網 格 名 稱	平行子結構分析時間(秒)	
	未採用 (僅使用 METIS)	採用此機制
BLADE (Np=4)	67.4	45.4
E30STORY (Np=4)	89.4	64.5
總計	156.8	109.9

表 4 各 種 子 結 構 結 點 重 排 法 比 較

網 格 名 稱	平行子結構靜態濃縮總時間(秒) (使用 RST 法分割為 4 個子結構)			
	MMD (METIS)	MMD (SPOOLES)	ND (METIS)	MSMD (SPOOLES)
M12BD	2.2	2.5	3.0	2.3
BLADE	61.5	76.2	49.9	48.6
20STORY01	48.1	49.1	60.4	38.4
C-BUILDIN	30.0	29.7	30.3	22.2
E-BUILDIN	33.5	36.0	39.5	28.8
總計	175.3	193.5	183.1	140.3

表 5 同 時 採 用 網 格 分 割 疊 代 機 制 與 MSMD 子 結 構 重 排 法 之 測 試 結 果

網 格 名 稱	平行子結構分析時間(秒)	
	未採用 (僅使用 METIS)	採用此二法
BLADE (Np=4)	67.4	38.4
E30STORY (Np=4)	89.4	59.6
總計	156.8	98.0