行政院國家科學委員會專題研究計畫成果報告

非線性含水層地下水流之序率分析

Stochastic Analysis of Nonlinear Groundwater Flow Equation in Unconfined Aquifers

計畫編號： NSC 88-2611-E-002-033

執行期限：87 年 8 月 1 日至 88 年 7 月 31 日

主持人：林國峰　　國立台灣大學土木工程學系

E-mail Address: gflin@ce.ntu.edu.tw

一、中文摘要

含水層的自然地質構造皆為異質性，因此其水力特性呈現空間變異性。往昔在異質性含水層地下水流之序率分析，一般大多拘限在分析線性化或線性之地下水流方程式。而目前仍未有對於在有限域地下水流偏微分方程中，將邊界條件與流通係數等兩項為序率過程之相關研究，故本研究考慮恒定一維水深平均之非拘限含水層地下水流偏微分方程之邊界條件為序率過程，引用解構法可保留方程式中非線性之優點，推導地下水流偏微分方程式之近似解，並以頻譜與雙頻譜分析方法之概念，研究方程式中邊界條件與流通係數等擾動項與地下水水頭擾動之間的交互影響，進而分別假設各擾動項之序率過程，推導地下水水頭頻譜與雙頻譜在頻率空間上的表示式，並計算和分析對地下水水頭所造成的影響。提供邊界條件與流通係數等項擾動與地下水水頭擾動在統計特性上的關係，並提供各擾動項對地下水水頭擾動所造成的影響。

關鍵詞：異質性含水層、地下水流、序率偏微分方程、頻譜與雙頻譜法

Abstract

Natural geological formations of aquifers are heterogeneous and hence their hydraulic properties have spatial variability. Previous researches on stochastic analysis of groundwater flow in heterogeneous aquifers is linear or can be linearized groundwater flow equation. So far, there are no researches on the stochastic analysis of groundwater flow in finite domain. In this research, we consider a one-dimensional steady groundwater flow equation in a unconfined aquifer. The boundary conditions and transmissivity are regarded as stochastic processes. The decomposition method is used to derive an approximate solution of the governing equation. Spectrum and bispectrum analyses are then used to investigate the interactions between the fluctuations of the aforementioned four stochastic processes and the fluctuation of the hydraulic head. Furthermore, by assuming the forms of the four stochastic processes, the spectrum and bispectrum of the hydraulic head are derived. The influence of the fluctuations of the four stochastic processes on the hydraulic head are also analyzed.

Keywords: Heterogeneous aquifer, groundwater flow, stochastic partial differential equation, spectrum and bispectrum

二、緣由與目的

往昔在含水層的自然地質構造皆為異質性(heterogeneous)，因此其水力特性呈現空間變異性(spatial variability)。往昔在異質性含水層地下水流之序率分析，一般大都

拘限在分析線性化或線性之地下水流方程式。而目前仍未有對於在有限域(finite domain)、恒定地下水流偏微分方程中，假設邊界條件與流通係數等兩項為序率過程之相關研究，故本研究考慮恒定之非拘限含水層地下水流偏微分方程之邊界條件與流通係數等兩項為序率過程，研究方程式中各擾動項與地下水水頭擾動在頻率空間上(frequency domain)的相關性。以期能夠提供邊界條件與流通係數等擾動與地下水水頭擾動在統計特性上的關係，並分別假設各擾動項之序率過程，進而推導地下水水頭頻譜與雙頻譜之表示式，並計算和分析各擾動項對地下水水頭所造成的影響。

在過去傳統的研究中，經常以解析方法[22, 24]或是數值方法[8, 10, 14, 30, 31]獲得地下水偏微分方程式的解。但是真實地下水流受到大尺度空間和時間上的影響，不容易利用局部的水井、鑽探或其它的水文觀測方式，詳細得知方程式中參數(例如水力傳導係數、貯蓄係數)的空間分布，以及補注在空間和時間上的分布，進而直接描述其行為。因此一般皆將局部的參數觀測值視為在整個觀測區域內方程式參數的平均值。但是藉由序率偏微分方程式的分析，將方程式參數視為序率過程，可以較充份的掌握並了解大尺度地下水流的特性。此外 Serrano [25] 和本計畫主持人[17, 18, 19]曾利用泛函分析理論(functional analysis)並考慮不同參數間的不確定性，進而探討地下水偏微分方程式之序率解。此外，本計畫主持人亦曾以頻譜與雙頻譜方法研究一非拘限滲漏含水層非線性特性之研究[15, 16]。

早期引用序率方法研究地下水流問題有 Freeze [4] 與 Smith and Freeze [27] 引入 Monte Carlo 方法模擬有限域均質含水層中的一維地下水流。其中考慮水力傳導係數和地下水水頭為空間上的序率過程，進一步對地下水水頭的一階和二階動差做初步的研究。Delhomme [2] 和 Warrick [34] 對不同含水層以及土壤之水力性質進行統計上的研究。而考慮空間變異性的序率分析，都專注於恒定的研究[1, 3, 7, 13, 20, 33]，其中 Bakr et al. [1] 和 Mizell et al., [20] 皆考慮水力傳導係數和地下水水頭為空間上的序率過程，並研究無限域地下水流序率偏微分方程，其不同點在於 Bakr [1] 應用於一維與三維，而 Mizell [20] 應用於二維。Gutjahr 與 Gelhar [6] 考慮水力傳導係數為空間上的序率過程，以一階近似的方法解一維地下水流偏微分方程，並指出邊界條件影響的重要。Dikow [3] 、Van Lent 與 Kitanidis [33] 和 Li 與 McLaughlin [13] 研究邊界對地下水水頭所造成的影響，其中考慮地下水水頭為空間變數。而 Naff 與 Vecchia [22] 和 Rubin 與 Dagan [24] 應用頻譜分析(spectral analysis)進行研究，但上述不恒定的研究都考慮在無限域中進行分析，亦即不考慮邊界對地下水流所造成的影響。此外觀察前述對於空間變異性問題的研究可以發現，前人常引用頻譜分析對此類問題進行分析[1, 3, 13, 20, 22, 24, 33]。

一具有高斯分布的序率過程，輸入非線性的地下水流系統後，其輸出通常不再具有高斯分布的性質。因此需藉由非線性濾網的頻譜分析(spectral analysis of nonlinear filter)的協助，進一步了解不確定性因子之間相互影響的現象。而考慮以頻譜與雙頻譜方法曾應用於對大都引用集塊水平衡模式 (lumped-parameters water-balance model)，針對時間變異性(time-variability)的問題進行非線性特性的研究。其中 Jin 與 Duffy [9] 皆考慮河川水位，補注、以及含水層水位為序率過程，分析河川－含水層反應的積分平衡模式(integral balance model for stream-aquifer response)，亦即考慮方程式之參數為時間分布的地下水流偏微分方程，其方程式本身不考慮方程式之參數在空間上對地下水流系統的影響。

綜觀上述，前人考慮邊界條件與流通係數等兩項為序率過程之恒定有限域非線性之地下水流偏微分方程方面的研究仍有不足。因此本研究考慮流通係數與地下水水頭為空間上的序率過程；而地下水補注量皆為空間上的序率過程，引用解構法可保

留方程式中非線性之優點，推導序率地下水流偏微分方程式之近似解，並以頻譜與雙頻譜分析方法之概念，研究方程式中邊界條件與流通係數等擾動項與地下水水頭擾動之間的交互影響，進而分別假設各擾動項之序率過程，推導地下水水頭頻譜與雙頻譜在頻率空間上的表示式，並計算和分析對地下水水頭所造成的影響。提供邊界條件與流通係數等項擾動與地下水水頭擾動在統計特性上的關係，並提供各擾動項對地下水水頭擾動所造成的影響。

三、研究方法及內容

本研究首先考慮一維線性地下水流方程式，其方程式可表示為

$$\frac{d}{dt}\left(K(x)\frac{dh}{dx}\right)=0 \tag{1}$$

其中 $h=h(\mathrm{x},\omega)$ 為地下水水頭 [L]，$K=K(\mathrm{x},\omega)$ 為含水層流通係數$[L^2/T]$，ω為隨機變數。將(1) 式重新整理後可得

$$L_x h=-\frac{d\mathrm{Ln}K}{dx}\frac{dh}{dx}=-\frac{dY}{dx}\frac{dh}{dx} \tag{2}$$

其中 $L_x=d^2/dx^2$，假設流通係數為對數常態分布，即可令 $\mathrm{Ln}K=Y$。引用解構法將(2)式分解為一無限級數之表示式

$$L_x h=L_x\left(h_0+h_1+h_3+\cdots\right) \tag{2}$$

其各項可表示為

$$h_0=L_x^{-1}f(x) \tag{3}$$

$$L_x h_n=-\frac{dY}{dx}\frac{dh_{n-1}}{dx}\quad ,\ n\geq 1 \tag{4}$$

其中 $L_x^{-1}=\iint_\Omega(\cdot)$，Ω為地下水邊界，$L_x^{-1}f(x)$可視為僅受邊界條件影響之空間函數。若地下水邊界皆為河川水位H_2與H_1，則h_0可表示為$L_x^{-1}f(x)=ax+b$，其中$a=(H_2-H_1)/l$及$b=H_1$。Serrano [26] 曾於研究中指出地下水水頭前三項之總和已相當逼近真值，因此本研究針對其前三項之總和加以討論，並假設$Y(x,\omega)=\bar{Y}(x)+Y'(\omega)$，其中$\bar{Y}$為$Y$之期望值，$Y'$為一均值為零的常態分布隨機擾動項。(2)式中第二項h_1與第三項h_2分別可表示為

$$L_x h_1=-\frac{d\bar{Y}}{dx}\frac{dh_0}{dx}-\frac{dY'}{dx}\frac{dh_0}{dx} \tag{5}$$

$$\begin{aligned}L_x h_2&=-\frac{d\bar{Y}}{dx}\frac{dh_1}{dx}-\frac{dY'}{dx}\frac{dh_1}{dx}\\&=-\frac{d\bar{Y}}{dx}\frac{d^2\bar{Y}}{dx^2}\frac{dh_0}{dx}-\left(\frac{d\bar{Y}}{dx}\right)^2\frac{d^2h_0}{dx^2}\\&\quad-\frac{dY'}{dx}\frac{d^2Y'}{dx^2}\frac{dh_0}{dx}-\left(\frac{dY'}{dx}\right)^2\frac{d^2h_0}{dx^2}\end{aligned} \tag{6}$$

由(5)式及(6)式顯示$L_x h_1$與$L_x h_1$皆可表示為h_0、$\bar{Y}$及Y'之函數，假設h_0為一定率函數，即邊界條件為定率或針對無限域討論之，則$L_x h_1$與$L_x h_1$之不確定性僅受到Y'不確定性項之影響。進而對(5)式及(6)式取期望值可得

$$L_x\langle h_1\rangle=-\frac{d\bar{Y}}{dx}\frac{dh_0}{dx} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}L_x\langle h_2\rangle=&-\frac{d\bar{Y}}{dx}\frac{d^2\bar{Y}}{dx^2}\frac{dh_0}{dx}-\left\langle\frac{dY'}{dx}\frac{d^2Y'}{dx^2}\right\rangle\frac{dh_0}{dx}\\&-\left(\frac{d\bar{Y}}{dx}\right)^2\frac{d^2h_0}{dx^2}-\left\langle\left(\frac{dY'}{dx}\right)^2\right\rangle\frac{d^2h_0}{dx^2}\end{aligned} \tag{8}$$

其中$\langle\cdot\rangle$表示其期望值。若$\bar{Y}$為一常數，則(7)式為零，即表示$L_x\langle h\rangle=L_x\left(h_0+\langle h_2\rangle\right)$。若$\bar{Y}$為一線性趨勢(linear trend)，即$\bar{Y}=m+\lambda\cdot x$。則(7)式及(8)式可表示為

$$L_x\langle h_1\rangle=-\lambda\cdot\frac{dh_0}{dx} \tag{9}$$

$$L_x\langle h_2\rangle=-\left\langle\frac{dY'}{dx}\frac{d^2Y'}{dx^2}\right\rangle\frac{dh_0}{dx}-\lambda^2\frac{d^2h_0}{dx^2}$$
$$-\left\langle\left(\frac{dY'}{dx}\right)^2\right\rangle\frac{d^2h_0}{dx^2}$$
$$=-\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2C_Y}{dx^2}\right)\cdot\frac{dh_0}{dx}-\lambda^2\cdot\frac{d^2h_0}{dx^2} \tag{10}$$
$$-\frac{d}{dx}\left(\frac{dC_Y}{dx}\right)\frac{d^2h_0}{dx^2}$$

其中 C_Y 為 Y' 之共變方(covariance function)。若地下水邊界皆為河川水位，即 $h_0=ax+b$，則(8)式等號左邊第三項即第四項皆為零，而(10)式等號左邊第二項即第三項皆為零。進而地下水頭擾動項之二階微分可表示為

$$L_xh'=L_x\left(h-\langle h\rangle\right)$$
$$=L_x\left[\left(h_1-\langle h_1\rangle\right)+\left(h_2-\langle h_2\rangle\right)\right] \tag{11}$$

其中 h' 為地下水頭擾動項。本研究引用頻譜與雙頻譜法，假設 h' 保持定常性(stationary)至第三階，並且微擾項均值為0。則地下水頭擾動項之二階微分可表示為 $L_xh'=\varepsilon L_xh^{(1)}+\varepsilon^2L_xh^{(2)}$，則(11)式可分解為一階及二階微擾方程式，

$$\varepsilon:\ L_xh^{(1)}=\left(\frac{dY^{(1)}}{dx}+\frac{dY^{(1)}}{dx}A'+A\frac{d^2Y^{(1)}}{dx^2}\right)J$$
$$+2A\frac{dY^{(1)}}{dx}J' \tag{12}$$

$$\varepsilon^2:\ L_xh^{(2)}=\left(\frac{dY^{(1)}}{dx}\frac{dY^{(1)}}{dx}-\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2C_Y}{dx^2}\right)\right)J$$
$$+\left(\left(\frac{dY^{(1)}}{dx}\right)^2-\frac{d}{dx}\left(\frac{dC_Y}{dx}\right)\right)J' \tag{13}$$

其中(12)式及(13)式分別為一階及二階微擾方程式，其上標(1)與(2)表示一階及二階微擾參數。 $\varepsilon Y^{(1)}=\varepsilon Y'$，$A=d\overline{Y}/dx$，$J=-dh_0/dx$，$(\cdot)'$ 為一階微分。A 與 J 可視為定率函數。引用統計上之操作可推導出(12)式及(13)式之頻譜表示式

$$dZ_{h^{(1)}}=\frac{-(i+iA'-\omega A)J-2iAJ'}{\omega}dZ_Y \tag{14}$$

和

$$dZ_{h^{(2)}}=\left(i\omega J-J'\right)\left(dZ_YdZ_Y-\langle dZ_YdZ_Y\rangle\right) \tag{15}$$

若 $\overline{Y}$ 為一常數，即 $A=A'=0$，則(14)式可化簡為 $dZ_{h^{(1)}}=-iJdZ_Y/\omega$，此一結果與 Gelhar [5] 之研究結果相同。$\overline{Y}$ 為一線性趨勢(linear trend)，即 $A=0$ 而且 $A'=\lambda$，則(14)式可化簡為 $dZ_{h^{(1)}}=-i(1+\lambda)JdZ_Y/\omega$。由於 $\overline{Y}$ 並未假設為一非線性趨勢(nonlinear trend)或者為二次以上之多項式，故(15)式不受 $\overline{Y}$ 之影響。

經由繁複之推導即可藉由(14)式及(15)式推導出線性與二次(quadratic)頻率反應函數(frequency response function, FRF)。進一步因 Y' 一般假設為常態機率分布，此分布具有無偏態之特性。故可藉由二次頻率反應函數及 Y' 之共變方推導出地下水頭之雙頻譜及偏態分布。同理其地下水水頭之變方、偏態(skewness)，頻譜和雙頻譜可推導而得。

此外，由於 Y' 可視為一高斯過程之輸入項，因此進入非線性的地下水系統後，其輸出項為一非高斯過程(non-Gaussion process)，即地下水水頭機率分布具有偏態的特性。因本文篇幅有限其結果及相關討論分析不在此贅述。

本研究亦考慮含水層受制於地下水補注，並假設該含水層之自由水表面為大氣壓力，則代表該含水層之一維地下水流方程式可表示為

$$\frac{d}{dt}\left(K(x)\frac{dh}{dx}\right)=I \tag{16}$$

(1)式及(16)式皆為線性方程式，而且

輸入項為機率分布不具有偏態之高斯過程，但是受到邊界條件之影響，使得地下水水頭機率分布具有偏態之特性。

進一步本研究為分析非拘限含水層之非線性之現象，即針對代表該含水層之一維地下水流方程式進行分析，其方程式可表示為

$$\frac{d}{dt}\left(K(x)h\frac{dh}{dx}\right)=I \qquad (17)$$

(17)式為非線性之方程式，Serrano[26]已就定率部分之非線性特性進行研究，並與微擾法討論比較。而本文進一步就序率部分進行研究。

四、結果與討論

本研究依上述方法分別考慮不同之地下水方程式，建立各擾動項與地下水水頭擾動之間的線性與二次(quadratic)頻率反應函數(frequency response function, FRF)之關係外，並引用Y'為常態機率分布之假設，將各擾動項視為高斯過程(Gaussian process)，其地下水水頭之變方、偏態(skewness)，頻譜和雙頻譜皆已藉由二階微擾法及統計上之操作推導得知。由本研究得知(1)式及(16)式皆為線性方程式，而且輸入項為機率分布不具有偏態之高斯過程，但是受到邊界條件之影響，使得地下水水頭機率分布具有偏態之特性。

四、計畫成果自評

本計畫執行期限自 87 年 8 月 1 日至 88 年 7 月 31 日止，引用解構法，引用解構法可保留方程式中非線性之優點，推導地下水流偏微分方程式之近似解，並以頻譜與雙頻譜分析方法之概念，研究方程式中邊界條件與流通係數等擾動項與地下水水頭擾動之間的交互影響，進而分別假設各擾動項之序率過程，推導地下水水頭頻譜與雙頻譜在頻率空間上的表示式，並計算和分析對地下水水頭所造成的影響。提供邊界條件與流通係數等項擾動與地下水水頭擾動在統計特性上的關係，並提供各擾動項對地下水水頭擾動所造成的影響。

研究中假設各不確定性項之雖機過程，對地下水流系統之交互影響有深入之定性及定量分析。本研究預期達成分析各擾動項對地下水頭之影響，並給予各擾動項適當之假設，以研究地下水流系統非線性之現象。目前皆已達成預期之目標。

五、參考文獻

[1] Bakr, A. A., L. W. Gelhar, A. L. Gutjahr, and J. R. McMillan, *Stochastic analysis of spatial variability in subsurface flow, 1, Comparison of one- and three-dimensional flow*, Water Resour. Res., 14(2), pp. 263-272, 1978.

[2] Delhomme, J. P., *Spatial variability and uncertainty in groundwater flow parameter: A geostatistical approach*, Water Resour. Res., 15(2), pp. 269-280, 1979.

[3] Dikow, E., *Stochastic analysis of groundwater flow in bounded domain by spectral method, Transp. Porous Media*, 3, pp. 173-184, 1988.

[4] Freeze, R. A., *A stochastic-conceptual analysis of one-dimensional groundwater flow in non-uniform, homogeneous media*, Water Resour. Res., 11(5), pp. 725-741, 1975.

[5] Gelhar, L. W., *Stochastic analysis of phreatic aquifers*, Water Resour. Res., 10(3), pp. 539-545, 1974.

[6] Gelhar, L. W., P. Y. Ko, H. H. Kwai, and J. L. Wilson, *Stochastic modeling of groundwater systems*, Parsons Laboratory Report 189, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, 1974.

[7] Gutjahr, A. L., and L. W. Gelhar, *Stochastic models of subsurface flow: infinite versus finite domain and stationary*, Water Resour. Res., 17(2), pp. 337-350, 1981.

[8] Hwang, J. S., C. J. Chen, M. *Sheikhoslami, and B. K. Panigrahi, Finite analytic solution for two-dimensional groundwater solute transport*, Water Resour. Res., 21(9), pp. 1354-1360, 1985.

[9] Jin, M., and C. J. Duffy, *Spectral and bispectral analysis for single- and multiple-input nonlinear phreatic aquifer systems*, Water Resour. Res., 30(7), pp. 2073-2095, 1994.

[10] Kirkham, D., and W. L. Powers, *Advanced Soil Physics*, Wiley-Interscience, New York, 1971.

[11] Kuiper, L. K., *Analytical solution of spatial discretized groundwater flow equations*, Water Resour. Res., 9(4), pp. 1094-1097, 1984.

[12] Kusmulyono, A., and I. Goulter, *Computational*

aspects in use of entropy theory in predicting water quality levels at discontinued station, Stochastic hydrol. hydraul., 9, pp. 215-237, 1995.

[13] Li, S.-G., and D. McLaughlin, *A nonstationary spectral method for solving stochastic groundwater problems: Unconditional analysis*, Water Resour. Res., 27(7), pp. 1589-1605, 1991.

[14] Leggett, J. A., and P. L-F. Liu, *The Boundary Integral Equation Method for Porous Media Flow*, George Allen and Unwin, London, 1983.

[15] Lin, G. F. and C. M. Chen, *Spectral and Bispectral Analysis for Nonlinear Phreatic Aquifer Systems Subject to Time Variable Iinputs*, Proceedings of the 25th ASCE Aunnual WRPM conference, Chicago, U.S., pp. 680-685, 1998.

[16] Lin, G. F. and C. M. Chen, *Stochastic analysis of nonlinear groundwater flow equation subject to random recharge and boundary conditions*, Proceedings of 11th Congress of the Asian and Pacific Division of the International Association for Hydraulic Reseach, Yogtakarta, Indonesia, pp. 165-174, 1998.

[17] Lin, G. F., P. K. Lin and Y. M. Wang, *Analysis of a Stochastic Groundwater Flow Problem*, Proceedings of the Third NTU-KU-KAIST Tri-Lateral Seminar/Workshop on Civil Engineering, Taejon, Korea, pp. 17-18, Sept., 1993.

[18] Lin, G. F., P. K. Lin and Y. M. Wang, *Analysis of a Random Groundwater Table in a Unconfined Aquifer*, Proceedings of the Fourth KAIST-NTU-KU, Tri-Lateral Seminar/ Workshop on Civil Engineering, Kyoto Univ., Kyoto, Japan, pp. 243-248, 1994.

[19] Lin, G. F., Y. M. Wang and P. K. Lin, *Stochastic Analysis of Unsteady one-dimensional Flow in a Unconfined Aquifer* , J. of the Chinese institute of Civil and Hydraulic Engineering, 8(3), pp. 387-395, 1996.

[20] Mizell, S. A., A. L. Gutjahr, and L. W. Gelhar, *Stochastic analysis of spatial variability in two-dimensional steady groundwater flow assuming stationary and nonstationary head*, Water Resour. Res., 18(4), pp. 1053-1067, 1982.

[21] Muskat, M., *The Flow of Homogeneous Fluids Through Porous Media*, McGraw-Hill, Ann Arbor, 1937.

[22] Naff, R. L., and A. V. Vecchia, *Stochastic analysis of three-dimensional flow in bounded domain*, Water Resour. Res., 22(5), pp. 695-704, 1986.

[23] Polubarinova-Kochina, P. Y., *Theory of Groundwater Movement*, (translated by T. M. R. De Wiest), Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1962.

[24] Rubin, Y., and G. Dagan, *Stochastic analysis of boundary effects on head spatial variability in heterogeneous aquifer, 2, Impervious boundary*, Water Resour. Res., 25(4), pp. 707-712, 1989.

[25] Serrano, S. E., and T. E. Unny, *Semigroup solutions to stochastic unsteady groundwater flow subject to random parameters*, Stochastic hydrol. hydraul., 1(4), pp. 281-296, 1987.

[26] Serrano, S. E., *Analytical solutions of the nonlinear groundwater flow equation in confined aquifers anf the effect of heterogeneity*, Water Resour. Res., 31(11), pp. 2733-2742, 1995.

[27] Smith, L., and R. A. Freeze, *Stochastic analysis of steady groundwater flow in a bounded domain, 1 One-dimensional simulations*, Water Resour. Res., 15(3), pp. 521-528, 1979.

[28] Smith, S. S., and M. B. Allen, *The finite layer method for groundwater flow models*, Water Resour. Res., 28(6), pp. 1715-1722, 1992.

[29] Strack, O. L., and H. M. Haitjema, *Modeling double aquifer flow using a comprehensive potential and distributed singularity, 1, Solution for inhomogeneous permeabilities*, Water Resour. Res., 17(5), pp. 1535-1549, 1981a.

[30] Strack, O. L., and H. M. Haitjema, *Modeling double aquifer flow using a comprehensive potential and distributed singularity, 2, Solution for inhomogeneous permeabilities*, Water Resour. Res., 17(5), pp. 1551-1560, 1981b.

[31] Sudicky, E. A., *The Laplace transform Galerkin technique: A time-continuous finite element theory and application to mass transport in groundwater*, Water Resour. Res., 25(8), pp. 1833-1846, 1989.

[32] Van der Veer, P., *Calculation Method for Two-Dimensional Groundwater Flow*, Ph.D. Thesis, Delft University of Technology, Delft, The Netherlands, 1978.

[33] Van Lent, J., and P. K. Kitanidis, *A numerical spectral approach for the derivation of piezometric head covariance functions*, Water Resour. Res., 25(11), pp. 2287-2298, 1989.

[34] Warrick, A. W., and D. R. Nielson, *Spatial variability of soil physical properties in the field, In Application in Soil Physicals*, edited by D. Hillel, pp. 319-344, Academic Press, New York, 1980.