

塑性之偽歐空間群論與實驗 (1/3)

A study of plasticity by groups on pseudo-Euclidean spaces and experiments (1/3)

計劃編號: NSC 89-2211-E-002-032

執行期限: 88.08.01—89.07.31

計劃主持人: 洪宏基 教授

協同主持人: 劉進賢 博士

博士後研究: 蔡孟豪 博士

研究助理: 蕭雅柏 陳勇先 曹長勇

執行機構: 臺灣大學土木工程學研究所

1 中文摘要

關鍵詞: 塑性、偽黎曼流形、特殊偽線性群、軸扭雙向循環實驗、收縮比。

本計畫將彈性完全塑性模式應用於實驗上常用的軸扭雙向控制問題, 利用偽黎曼流形群論研究彈塑性組成模式的初值問題。將此高度非線性的問題, 轉換成擬線性微分方程組, $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}(\mathbf{X}, t)\mathbf{X}$, $\mathbf{A} \in sl(2, 1, \mathbb{R})$ 是特殊偽線性群的局部李代數, 作用在局部偽歐空間 $\mathbb{E}_{2,1}^3$ 的偽黎曼流形上。根據特殊偽線性群的基本性質, 我們發展高精度保持群結構的算法, 得出軸向應力、剪切應力、徑向應變及環向應變的響應。

實驗方面使用 MTS809 軸扭試驗機及油壓式加內壓機, 配合實心及中空薄壁試桿進行鋁 7075 及不銹鋼 316 的軸向與軸扭雙向循環實驗。並進一步探討變率收縮比及全收縮比, 在不同初始應力條件及相同比例加應變條件下的歷時變化, 實驗所給定的初始條件, 確實會使得後續路徑所量得的收縮比超過 1/2, 變率收縮比甚至會超過 1.0。

2 英文摘要

Keywords: plasticity, pseudo-Riemann manifold, special pseudo-linear group, axial-torsional cyclic test, contraction ratio.

The project employed a group-theoretical approach to investigate constitutive models of elastoplasticity. In the axial-torsional test, the hoop and radial strains are usually not known a priori; hence, in the constitutive model simulation of the responses they can not be viewed as inputs. This greatly complicates the constitutive analyses because the resulting differential constitutive equations become highly nonlinear. To

tackle this difficulty we convert the highly nonlinear axial-torsional problem of perfect elastoplasticity to a quasi-linear system $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}(\mathbf{X}, t)\mathbf{X}$, where $\mathbf{A}(\mathbf{X}, t) \in sl(2, 1, \mathbb{R})$ is a local Lie algebra of the special pseudo-linear group $SL(2, 1, \mathbb{R})$. The underlying space of this problem is found to be a pseudo-Riemann manifold which is locally pseudo-Euclidean space $\mathbb{E}_{2,1}^3$ with the metric indefinite and also dependent on the time component. Utilizing the internal symmetry group, we can consequently develop a highly accurate group-preserving scheme, which guarantees the fulfillment of the consistency condition in every time marching of the calculations.

The axial-torsional test equipment MTS809 of the NTU College of Engineering and the pressure control machine was used to study the cyclic and ratchetting behavior of tubular specimens of Al-7075 and stainless steel 316.

We also studied contraction ratios experimentally, one *rate form* and one *total form* under different initial values of the specimens. The values of both contraction ratios may be greater than 1/2. Moreover, for some cases we found that the rate form contraction ratio exceeds the value 1.

3 計劃緣由與目的

中空薄壁試桿, 見圖一, 是相當理想適合於雙軸扭轉拉壓的實驗試桿。一般薄壁試桿可以同時施加軸力 $P(t)$ 及扭力 $T(t)$, 但實驗設備如果裝有迴授控制器, 亦可選擇控制軸長 $Z(t)$ 及相對扭轉角 $\Theta(t)$ 。因此軸扭試桿實驗的初邊值問題, 可包括以下幾

種控制模式：\$(P, T)\$, \$(Z, \Theta)\$, \$(P, \Theta)\$ 及 \$(Z, T)\$。我們通常要求中空薄壁試桿有一段均勻的平行部份，並假設在此平行段有均勻的變形及應力分佈，因此可將困難的初邊值問題，轉化成求解中空薄壁試桿在全應力 \$(\sigma^{zz}, \sigma^{z\theta})\$，或全應變 \$(\epsilon_{zz}, \epsilon_{z\theta})\$，或混合應力與應變 \$(\sigma^{zz}, \epsilon_{z\theta})\$ 及 \$(\epsilon_{zz}, \sigma^{z\theta})\$ 等控制之下模式的響應問題。

具體地探討彈塑性模式的初邊值問題，除了在計算力學上的重要性外，也有助於識別方法的建立及改進，對於實驗研究的驗證工作以及工程材料性質試驗步驟實務亦可大大地簡化。實際上對模式的深入瞭解之後，我們發現要將模式具體的應用於模擬實驗的響應，仍存有相當大的問題。若我們不滿意祇用數值求解的方法，對模式的計算方法應深入研究。

本計畫為三年期的研究計畫，今年是執行的第一年，在實驗研究方面主要著重在儀器設備的更新及實驗進行的規劃，同時也進行了相關的實驗工作。

本計畫先採用鋁 7075 及不銹鋼 316 為實驗材料，預定於後續年度中採用低降伏制震鋼及耐火鋼作為實驗材料。鋁 7075 為航空太空工業、汽車工業及建築次要結構的最佳選擇。不銹鋼 316 為許多需要耐蝕、耐氧化特性工業的儲槽、管路、容器的主要材料。低降伏制震鋼及耐火鋼則為目前國內鋼鐵工業，針對建築營建業所開發的新產品，低降伏制震鋼具有低降伏應力特性，適合用在結構耐震元件，具有吸收地震能量的功效。耐火鋼則是為了提昇一般構造鋼在高溫環境時，材料的力學強度不足而開發的產品。

4 研究方法

本研究將彈性完全塑性模式應用於實驗上常用的軸扭控制問題，如圖一。彈性完全塑性模式的數學描述如下：

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}^e + \dot{\epsilon}^p, \quad (1)$$

$$\dot{\sigma} = 2G\dot{\epsilon}^e + \frac{3K - 2G}{3}(\text{tr } \dot{\epsilon})\mathbf{I}, \quad (2)$$

$$\dot{\lambda} \left[\sigma - \frac{1}{3}(\text{tr } \sigma)\mathbf{I} \right] = 2\tau_y \dot{\epsilon}^p, \quad (3)$$

$$\sqrt{\frac{1}{2} \left[\sigma - \frac{1}{3}(\text{tr } \sigma)\mathbf{I} \right] \cdot \left[\sigma - \frac{1}{3}(\text{tr } \sigma)\mathbf{I} \right]} \leq \tau_y, \quad (4)$$

$$\dot{\lambda} \geq 0, \quad (5)$$

$$\dot{\lambda} \sqrt{\frac{1}{2} \left[\sigma - \frac{1}{3}(\text{tr } \sigma)\mathbf{I} \right] \cdot \left[\sigma - \frac{1}{3}(\text{tr } \sigma)\mathbf{I} \right]} = \dot{\lambda} \tau_y. \quad (6)$$

對於軸扭控制問題，經過一些分析得出下列微分方程：

$$\frac{1}{G} \frac{\dot{\sigma}^{11}}{\sqrt{3}} + \frac{\dot{\lambda}}{\tau_y} \frac{\sigma^{11}}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}(\dot{\epsilon}_{11} - \frac{1}{3}\text{tr } \dot{\epsilon}), \quad (7)$$

$$\frac{1}{G} \dot{\sigma}^{12} + \frac{\dot{\lambda}}{\tau_y} \sigma^{12} = 2\dot{\epsilon}_{12}, \quad (8)$$

其中在塑性狀態，

$$\dot{\lambda} = \frac{3\tau_y(E\sigma^{11}\dot{\epsilon}_{11} + 6G\sigma^{12}\dot{\epsilon}_{12})}{E(\sigma^{11})^2 + 9G(\sigma^{12})^2}. \quad (9)$$

若將 \$\dot{\lambda}\$ 代入前面兩個微分方程式，可看出求解是相當困難。另外因為 \$\text{tr } \dot{\epsilon}\$ 是一個未知量，更加深這個問題的複雜度。

在本研究我們利用 \$\text{tr } \dot{\epsilon} = \text{tr } \dot{\sigma} / (3K) = \dot{\sigma}^{11} / (3K)\$ 將方程 (7) 及 (8) 改寫成

$$\frac{\dot{\sigma}^{11}}{\sqrt{3}} + (1 - \eta) \frac{\dot{\lambda}}{\tau_y} \frac{\sigma^{11}}{\sqrt{3}} = (1 - \eta)G(\sqrt{3}\dot{\epsilon}_{11}), \quad (10)$$

$$\dot{\sigma}^{12} + \frac{\dot{\lambda}}{\tau_y} \sigma^{12} = G(2\dot{\epsilon}_{12}). \quad (11)$$

降伏條件為

$$\left(\frac{\sigma^{11}}{\sqrt{3}} \right)^2 + (\sigma^{12})^2 = \tau_y^2. \quad (12)$$

在此

$$\gamma_y := \frac{\tau_y}{G} > 0 \quad (13)$$

為剪切降伏工程應變，

$$\eta := \frac{1 - 2\nu}{3}, \quad 0 \leq \eta < 1, \quad (14)$$

為可壓縮指標。

考慮以下變數轉換

$$\begin{bmatrix} \frac{\sigma^{11}}{\sqrt{3}\tau_y} \\ \frac{\sigma^{12}}{\tau_y} \end{bmatrix} = \mathbf{T}(\lambda) \begin{bmatrix} Q^1 \\ Q^2 \end{bmatrix}, \quad (15)$$

其中 \$\mathbf{T}(\lambda)\$ 是待求的 \$2 \times 2\$ 矩陣，為 \$\lambda\$ 的函數。因此方程 (10) 及 (11) 變成

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} Q^1 \\ Q^2 \end{bmatrix} + \left(\dot{\lambda} \mathbf{T}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1-\eta}{\gamma_y} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\gamma_y} \end{bmatrix} \mathbf{T} + \mathbf{T}^{-1} \dot{\mathbf{T}} \right) \\ \begin{bmatrix} Q^1 \\ Q^2 \end{bmatrix} = \mathbf{T}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}(1-\eta)\dot{\epsilon}_{11}}{\gamma_y} \\ \frac{2\dot{\epsilon}_{12}}{\gamma_y} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (16)$$

若令

$$\dot{\lambda} \mathbf{T}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1-\eta}{\gamma_y} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\gamma_y} \end{bmatrix} \mathbf{T} + \mathbf{T}^{-1} \dot{\mathbf{T}} =: \frac{\dot{\lambda}}{\rho} \mathbf{I}_2, \quad (17)$$

則方程 (16) 化為

$$\dot{\mathbf{Q}} + \frac{\dot{\lambda}}{\rho} \mathbf{Q} = \dot{\mathbf{q}}, \quad (18)$$

其中

$$\mathbf{Q} := \begin{bmatrix} Q^1 \\ Q^2 \end{bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{q}} := \mathbf{T}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}(1-\eta)\dot{\epsilon}_{11}}{\gamma_y} \\ \frac{2\dot{\epsilon}_{12}}{\gamma_y} \end{bmatrix}, \quad (19)$$

而 ρ 可為滿足以下條件 $\gamma_y/2(1-\eta) < \rho \leq \gamma_y$ 的任何常數。

由方程 (17) 可得出

$$\mathbf{T}' = \mathbf{B}\mathbf{T}, \quad (20)$$

其中 $'$ 表示對 λ 微分, 而

$$\mathbf{B} := \begin{bmatrix} \frac{1}{\rho} - \frac{1-\eta}{\gamma_y} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\rho} - \frac{1}{\gamma_y} \end{bmatrix}. \quad (21)$$

若 $\mathbf{T}(0) = \mathbf{I}_2$, 由方程 (20) 得出

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \exp\left[\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1-\eta}{\gamma_y}\right)\lambda\right] & 0 \\ 0 & \exp\left[\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\gamma_y}\right)\lambda\right] \end{bmatrix}. \quad (22)$$

降伏條件可以 \mathbf{Q} 表示如下:

$$\mathbf{Q}^t \mathbf{T}^2 \mathbf{Q} = 1. \quad (23)$$

由方程 (18) 及以上條件, $\dot{\lambda}$ 可表成

$$\dot{\lambda} = \frac{\rho \mathbf{Q}^t \mathbf{T}^2 \dot{\mathbf{q}}}{1 - 2\rho \mathbf{Q}^t \mathbf{T} \mathbf{B} \mathbf{T} \mathbf{Q}}. \quad (24)$$

引進內時參數

$$X^0 := \exp\left(\frac{\lambda}{\rho}\right). \quad (25)$$

在塑性時我們導出

$$\frac{\dot{X}^0}{X^0} = \frac{\mathbf{Q}^t \mathbf{T}^2 \dot{\mathbf{q}}}{1 - 2\rho \mathbf{Q}^t \mathbf{T} \mathbf{B} \mathbf{T} \mathbf{Q}}. \quad (26)$$

結果方程 (18) 及 (26) 可改造成

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X}, \quad (27)$$

其中

$$\mathbf{X} := \begin{bmatrix} \mathbf{X}^s \\ X^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X^0 \mathbf{Q} \\ X^0 \end{bmatrix} \quad (28)$$

是增廣應力向量, 並且

$$\mathbf{A} := \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{2 \times 2} & \dot{\mathbf{q}} \\ \frac{\dot{\mathbf{q}}^t \mathbf{T}^2}{1 - 2\rho \mathbf{Q}^t \mathbf{T} \mathbf{B} \mathbf{T} \mathbf{Q}} & 0 \end{bmatrix} \quad (29)$$

是特殊偽線性群 $SL(2, 1, \mathbb{R})$ 的實李代數, 即 $\mathbf{A} \in sl(2, 1, \mathbb{R})$ 。

由方程 (23) 及 (28) 進一步推出

$$\mathbf{X}^t \mathbf{g} \mathbf{X} = 0, \quad (30)$$

其中

$$\mathbf{g} := \begin{bmatrix} \mathbf{T}^2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (31)$$

是偽黎曼流形的度量張量。 $\mathbf{T}(\lambda)$ 利用式 (22) 與 (25) 可表成 $\mathbf{T}(X^0)$, 因此 \mathbf{g} 的具體型式為

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} (X^0)^{2[1-\frac{\rho(1-\eta)}{\gamma_y}]} & 0 & 0 \\ 0 & (X^0)^{2(1-\frac{\rho}{\gamma_y})} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (32)$$

以上的偽黎曼流形局部而言是偽歐空間 $\mathbb{E}_{2,1}^3$ 。

對於彈性完全塑性模式的軸扭雙向控制問題, 我們因此證出其內稟時空結構為偽黎曼流形, 局部而言是偽歐空間 $\mathbb{E}_{2,1}^3$, 其作用群是特殊偽線性群 $SL(2, 1, \mathbb{R})$ 。利用特殊偽線性群的性質, 我們進一步發展保持一致性條件的數值算法, 得出軸向應力、剪切應力、徑向應變及環向應變等歷時響應。同樣的偽黎曼流形架構可推廣, 用在固體力學的初邊值問題上, 探討其內稟時空結構的對稱性, 並利用這些數學結構於具體的問題上, 可得出精度非常高效率非常好的固體力學計算方法。

規劃進行的實驗路徑包括軸向單調拉伸、等振幅循環、變振幅循環、變應變 均值循環等單向循環實驗, 軸扭比例、非等比例、圓形路徑、矩形路徑等雙 向循環實驗, 以及軸扭與內壓三向循環實驗。並考慮不同初始條件對上述實驗路徑的影響。

針對所規劃進行的實驗, 目前已經完成需要的實驗試桿加工程序, 計有鋁 7075 實心試桿 (外徑 8mm)50 支, 中空薄壁試桿 (外徑 25mm, 內徑 22mm)30 支, 不銹鋼 316 實心試桿 (外徑 8mm)50 支, 中空薄壁試桿 (外徑 25mm, 內徑 22mm)30 支。

5 結論與討論

根據理論分析、數值模擬及實驗之結果 [1], 本研究之結論如下:

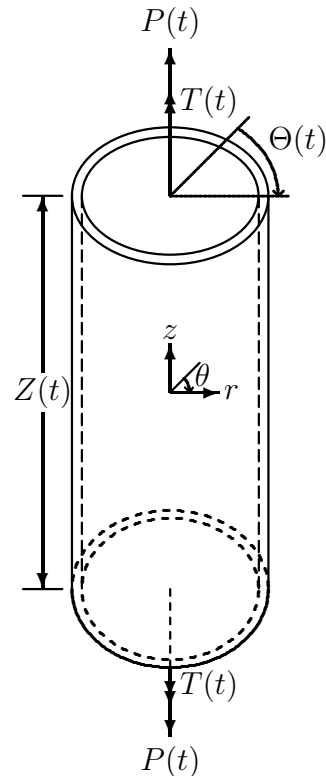
- I. 利用偽黎曼流形群論研究彈塑性組成模式的初值問題。將彈塑性模式軸扭雙向控制問題, 轉換成擬線性微分方程組, $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}(\mathbf{X}, t)\mathbf{X}$, $\mathbf{A} \in sl(2, 1, \mathbb{R})$ 是特殊偽線性群的局部李代數。
- II. 根據特殊偽線性群的基本性質, 我們發展高 精度保持群結構的算法, 得出軸向應力、剪切應力、徑向應變及環向應變的響應。發展保持一致性條件的數值算法, 用在固體力學的初邊值問題計算上精度非常高。

- III. 目前已經完成了高精度實驗控制及資料擷取系統的更新工作，順利採購並測試完成包括 16 位元類比數位訊號傳送及擷取設備，可達到的精度為 $\pm 0.01\%$ ，大幅提昇原有設備精度 10 倍以上，同時穩定度也較原有設備優良。以及利用圖控式程式語言，撰寫實驗控制及資料收集程式，在圖控式程式語言的軟體架構下，由於軟體提供的開發工具齊全，並且採用流程圖式邏輯語法，使得程式撰寫更容易，提供實驗進行的功能更強大，經由實際開發撰寫並測試完成後，目前已經正式成為實驗進行的主要監控中心。
- IV. 截至目前為止 (89 年 5 月) 已完成鋁 7075、不銹鋼 316 及 LYS100 低降伏制震鋼的軸向單調拉伸實驗，測定材料的基本力學性質，另外還有軸向單調拉伸、軸向等振幅循環、軸向變振幅循環、軸扭雙向比例循環、軸扭雙向非比例循環等路徑的實驗。同時也針對不同初始條件，進行了軸扭比例路徑下的收縮比問題實驗研究。
- V. 鋁 7075 的軸向單調拉伸降伏應力為 155MPa，當軸向應變為 12% 時，材料應力逐漸硬化達 250MPa。鋁 7075 等振幅循環的應力與應變關係遲滯圈顯示，鋁 7075 有循環硬化的特性，但是隨即達到飽和的狀態 (圖二)。不銹鋼 316 的軸向單調拉伸降伏應力為 280MPa，當軸向應變為 14% 時，材料應力逐漸硬化達 500MPa。扭向遞增振幅循環實驗的應力與應變遲滯圈，顯示不銹鋼 316 具有明顯循環硬化的現象，當循環應變振幅由小增大時，遲滯圈隨著循環圈數的增加而逐漸變大 (圖三)。軸扭雙向非比例橢圓形路徑 (圖四) 的應力反應，相對於比例直線路徑，會產生更明顯的循環硬化效應 (圖五)。LYS100 低降伏制震鋼的降伏應力為 95MPa，滿足材料開發所設定的目標要求 (低於 100MPa)，極限應力為 265MPa，降伏比為 0.38 (降伏應力與極限應力的比值)，可達的最大塑性應變超過 40%。
- VI. 對於不同初始條件下的收縮比問題，實驗結果顯示應力空間的反應軌跡，兩者在初始應力雖然有一點差距，但是後續的應力變化軌跡非常相似，有相同的最終應力狀態。不同初始條件對於相同的實驗路徑，所得的軸向及剪切應力與應變關係，也非常接近，但是所得到的收縮比隨軸向應變的變化，卻有明顯差異。而且實驗所給定的初始條件，確實會使得後續路徑所量得的收縮比超過 1/2 (這是一般研究文獻假設的上限值) (圖六)，變率收縮比甚至會超過 1.0 (圖七)。

6 參考文獻

1. 洪宏基，劉進賢，蔡孟豪，蕭雅柏，陳勇先，曹長勇，塑性之偽歐空間群論與實驗(1/3)，國科會專題研究計劃成果報告，NSC 89-2211-E-002-032,2000。
2. 洪宏基，劉進賢，蕭雅柏，彈塑性之閔氏時空群論與模式識別實驗(二)，國科會專題研究計劃成果報告，NSC 88-2211-E-002-008,1999。
3. 洪宏基，劉進賢，蕭雅柏，彈塑性之閔氏時空群論與模式識別實驗，國科會專題研究計劃成果報告，NSC 87-2211-E-002-035,1998。
4. 洪宏基，劉進賢，蕭雅柏，彈塑性動態系統分析實驗與識別(二)，國科會專題研究計劃成果報告，NSC 85-2211-E-002-001,1997。
5. 洪宏基，劉進賢，蕭雅柏，王智睿，陳俊佑，彈塑性動態系統分析實驗與識別，國科會專題研究計劃成果報告，NSC 84-2211-E-002-026,1996。
6. 洪宏基，劉進賢，彈塑材料力熱耦合的穩定與破壞研究，國科會專題研究計劃成果報告，NSC 83-0410-E-002-041,1994。
7. 洪宏基，劉進賢，鄧宏達，蕭雅柏，構造鋼受循環負載與衝擊熱之反應，國科會專題研究計劃成果報告，NSC 82-0410-E-002-104,1993。
8. 洪宏基，劉進賢，蕭雅柏，彈塑性材料之應變率效應與溫度效應研究(二)，國防科技發展推行委員會學術合作協調小組委託專題研究計劃成果報告，NSC 82-0405-D-002-024,1995。

7 圖表



圖一 中空薄壁試桿平行段