



# 行政院國家科學委員會專題研究計畫成果報告

塑性之偽歐空間群論與實驗(3/3)

A study of plasticity by groups on pseudo-Euclidean spaces and experiments

NSC 90-2211-E-002-100

90年8月1日至91年7月31日

洪宏基 教授

hkhong@ntu.edu.tw

國立台灣大學土木工程學研究所

## 一、摘要

彈塑性組成模式可用以描述固態系統諸多宏觀現象，如彈塑性、循環塑性、遲滯、摩擦、塑鉸等。這些現象不止存在於材料、也存在於構件、介面、元件，甚至整體結構。

本三年期研究計畫由動態系統學的觀點，研究彈塑性組成模式之對稱群、建模、模式架構、模式識別、參數估測、實驗觀察等主題。

本期為第三年，在對稱群方面，由閔氏時空之羅倫茲群、龐卡萊群，擴展至共形群，得到偽歐空間之群表示，了解李代數與應變輸入之關係。在建模與模式架構方面，為解決循環塑性回應力循環振盪及反向降伏時應力應變曲線過方的難題，引入了降伏厚面的觀念，導出其塑性開關充要條件及組成方程式，也進行模式層級架構之探討，並與其他模式比較。另一方面以積分形式組成律，代入指數函數與冪函數的核函數，從最初的模式建構至參數估測時的實驗設計、估計之數值方法、以及最後的模式模擬，發展系統化的實驗數據處理方法。

在實驗觀察方面，針對單向對稱等振幅應力循環下之棘齒行為進行研究。根據一連串的實驗以及數據分析發現，鋁 7075 及鋁 6061 於單向對稱等振幅循環下竟有拉壓硬化不對稱之現象，因此當其循環硬化趨於飽和時，每一圈應力循環下總是會產生拉伸向的應變累積，導致所謂的棘齒行為。

**關鍵詞：**彈塑性、組成律、循環塑性、閔氏時空、偽歐空間、龐卡萊群、共形群、降伏厚面、模式識別、參數估測、冪定律、實驗設計、循環硬化、鋁 7075。

## Abstract

Constitutive models of elastoplasticity may be employed to describe more macroscopic phenomena than people thought. In addition to elastoplasticity, they include cyclic plasticity, hysteresis, friction, plastic hinge, etc. These phenomena appear not only in materials, but also in members, interfaces, devices, and even in a whole engineering structure. In other words they appear in a variety of solid state systems.

This three-year project was proposed to study elastoplastic models from a dynamical-system-theoretic point of view, focusing on the issues of symmetry groups, modeling and model hierarchy, model identification and parameter estimation, and experimental observation.

In the third year we have, in the symmetry groups

aspect, expanded from the Lorentz and Poincare groups acting on Minkowski spacetime to conformal group, obtaining its group representations in pseudo-Euclidean space and relating its Lie algebra to the strain input. In the modeling and model hierarchy aspect, we have postulated a comprehensive model with yield thick-surface to circumvent the problems of back stress oscillation and over-square elastic-plastic transition. In the model identification and parameter estimation aspect we have developed a systematic procedure for experimental design, data processing and parameter estimation for models of the integral-equation type with exponential and power function kernels.

In the experimental observation aspect we have found that annealed Aluminum alloys 7075 and 6061 in uniaxial tension-compression cyclic stress-controlled tests exhibited ratchetting even with zero mean stress and equal amplitudes at room temperature and that the ratchetting was all in the direction of elongation no matter the cyclic tests began in tension or in compression. The initial few cycles were dominated by cyclic hardening, and once the effect of cyclic hardening saturated, ratchetting manifest itself. Careful comparisons of the stress-strain loops after saturation showed that there were clear evidences of tension-compression asymmetry of strain hardening, namely strain accumulation in the tensile half-cycle of each cycle being larger than that in the compressive half-cycle of the cycle, and hence ratchetting tended to elongate (even with zero mean stress). The observation was further confirmed by true stress-controlled tests.

**Keywords:** elastoplasticity, constitutive law, cyclic plasticity, Minkowski spacetime, pseudo-Euclidean space, Poincare group, conformal group, yield thick-surface, model identification, parameter estimation, power law, experimental design, cyclic hardening, Al 7075.

## 二、緣由與目的

我們一直在研究固態系統的宏觀力學性質。我們所謂的固態系統，主要指的是材料微元（如鋼材之三維微元），或元件（如多層橡膠鋼板支承墊），或介面（如摩擦面），或構件微元（如塑鉸為長度微元乘構件剖面）。這些固態系統時而為保守系統，時而為耗散系統，簡單地說就是彈塑性系統。彈塑性系統非常複雜，很難單由實驗觀察確定其宏

觀力學性質之組成模式。我們由其他物理科學（尤其基本粒子）的研究獲得啟發，對於這種複雜的系統，可以經由對於對稱群的探討，協助確立其組成模式。

近年來，多軸循環塑性，由於多軸循環的關係，顯現出來的現象可謂多彩多姿，具有很高的學術價值，成為固態系統宏觀行為研究者極欲突破的領域。又由於應用上的價值很高，如橋梁所受到的載重是多軸循環的，房子受到的地震載重也是多軸循環的，大部份的動力機械及交通運輸工具（汽機車、飛機、輪船等）所受到的外因也是多軸循環的，因此無論工業界或工程界在這個問題上都有相當大的利基存在，值得全力研發突破。

對於這個有趣的主题，我們體認到有必要對它做更仔細的研究，也有必要將它推廣，置於更高的架構來看，因此提出本計畫。

### 三、研究方法

#### 3.1 彈塑性組成模式之對稱群

##### 3.1.1 閔氏時空羅倫茲群

完全彈塑性組成模式具有對稱群，是閔氏時空之羅倫茲群  $SO_0(5,1)$  的零錐射影。若捨棄零錐射影，改採雙曲球射影，剪切降伏應力就可以不是定值，如此就得到等向硬化彈塑性模式。

##### 3.1.2 閔氏時空龐卡萊群

進一步可以多考慮平移群  $T(5)$ ，使羅倫茲群  $SO_0(5,1)$  變為龐卡萊群  $SE_0(5,1)$ 。結果剪切降伏應力  $\tau_y$  成為

$$\tau_y = \tau_{y0} \sqrt{\alpha_v^2 + \frac{\alpha_v^2(1-\beta)}{\beta} e^{-\lambda/\gamma} - \frac{(\alpha_v^2 - \beta)}{\beta} e^{-2\lambda/\gamma}}, \quad (1)$$

其中  $\tau_{y0}$ ,  $\alpha_v$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  為常數。此彈塑性組成模式具有龐卡萊群雙曲球射影的對稱群。有關龐卡萊群中之平移群的見解與本人先前之見解不同，可能是個突破，其關鍵在於我們還有一道射影的手續，導致平移群之意義竟然不再像先前如一般認為的平凡。

##### 3.1.3 閔氏時空共形群及偽歐空間之群表示

上述彈塑性組成模式可以繼續推廣，使包含應力第三不變量，如此降伏面就非常符合實驗數據所顯示的變形引致異向性現象了。此時之對稱群是閔氏時空之共形群之零錐或雙曲球射影。然而閔氏時空共形群元素共形變換卻是非線性的變換，不似之前的羅倫茲群或龐卡萊群之群元素是線性的變換。所以我們進一步正確無近似地線性化，得其在高兩維的偽歐空間上的  $SO_0(6,1)$  及  $SE_0(6,1)$  線性群表示。最重要的突破是了解這兩個線性群表示的李代數與應變輸入的關係。

#### 3.2 帶有降伏厚面的彈塑性組成模式架構

為解決循環塑性回應力循環振盪及反向降伏時應力應變曲線過方的難題，引入了降伏厚面的觀念，其模式公設如下：

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p, \quad (2)$$

$$\varepsilon^e = \frac{\partial W^c(\sigma, \lambda, \beta)}{\partial \sigma}, \quad (3)$$

$$\dot{\varepsilon}^p = \dot{\lambda} a(\sigma, \lambda, \beta), \quad (4)$$

$$\dot{\beta} = \dot{\lambda} b(\sigma, \lambda, \beta), \quad (5)$$

$$\Phi(\sigma, \lambda, \beta) \leq 0, \quad (6)$$

$$\dot{\lambda} \geq 0, \quad (7)$$

$$\dot{\lambda} \phi(\sigma, \lambda, \beta) \geq 0, \quad (8)$$

$$\dot{\lambda} \dot{f} \Phi = 0, \quad (9)$$

上述公設體系若令  $\phi=f=\Phi$  則降伏厚面簡化為降伏面，而上述模式回復傳統模式。

### 3.3 模式識別及參數估算

#### 3.3.1 系統模式

由老化材料之黏彈性組成律，我們以累積塑性應變  $\lambda$  取代  $t$ 、塑性應變  $\varepsilon^p$  取代應變  $\varepsilon$  的方式改成彈塑性組成模式，經由變換變數、Leibniz 法則來加以推導後可得

$$\sigma_{ij}(\lambda) = f_1(\lambda) R(0) \frac{d\varepsilon_{ij}^p}{d\lambda} + f_2(\lambda) \int_0^\lambda E(\lambda - \lambda') \frac{d\varepsilon_{ij}^p}{d\lambda'} d\lambda' \quad (10)$$

其中  $R(t) = \int E(t) dt$ ， $f_1(\lambda)$ 、 $f_2(\lambda)$  為待定之材料函數，此處令(10)式右邊兩項，第一項為  $\sigma_{ij}^u(\lambda)$  第二項  $\sigma_{ij}^h(\lambda)$  如此便推得硬化模式。

##### 3.3.1.1 等向硬化部分

由(10)式第一項發現，只需決定材料函數  $\tau_c$  的型式，即可決定等向硬化部分的模式。控制應力空間中降伏圓大小的函數表示成

$$\tau_c = \tau_u - (\tau_u - \tau_y)(e^{-s\lambda} + e^{-b\lambda} - e^{-s\lambda} e^{-b\lambda}). \quad (11)$$

$\tau_u$  為極值， $\tau_y$  為初始值， $b$ 、 $s$  為常數

$$\begin{cases} |P| < \|e_{ij}^p\|, & P\dot{P} = \mu \langle e_{ij}^p \dot{e}_{ij}^p \rangle \\ |P| \geq \|e_{ij}^p\|, & \dot{P} = 0 \end{cases}, \quad (12)$$

其中  $\mu$  為常數， $\langle x \rangle = (x + |x|)/2$ 。

##### 3.3.1.2 走動硬化部分

注意(10)式第二項應力表示式核函數  $E(\lambda)$  具有奇異性，我們分別以指數函數和冪函數來表示描述。

##### (1) 核函數為指數函數

$$\dot{\sigma}_{ij}^{h(k)} = f_2(\lambda) c_k \dot{\varepsilon}_{ij}^p - \alpha_k \sigma_{ij}^{h(k)} \dot{\lambda}, \quad (13)$$

##### (2) 核函數為冪函數

$$\sigma_{ij}^h = \sum_i f_2(\lambda) \int_0^\lambda E_i(\lambda - \lambda')^{-\alpha} \frac{d\varepsilon_{ij}^p}{d\lambda'} d\lambda', \quad (14)$$

為了簡化模式型式且方便參數的識別，其中的材料函數  $f_2(\lambda)$  令為一常數。

#### 3.3.2 實驗資料處理方法

軸向循環負載實驗的實驗結果經由資料擷取卡擷取至電腦後，需將實驗數據作一系列的處理和分析，套入系統的組成模式，這其中的過程包括資料的濾波、離散傅立葉轉換、最小平方法、曲線擬合等等。

#### 3.3.3 實驗數據之模式模擬

##### 3.3.3.1 核函數為指數函數

由於我們假設在循環穩定時，降伏圓大小幾乎不再變化而視為一定值，因此當我們取出最後一圈循環穩定段的一應力上升段資料時，可將應力表示為

$$\sigma_{11} = C + \sum_k A_k e^{B_k(\lambda - \lambda_0)} \quad (15)$$

令  $t = \lambda - \lambda_0$ ，若  $k = 1 \sim n$ ，則上式即為  $n$  階常微分方程的解

$$D_n \sigma^{(n)} + \dots + D_2 \sigma'' + D_1 \sigma' + D_0 \sigma = C, \quad (16)$$

將上式雙邊做離散傅立葉轉換之處理，

令  $F^N = DFT\{\sigma^{(N)}\}$ ,  $N = 1 \dots n$ ，則得到

$$F^n + \dots + D_2 F^2 + D_1 F^1 + D_0 F^0 - C' DFT\{1\} = 0, \quad (17)$$

以矩陣形式表示，若共有  $m$  個資料點，即以採樣週期  $T$  在  $t = 0 \sim (m-1)T$  間取點，則

$$\begin{bmatrix} DFT\{1\}_1 & F_1^0 & \dots & F_1^{n-1} \\ DFT\{1\}_2 & F_2^0 & \dots & F_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ DFT\{1\}_m & F_m^0 & \dots & F_m^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -C' \\ D_0 \\ \vdots \\ D_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -F_1^n \\ -F_2^n \\ \vdots \\ -F_m^n \end{bmatrix}. \quad (18)$$

上式可簡單表示為

$$\mathbf{U} \mathbf{D} = \mathbf{C}, \quad (19)$$

其中  $\mathbf{U}$ 、 $\mathbf{C}$  矩陣為已知， $\mathbf{D}$  為待求係數，因此處的  $m > n$ ，由最小平方法，即可求得

$$\mathbf{D} = \text{Re}((\bar{\mathbf{U}}^T \mathbf{W} \mathbf{U})^{-1} (\bar{\mathbf{U}}^T \mathbf{W} \mathbf{C})), \quad (20)$$

求出  $\mathbf{D} = [-C' \ D_0 \ \dots \ D_{n-1}]^T$ ，即得到了常數  $C$ ，再由(16)式求得多項式的解  $B_k$ ，即得到材料參數  $\alpha_k$ 。其餘材料參數仍可採以簡單的最平方法及曲線擬合即可求得。

### 3.3.3.2 核函數為冪函數

這裡在求解時採取分段相加的方式，即除了單調段外，每二分之一圈取一段來相加，則可將(14)式寫為

$$\sigma_{11} = \sqrt{3} \tau_c + \sum \frac{E_i}{1 - \alpha_i} [(\lambda - \lambda_0)^{1 - \alpha_i} + 2 \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^j (\lambda - \lambda_0)^{1 - \alpha_i}], \quad (21)$$

由此便可以得到第一段(單調段)與第二段(反向加載段)的應力表示。

在觀察我們對硬化模式的假設型式後可看出，控制等向硬化之主動應力中參數的決定，將影響每一圈進入塑性的應力，即彈塑交界的轉折點，由於此轉折點難以決定，故這部分的轉圓空間較大；而控制走動硬化之回應力中參數的決定，主要將影響每一段拉伸或壓縮段的硬化趨勢。因此這邊的作法為將(21)式改寫為

$$\sigma_{11} = f(\lambda) \frac{E_1}{1 - \alpha_1} \lambda^{1 - \alpha_1}, \quad (22)$$

先以單調段資料和上式求得  $\alpha_1$ 、 $E_1$ ，代入程式中模擬出應力反應  $\bar{\sigma}_{11}$ ，再由模擬結果與實驗數

據相比較，繪出  $\sigma_{11} - \bar{\sigma}_{11}$  對  $\lambda$  之關係圖，可以發現每一段曲線以冪函數來擬合時，指數部分的值都極近似，由此即可求得  $\alpha_2$ ，最後代回便可求得  $E_1$ 、 $E_2$ 。

材料函數  $f$  描述了每一圈應力峰值的變化，可由實驗資料輕易求得；而函數  $\tau_c$  是在求得  $\alpha_i$ 、 $E_i$  之後，得到其中的參數，再將之代入程式中模擬得  $\bar{\sigma}_{11}^a$  及  $\bar{\sigma}_{11}^b$ ，由穩定時的實驗數據  $\sigma_{11}$  與模擬的  $\bar{\sigma}_{11}^b$  兩者之差，即可得到穩定時的  $\sigma_{11}^a$  或  $\tau_c$ ，來對函數  $f$  作進一步之修正，而得到更正確的參數。

將識別之參數代入程式中所得之實驗模擬結果如圖一、圖二。

## 3.4 實驗觀察

### 3.4.1 分析棘齒行為產生原因

首先針對鋁 7075 於退火態下進行一系列之單向對稱應力塑性循環控制實驗研究，分別為單一階段之軸向振幅循環實驗，振幅分別為 165、185 及 195MPa；多階段之軸向振幅循環實驗，其振幅分為 165-185-195MPa 三階段之循環實驗；以及單一階段和多階段之扭向循環實驗。

由實驗結果可引出棘齒行為的發生機制，以下將以單一應力振幅 195MPa 循環實驗為例來說明。

#### 3.4.1.1 循環硬化的影響

單一應力振幅 195MPa 循環實驗應變反應如圖三所示，表一則將每一圈循環下之壓應變峰值與拉應變峰值作了整理，並將每一圈拉壓應變峰值間之距離以及拉壓應變峰值之中心點隨著每一循環之變化作了整理。其中可觀察到拉壓峰值之中心點自第二圈以後開始逐漸向右移動(漸漸變大)，而拉應變峰值除了第一圈以外皆隨循環圈增加而漸漸變大(第六圈因實驗控制不良而有所落差)，並以每圈大約 0.036% 增加。於此應力循環下在第三圈開始即可看到明顯的棘齒現象，亦即第三圈開始該圈之拉應變峰值大於前一圈的拉應變峰值且其拉壓應變之中心點不斷向右移動。再比對拉壓峰值間的差距變化，可知從第二圈以後其拉壓應變間差距已經變化很小，峰值間差距從第一圈的 2.3521% 降至第二圈的 1.6635%，而後皆大約維持在這個值附近(第六圈因實驗控制不良之關係而有一些落差)。依據先前對於循環硬化的定義，可知在對稱等振幅應力循環下，當拉壓應變峰值間的差距變化不大時，其循環硬化已接近飽和的狀態，因此可知在第一圈至第二圈時循環硬化造成應變反應變化很大(拉應變峰值兩圈相較相差甚多)，而後循環硬化實際已經接近飽和之程度，導致拉壓應變峰值間差距之變化甚小。並再比較振幅為 165MPa 及 185MPa 循環之實驗，其結果顯示在應力振幅較大時循環硬化達至飽和的速度會有不同，當應力較大時達至飽和的速度會比較快，且其皆顯現有相同的現象，即當出現棘齒行為時，循環硬化必已趨近於飽和狀態。

#### 3.4.1.2 拉壓硬化不對稱性

進一步將應力振幅為 195MPa 循環之實驗數據，將其產生棘齒現象的應力與應變遲滯圈之 3~

10 圈（這幾圈之循環硬化已接近飽和）。分離出每一個循環出來，並將其重疊比較之，可分別得到兩張圖形，其中第一張即圖四乃重疊拉伸段之彈性部分，而第二張（限於篇幅未印出）乃重疊壓縮段之彈性部分。可以發現重疊在一起的部分中，其隨後進入塑性之應力應變曲線可以說有非常一致的趨勢。比較遲滯圈的大小，可以發現這些遲滯圈互相還是有大小之分，由表一可以看到拉壓應變峰值間差距由第二圈以後幾乎已達一穩定值，但由第四圈後之變化，仍看出其有一點點減小的趨勢。其主要原因乃是當從彈性進入塑性階段時，各圈之間其實亦有一些微的差距，亦即表示循環硬化仍持續微小的變化。以圖四為例，在彈性段部分中這些不同圈的曲線可以說是交雜在一起的，但是在進入塑性段後，卻以非常些微的差距分開，依序由下而上，為第 10 圈、第 9 圈、... 到第 3 圈，當然由於實驗控制的關係，其互相還是有交雜，只是已從原先的彈性段交雜在一起，而變成可互相分離的狀態，所以也因此當到達 195MPa 時，每一圈所反應出來的應變振幅會有不同的現象。在此可以清楚的看到不管是拉或壓，各圈在塑性段之趨勢可以說在某種程度上是平行的。

在此認知下，取出對稱等振幅 195MPa 循環第十圈遲滯圈，再將壓的部分上下、左右反轉使其能夠與拉的部分互相比較，如圖五所見，很明顯的拉壓的曲線在此有兩種不同的趨勢，亦即在循環硬化下對於拉與壓的應力會有兩種不同的趨勢反應。相對而言，壓硬化呈現比拉硬化嚴重之情形。由於之前提及各圈（3~10 圈）之趨勢是相當一致的，所以其他圈在拉壓互相比較之下亦會有此情形。而這兩種不同的硬化效果，也就造成在相同的拉壓應力振幅下，拉所反應出來的應變振幅會比壓所反應出來的大，可以說拉壓在此會有硬化不對稱之現象。

而如此情形在對稱等振幅 185MPa 循環試驗或多階段振幅循環試驗皆可觀察到。反觀對稱等振幅之扭向單階段或多階段循環實驗正負向亦無不對稱之行為。

#### 3.4.2 相同振幅下先拉或先壓路徑之影響

首先探討相同路徑但方向相反一為先拉一為先壓，對材料有何不同的影響。選擇對照組實驗進行探討，以單一階段對稱等振幅循環實驗為例，選擇振幅為 185MPa 之實驗進行比較，應力控制路徑分為先拉及先壓兩種。由應變反應可知先拉之實驗至第四圈才有棘齒現象產生；先壓之實驗則至第三圈即顯現棘齒現象，由此看出先壓之實驗，棘齒現象會較早出現。

為了進一步描述其中之差異，將應力控制路徑循環拉壓之過程，分離出拉伸段與壓縮段，把當應力為拉伸段或壓縮段時所造成之應變貢獻量 ( $\Delta\epsilon_i$ ) 分別分圈取出來，將其繪製成圖作一比較，其中單一階段對稱等振幅實驗：先拉如圖六所示，先壓限於篇幅未印出。由圖中可以清楚看到每一循環中拉伸段或壓縮段對應變貢獻量的多寡，於前幾圈循環中，可以看到受循環硬化的影響，使得拉伸段與壓縮段之應變貢獻量變化劇烈，而最後幾圈循環，則可清楚看到受拉壓硬化不對稱影響下，使得拉伸段

之貢獻量皆大於壓縮段之貢獻量，且分別呈現一穩定值，而此拉伸段與壓縮段貢獻量之差值，即是棘齒行為在拉伸向之累積量。另於，可知當某一圈循環下之拉伸段應變貢獻量大於前一壓縮段應變貢獻量時，該圈循環下之拉應變峰值即會大於前一圈循環之拉應變峰值，而出現棘齒行為。因此進一步比較實驗控制路徑上拉壓排序先後不同的影響，可知先壓的實驗會比先拉實驗較有可能早出現棘齒行為，並透過圖六等的比較，發現先壓的實驗其循環硬化的速度會比先拉的實驗快。在多階段循環實驗下亦可看到相同之情形。這與之前所提及之拉壓硬化不對稱現象中壓硬化比拉硬化還嚴重之情況可互為呼應。

#### 3.4.3 面積變化對棘齒行為的影響

針對拉壓面積變化對實驗的影響，以環向伸長計即時量取面積之變化進而即時修正軸力命令值之大小，而能夠進行對稱等振幅循環真實應力控制模式。考慮真實應力與應變，並進行對照實驗，一為真實應力控制，一則為應力控制。振幅為 195MPa，其應變反應如圖七所示可以清楚看到面積改變在列入考慮後並不會影響棘齒現象的發生與否。唯棘齒累積量在考慮真實應力控制後，有因此而變小的現象。因為其進一步拿掉一小部分應力非零均值的影響。

#### 3.4.4 非對稱等振幅循環下之棘齒行為

非對稱等振幅應力循環下之棘齒行為，除了有先前提及之拉壓硬化不對稱的影響外，還因為又再導入了應力均值的影響，導入此應力均值將使得在循環的過程中，拉伸段與壓縮段在進入塑性區時之應力狀態不同。而應力均值越大所造成的差異性越大，產生之棘齒累積量亦越大。因此在同一振幅下，對於拉伸段與壓縮段之間趨勢差異性（拉壓趨勢不對稱）之影響，應力均值的影響將大於拉壓硬化不對稱的影響。在均值为正之情況會產生比均值为零時更加嚴重之棘齒累積現象。在此亦暗示存在一應力循環均值为負的臨界點，使其不會出現棘齒行為，亦即其臨界點並非存在於均值为零之情況下。

## 四、結論與展望

1. 對稱群的探討，有助於建立內洽有序之彈塑性組成模式，而且可因為正確無誤線性化而使計算精準。本計畫成功得到偽歐空間群表示，極具理論與計算之價值。
2. 本計畫引入降伏厚面之概念，並成功將其公設化，使結論 1. 所得之成果更為發揚之，解決降伏面及回應力循環振盪以及彈塑轉換過方之問題，對於多軸循環彈塑性之模擬具有突破性之意義。
3. 在彈塑性組成模式的模式識別及參數估測上，使用了積分型式的組成律，並將其中的核函數分別表示為指數函數與幕函數兩大部分，而由模擬結果看來，兩者皆能相當成功地完成模擬。而幕函數之模式比指數函數之模式需要較少之參數即可達到相同或更好的模擬效果。
4. 本研究在參數識別過程中，常常因為所擷取的實驗資料點數或捨棄的資料點數不同，有不同的參數

識別結果，有時會因此造成相當大的誤差；即因為當擷取之實驗資料的起始點不同時，便會得到不同的初始降伏點，而造成不同的模擬結果，為了減少此部分造成的誤差，需要對識別結果加以判斷其合理性。然而由於初始降伏點原本就座落在一段無法確認其實際值的範圍內，故此部分仍待繼續探討。

5. 由於本研究中的實驗試棒皆為經過真空完全退火後的初次受力，因此在參數估測或模式模擬的過程中，多將塑性應變  $\lambda$ 、應力反應  $\sigma$  等變數的初始值視為 0。未來可將此部分的初始值令為一參數，於參數估測時一起加入估計，或許可因此得知此試棒的初始狀態。

6. 單向對稱等振幅應力循環下棘齒行為發生之機制：在應力均值为零之等振幅應力循環下（無論是單一階段或多階段等振幅應力循環）要產生棘齒現象，需待循環過程中循環硬化接近飽和狀態而不再隱蔽拉壓硬化不對稱所造成之影響下方能顯現。拉壓硬化不對稱所造成的拉壓應變振幅不同，其差值會因應力振幅大小不同而有不同，當應力振幅大時拉壓應變振幅差異自然會比較大，所造成之棘齒累積量亦會較大。而扭向正負對稱等振幅剪應力循環控制下，因無正負向硬化不對稱之現象，故當循環硬化達到飽和狀態時，亦不會有棘齒現象發生。

7. 在對稱等振幅應力循環下棘齒行為的出現先後，會受到實驗路徑為先拉後壓或先壓後拉兩種不同控制路徑的影響，其乃因實驗路徑在拉壓排序上先後不同所直接造成之影響因素（即棘齒行為在先壓控制方式下將有可能會比在先拉控制方式下早一圈循環出現），以及因為此兩種不同方式之應力循環下造成循環硬化飽和速度的不同所造成之影響（飽和速度快者，將可能使棘齒行為提早出現）。

8. 於對稱等振幅應力循環下，在考慮拉壓面積因應力循環下而產生之變化後，即在使用真實等振幅應力控制後，棘齒現象依然會出現。拉壓面積之變化不為產生此類棘齒行為之原因。

9. 當施予一非對稱循環應力控制路徑時，其所施加之非對稱循環應力之應力均值，將會直接影響（上位影響）材料本身內部的不對稱性，因此鋁 7075 在均值为正之情況會產生比均值为零時更加嚴重之棘齒累積現象。在此亦暗示存在一應力循環均值为負的臨界點，使其不會出現棘齒行為，亦即其臨界點並非存在於均值为零之情況下。

10. 現有彈塑性組成律並無法模擬此棘齒行為：由彈塑性模式之基本假設可知，不論任何一種模式，皆將所有的金屬材料假設為正負對稱，沒有對拉壓硬化之不對稱行為做過處理。因此，在軸向對稱應力等振幅循環下，在循環硬化飽和後所得之應力與應變遲滯圈其拉與壓之曲線趨勢將會完全一樣，而這並不符合我們所觀察到的實驗現象。因此，既有模式並無法模擬 7075 鋁合金於軸向對稱應力等振幅循環下所產生之棘齒累積效應。

## 五、參考文獻

- [1] Bari, S. and Hassan, T., Anatomy of coupled constitutive models for ratcheting simulation, *Int. J. Plasticity*, 16, 381-409, 2000.
- [2] Chaboche, J. L., Time-independent constitutive theories for

cyclic plasticity, *Int. J. Plasticity*, 2, 149-188, 1986.

[3] Chaboche, J. L., and Nouaihas, D., Constitutive modeling of ratchetting effects— Part I :experimental facts and properties of the classical models, *J. Eng. Mater. and Tech.*, 111, 384-392, 1989.

[4] Chiang, D.-Y., Modeling and identification of inelastic systems using the endochronic model, *J. Appl. Mech.*, 65, 513-518, 1998.

[5] Hassan, T., and Kyriakides, S., Ratcheting of cyclically hardening and softening materials: I. uniaxial behavior, *Int. J. Plasticity*, 10, 149-184, 1994.

[6] Hong-Ki Hong and Chein-Shan Liu, Internal symmetry in bilinear elastoplasticity, *Int. J. Non-Linear Mech.*, 34, 279-288, 1999.

[7] Hong-Ki Hong and Chein-Shan Liu, Lorentz group  $SO(5,1)$  for perfect elasto-plasticity with large deformation and a consistency numerical scheme, *Int. J. Non-Linear Mech.*, 34, 1113-1130, 1999.

[8] Hong-Ki Hong and Chein-Shan Liu, Internal symmetry in the constitutive model of perfect elastoplasticity, *Int. J. Non-Linear Mech.*, 35, 447-466, 2000.

[9] Hong-Ki Hong and Chein-Shan Liu, Lorentz group on Minkowski spacetime for construction of the two basic principles of plasticity, *Int. J. Non-Linear Mech.*, 36, 679-686, 2001.

[10] Hong-Ki Hong and Chein-Shan Liu, Some physical models with Minkowski spacetime structure and Lorentz group symmetry, *Int. J. Non-Linear Mech.*, 36, 1075-1084, 2001.

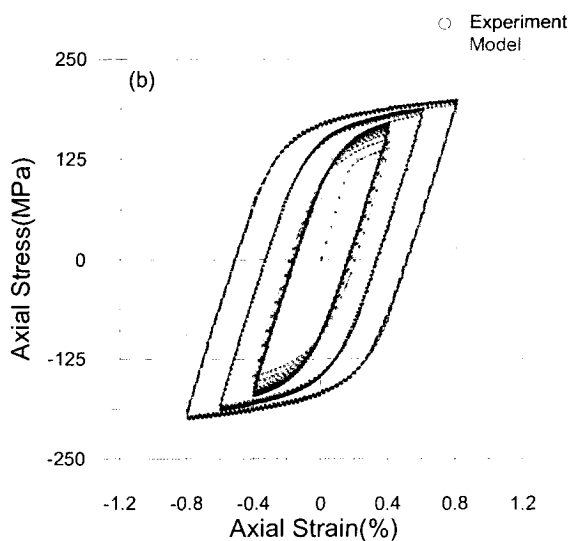
[11] Hong, S. I., Tension-compression asymmetry of hardening and damage in Al alloy matrix composite, *Scripta Materialia*, 41(4), 433-438, 1999.

[12] Lee, C. F., A systematic method of determining material functions in the endochronic plasticity, *Journal of the Chinese Society of Mechanical Engineers*, 8(6), 419-430, 1987.

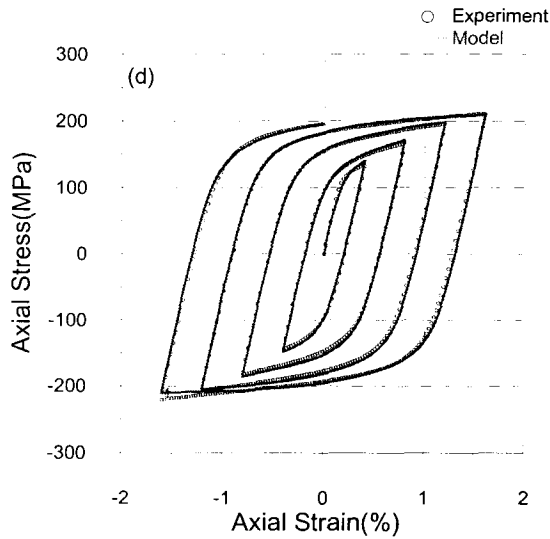
## 六、圖表

圈數	拉應變峰值	壓應變峰值	拉壓峰值間差距	拉壓峰值之中心點
1	1.9863	-0.3658	2.3521	0.81025
2	1.3786	-0.2849	1.6635	0.54685
3	1.4014	-0.2629	1.6643	0.56925
4	1.4590	-0.2206	1.6796	0.61920
5	1.4908	-0.1824	1.6732	0.65420
6	1.4616	-0.1411	1.6027	0.66025
7	1.5690	-0.1037	1.6727	0.73265
8	1.6062	-0.0524	1.6586	0.77690
9	1.6418	-0.0086	1.6504	0.81660
10	1.6772	0.0368	1.6404	0.85700

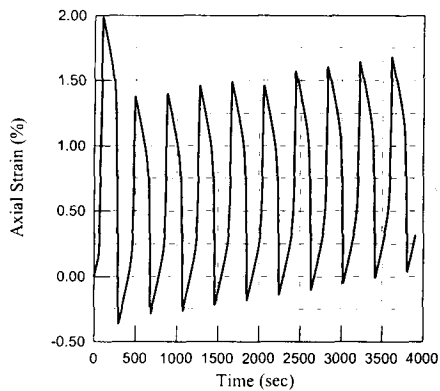
表一 軸向對稱等振幅應力控制循環實驗(單位%)



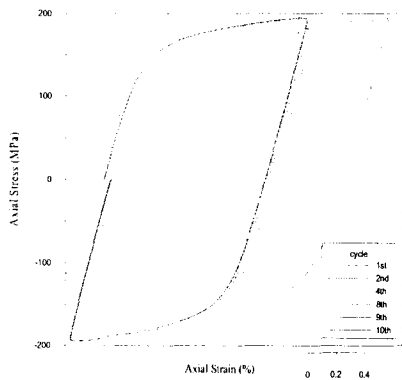
圖一 三階段拉伸模擬結果



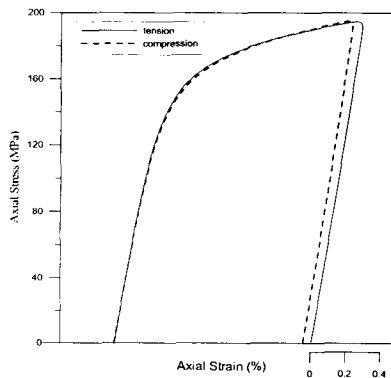
圖二 漸變應變振幅模擬結果



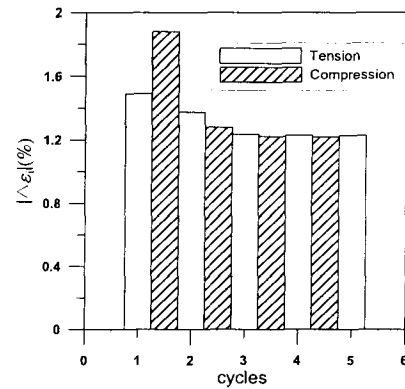
圖三 軸向對稱零應力均值下竟有棘齒



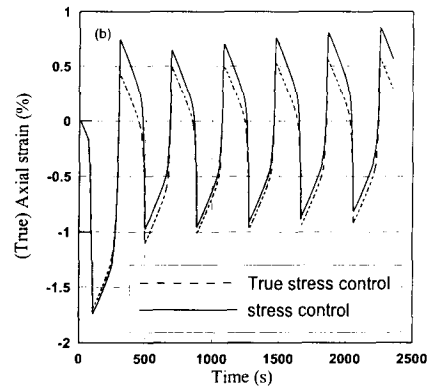
圖四 遲滯圈平移重疊拉伸彈性段



圖五 比較拉壓硬化曲線可見其不對稱



圖六 飽和後拉伸量總是稍多於壓縮量



圖七 真應力控制之真應變歷時

## 七、計畫成果

### 7.1 著作發表

- [1] Hong-Ki Hong, Chein-Shan Liu, Ya-Po Shiao, and Bing-Chang Shih, Planar double-slip model for polycrystal plasticity and micro tension tests of pure nickel and copper, ASME Journal of Engineering Materials and Technology, Vol.124, pp.314-321, 2002.
- [2] Hong-Ki Hong, Integrating von Mises elastoplastic flow model with general mixed-isotropic-kinematic hardening-softening, in preparation.
- [3] Hong-Ki Hong, Postulating elastoplasticity with yield thick-surface, in preparation.
- [4] Hong-Ki Hong, Chien-Wei Sher and Ya-Po Shiao, Tension-compression asymmetry of strain hardening and its effect on the ratchetting behavior of aluminum alloys 7075 and 6061 in zero-mean-stress cyclic tests, in preparation.

### 7.2 學生畢業論文

- [1] 佘健維, 單向對稱應力循環下之不對稱性棘齒行為研究, 國立台灣大學土木工程學研究所, 碩士論文, 台北, 2002。
- [2] 蔡耀宇, 軸向循環塑性之系統化模擬, 國立台灣大學土木工程學研究所, 碩士論文, 台北, 2002。