台灣一等 GPS 網之點位穩健度分析
Robustness analysis of the first-order GPS network of Taiwan

計畫編號：NSC 91-2211-E-002-085
執行期間：91/08/01 --- 92/07/31
主持人：許榮欣　台灣大學土木系教授

一、中文摘要(關鍵詞：粗差、可靠度、穩健度)

Baarda 的可靠度理論，並未涉及粗差對個別網點位置的影響。一具有優良外可靠度的網並不能保証其個別網點都具有可靠的估計位置。網穩健度分析的目的就是要針對粗差對個別網點變形程度加以研究。如果粗差對網點位置的影響很小，則稱此網具有強穩健度；反之，則稱此網具有弱穩健度，即網點的估計位置易受粗差影響而變形。

本研究將 Vanicek 提出之穩健度理論作進一步之推導，分解變形指標值為自身項與補充項，進而與 Baarda 之可靠度理論建立連繫，並藉此以發掘弱穩健度之成因。文中選用台灣地區一等 GPS 網作為實証，成果顯示台灣東南部地區如：綠島、蘭嶼...等衛星點位之穩健度較差，起因於這些點位的內群體觀測量之多餘數總和較小且自身項幾乎獨佔整個變形指標值。此外，一點位之弱穩健度未必由內群體觀測量造成，可能為附近一多餘數較小之觀測量導致。除了局部微小旋轉外，平均應變與總剪應變皆與點位之先驗平均精度呈高度相關。

Abstract (Keywords: Gross error, Reliability, Robustness)

The influences due to the undetected blunders on the coordinates of the individual network points have never been explored in the Baarda's theory of reliability. A network is said to be robust if the influence on the estimated positions due to the undetected blunders is small. If the influence is large, it is a network that lacks robustness. Robustness analysis aims at providing descriptors by which the degree of robustness can be measured.

In order to investigate robustness at points constituting a network, presented by Vanicek, the author expresses a deformation measure in terms of local component and complementary component, and thereby relating robustness with Baarda's reliability.

The first order GPS network of Taiwan was selected and examined for its robustness. The experiments reveal that weak robustness happen at the points in the southeast region of Taiwan, such as Lu Island, Lan-yu, etc. A weak robustness is largely due to small group redundancies at the point of interest. For those points with very large deformation, the local components monopolize robustness measures. Furthermore, large robustness parameters at a point aren't necessarily due to the observation directly tied to the point of interest. It may be caused by an observation owning small redundancy number. Except for the local twisting, deformation measures and mean positional precisions at individual points are highly correlated.

二、研究目的

測量網中的觀測量不免存有未被偵測出的粗差，傳統上粗差對網的影響常以可靠度來加以分析。其中內可靠度用以衡量網偵測粗差的能力，外可靠度討論未被偵測出來的粗差對整體參數估計的影響。一具有優良內、外可靠度的網並不能保証其個別網點位置都具有可靠的估計位置。

外可靠度理論僅討論粗差對整體參數估計的影響，並未述及其對個別測量網點空間位置所衍生效應。網點位置因粗差而生之變化，如何加以量化一直懸而未解。因此乃有下述問題：未被偵測出的粗差如何影響網點坐標呢？

穩健度分析理論(Vanicek et al.，2001)乃針對粗差對網點位置影響進行探討，量化其影響性並以數值大小表示之。

1993 年至 1998 年間，內政部在台灣地區佈設了一、二等衛星網及八個衛星追踪站，為了解一等衛星網的平面控制品質（即可靠度與穩健度）乃提出本研究，希望透過本研究對現有一等衛星網品質提昇獲得建設性意見。

三、研究方法及成果

(一). 變形向量

觀測量中之粗差導致測量網內點位之移位，欲衡量點位變形之方法為求取移位量之梯度。

假設點 $p_i(x_i, y_i)$ 之移位量為：

$$\begin{bmatrix}\Delta x_i \\ \Delta y_i\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}u_i \\ v_i\end{bmatrix} \tag{1}$$

根據定義(Vanicek et al.，2001)，p_i 之變形矩陣為：

$$E_i = grad\left(\begin{bmatrix}\Delta x_i \\ \Delta y_i\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}\partial u_i/\partial x & \partial u_i/\partial y \\ \partial v_i/\partial x & \partial v_i/\partial y\end{bmatrix} \tag{2}$$

藉由變形矩陣 E_i，可組成三個衡量點位變形之變形指標(Vanicek et al.，2001)：

1. 平均應變(mean strain)

$$\sigma_i = \frac{1}{2}(\frac{\partial u_i}{\partial x} + \frac{\partial v_i}{\partial y}) \tag{3}$$

σ_i 描述研究點 i 處的平均伸縮或增長量，表尺度變形(deformation in scale)。

2. 總剪應變(total shear)

$$\gamma_i = \frac{1}{2}\sqrt{\tau^2 + \upsilon^2} \tag{4}$$

上式中，純剪應變(pure shear)為：$\tau_i = \frac{1}{2}(\frac{\partial u_i}{\partial x} - \frac{\partial v_i}{\partial y})$，表二線間之間距變化；簡剪應變(simple shear)為：$\upsilon_i = \frac{1}{2}(\frac{\partial u_i}{\partial y} + \frac{\partial v_i}{\partial x})$，表二線間夾角變化，而研究點 i 之總剪應變 γ_i 為純剪應變與簡剪應變取幾何平均，表點 i 處之形狀變形(deformation in shape)。

3. 局部微小旋轉(local differential rotation)

$$\delta w_i = w_i - w_0 \tag{5}$$

上式中 $w_i = \frac{1}{2}(\frac{\partial v_i}{\partial x} - \frac{\partial u_i}{\partial y})$，表點 i 處之微小旋轉(Differential rotation)；$w_0 = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} w_i$ 為所有網點微小旋轉之均值(mean)，m 表網點總數。每個網點之微小旋轉 w_i 若扣除整體平均值，可真正求得代表各個網點之局部微小旋轉 δw_i，它表旋轉變形。

Vanicek(2001)建議，欲衡量測量網內點位之穩健度，可採用原始之網形各點位上之測線，抑或研究點處方圓 r 公里內之測線。

假設與研究點 p_i 作聯測之點位為 p_j $(j = 1,2,\cdots t)$，則變形向量與移位量之關係式(Vanicek et al.，2001)：

$$vec(E_i) = \begin{bmatrix}\partial u_i/\partial x \\ \partial u_i/\partial y \\ \partial v_i/\partial x \\ \partial v_i/\partial y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}Q_i & 0 \\ 0 & Q_i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}U_j \\ V_j\end{bmatrix} \tag{6}$$

$$U_j = [u_1 \quad u_2 \quad \cdots \quad u_t]^T$$
$$V_j = [v_1 \quad v_2 \quad \cdots \quad v_t]^T$$

Q_i 為刪除 $(K_i^T K_i)^{-1} K_i^T$ 之第一列後之矩陣，其中 $K_i = [1 \quad x_j - x_i \quad y_j - y_i]$ $(j = 1,2,\cdots t)$。

將(6)式中之移位向量擴及全網，設全網的之移位向量為 Δx，則(6)式可改寫成：

$$vec(E_i) = T_i \Delta x = T_i N^{-1} A^T P \Delta L = H_i \Delta L \tag{7}$$

$$\Delta x = [u_1 \quad u_2 \quad \cdots \quad u_m \quad v_1 \quad v_2 \quad \cdots \quad v_m]^T$$
$$H_i = T_i N^{-1} A^T P$$

T_i 矩陣可由(6)式中之 Q_i 矩陣組成：

$$T_i = \begin{bmatrix}0 & 0 & \cdots & Q_i & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & Q_i & 0 & \cdots & 0 & 0\end{bmatrix} \tag{8}$$

巴達(Baarda,1968)之可靠度理論中假設諸多觀測量中每次只有一觀測量俱有粗差，則點 i 處因觀測量粗差所引起之變形向量為：

$$vec(E_i) = H_i \Delta L = H_i \nabla_k = h_k \nabla_{0k} \tag{9}$$

上式中$\nabla_k = [0 \ \cdots \ \nabla_{0k} \ \ 0 \ \cdots]$表觀測量 k 的粗差向量($k=1,2,\cdots,n$)， n 為觀測量的總數。$\nabla_{0k} == \sigma_k \delta_o / \sqrt{r_k}$ 表在顯著水準α及檢驗功效β之下觀測值L_k未被偵測出之粗差。δ_0為非中心化參數，σ_k表L_k的觀測標準差，r_k表其多餘觀測數。h_k為H_i矩陣第k行的行向量。

對每個點位而言，每個觀測量都可產生一個$vec(E_i)$，因此共有 n 個變形矩陣；而在穩健度分析裡每一E_i可產生三個變形指標，所以每一點位上可算得$3n$個變形指標，即$\sigma_i, \gamma_i, \delta w_i$各有$n$個，每一變形指標皆取其最大絕對值作為代表研究點之穩健度，絕對值愈小表點位愈穩健愈不易受粗差影響。另外，在網的最小約制基準下，上述三個變形指標不受基準原點平移與坐標系旋轉的影響，即原點平移與坐標系旋轉並不會改變三個變形指標的值，惟三個變形指標值與網的尺度基準定義有關，不過尺度基準改變時，對三個變形指標所產生的效應相當微小，可以忽略不計(Vanicek et al.，2001)。

(二)、變形向量進一步推導

設改正數協方差矩陣為Q_v，各觀測量的多餘數可由下式的對角元素取得：

$$R = Q_v P = I - AN^{-1}A^T P \qquad (10)$$

上式中等號的左右兩邊各前乘A^T，得$A^T R = A^T - A^T A N^{-1} A^T P$。重新整理可得：

$$N^{-1}A^T P = (A^T A)^{-1} A^T U = A^+ U \qquad (11)$$
$$(U = I - R)$$

式中$A^+ = (A^T A)^{-1} A^T$表A矩陣之偽逆陣(Gregory and Krishnamurthy, 1984)。

藉由(11)式改寫(9)式為：

$$vec(E_i) = (T_i N^{-1} A^T P)_k \nabla_{ok} = (T_i A^+ U)_k \nabla_{ok}$$
$$= (G_i U)_k \nabla_{ok} \qquad (12)$$

上式中，$4 \times n$矩陣G_i為點i處的運作元，它把矩陣U中的元素一一傳遞給變形向量$vec(E_i)$。上式中各個元素表示如下：

$$G_p U_k = g_{pk} u_k + \sum_{j=1}^{n} g_{pj} u_{jk} \qquad p = 1,2,3,4$$
$$k = 1,2,\cdots,n \qquad j \neq k \qquad (13)$$

其中$u_k = u_{kk} = 1 - r_{kk} = 1 - r_k$，$u_k$為第k個觀測量之參數數(Hsu，2000)，它為$U$矩陣當中$(k,k)$的對角線元線。$u_{jk} = -r_{jk}$，為$U$矩陣當中的非對角線元素。$p$編號從1到4，即變形向量$vec(E_i)$的維度為4。

依(13)式，(12)式可表為：

$$vec(E_i)_p = g_{pk} u_k \nabla_{ok} + \sum_{j=1}^{n} g_{pj} u_{jk} \nabla_{ok}$$
$$p = 1,2,3,4 \quad j \neq k \quad k = 1,2,\cdots,n \qquad (14)$$

由上式知，$vec(E_i)_p$由兩項所組成：第一項為$g_{pk} u_k \nabla_{ok}$，由第 k 個觀測量所提供，第二項$\sum_{j=1}^{n} g_{pj} u_{jk} \nabla_{ok}$為不含第 k 個之其他觀測量之總和。$u_k$為$U$矩陣的對角線元素，它恆為正，$g_{pk}$的數值可為正或負，而$u_{jk}$則為U矩陣中的非對角線元素，它的數值也可為正或負，但g_{pj}與u_{jk}相乘並連加後有可能造成數值相消的情形，因此變形向量$vec(E_i)_p$的數值是由等號右邊第一項$g_{pk} u_k \nabla_{ok}$所主宰，當整個變形向量的元素數值較大，也就是研究點穩健度較差時，可推測主要是由第k個觀測量所造成。第一項稱之為自身項，第二項為補充項。

變形向量分成二項後，可輕易地進行分析與研究，當多餘數r_i愈小（參數數u_k愈大），(14)式中等式右邊的第一項愈大，佔整個變形向量數量級的百分比將愈大，因而可由此概念對測量網中點位之穩健度進行研究，查看某一穩健度指標（即變形指標）由第k個觀測量所造成的百分比。

(三)、變形指標之分解式

根據(14)式，由編號k的觀測量所造成的變形指標，可分解成為自身項與補充補項，其形式如下：

1. 平均應變

平均應變的自身項L_k^{σ}與補充項C_k^{σ}之分解式下：

$$\sigma=\frac{1}{2}(g_{1k}+g_{4k})u_k\nabla_{ok}+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(g_{1j}+g_{4j})u_{jk}\nabla_{ok}$$
$$=L_k^{\sigma}+C_k^{\sigma} \qquad j\neq k \qquad (15)$$

(15)式中等號右邊的第一項為點位上之平均應變由第 k 個觀測量造成之自身項；第二項為補充項，它由非第k個觀測量連加所組成。以下總剪應變與微小旋轉之自身項與補充項之組成方式與平均應變相同，因此不多作說明。

2. 總剪應變 $\gamma=\sqrt{\tau^2+\upsilon^2}/2$

(a)純剪應變(Pure Shear)

自身項L_k^{τ}與補充項C_k^{τ}之分解式如下：

$$\tau=\frac{1}{2}(g_{1k}-g_{4k})u_k\nabla_{ok}+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(g_{1j}-g_{4j})u_{jk}\nabla_{ok}$$
$$=L_k^{\tau}+C_k^{\tau} \qquad j\neq k \qquad (16)$$

(b)簡剪應變

自身項L_k^{υ}與補充項C_k^{υ}之分解式如下：

$$\upsilon=\frac{1}{2}(g_{2k}+g_{3k})u_k\nabla_{ok}+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(g_{2j}+g_{3j})u_{jk}\nabla_{ok}$$
$$=L_k^{\upsilon}+C_k^{\upsilon} \qquad j\neq k \qquad (17)$$

3. 微小旋轉

自身項L_k^{ω}與補充項C_k^{ω}之分解式如下：

$$\omega=\frac{1}{2}(g_{3k}-g_{2k})u_k\nabla_{ok}+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(g_{3j}-g_{2j})u_{jk}\nabla_{ok}$$
$$=L_k^{\omega}+C_k^{\omega} \qquad j\neq k \qquad (18)$$

以下僅就平均應變進行討論與歸納，總剪應變與微小旋轉指標的情形可類推之。

測量網中，一但網形與觀測量的權矩陣確定後，(13)式中之G_pU_k便固定不變。多餘數愈大，也就是參數數愈小，點位上的自身項將愈小，但這並不保證多餘數愈大，點位上的平均應變數值就愈小，因為(15)式中之g_{1k}，g_{4k}，g_{1j}，g_{4j}及u_{jk}並無法以數學推導的方式定義出它們的正負號。雖然無法確定多餘數較小一定會導致平均應變值較大（即穩健度較差），一般而言，平均應變值較大，大都起因於多餘數較小之故，也就是當$\sigma_1>\sigma_2$時，常有$r_1<r_2$的現象。

根據(Seemkooei，2001a、b)所作的模擬實驗顯示，在大部份的情形下，由於測量網之外圍點位之測線數較少，常是弱穩健度之點位之所在。該文中並提到弱穩健度乃是由於點位上之多餘數較小造成。在(15)式、 (16)式、(17)式與(18)式中明確地表達穩健度與多餘數呈反比關係，為 Seemkooei 的實驗提供了理論依據。因此穩健度較差之點，可以預期其上之多餘數總和較小或參數數總和較大。

(四)、台灣一等 GPS 網之穩健度

1. 變形指標：

台灣 98 個一等衛星點計有點 4、7、8、11、16（分別為鯉魚山、大森山、都蘭山、壽卡及綠島）的三個變形指標數超大，穩健度最差，這些點位皆位於東部、東南部，此地方可歸類成同一等級。另台灣沿海之各點位穩健度皆較差，可歸因於沿海點位之測線數目較少與內群體觀測量（點位上之測線）之多餘數總和較小。

2. 點位變形與多餘數之相關性：

變形指標值與測線之多餘數成反比，求取變形指標最大值與造成最大值之測線多餘數的相關係數列於表 1。數據上展現平均應變、總剪應變與局部微小旋轉均與此測線之多餘數呈中度負相關。

表 1 台灣一等 GPS 點變形指標與造成指標值測線之多餘數之相關係數(R)

	平均應變	總剪應變	局部微小旋轉
R	-0.554	-0.640	-0.516

3. 內群體觀測量所造成之變形：

計算三個變形指標由內群體觀測量造成之百分比，如表 2。表中顯示除了局部微小旋轉外，98 個網點中由內群體觀測量造成平均應變和總剪應變的百分比不如預期高，表示除了內群體觀測量外，尚有其它原因造成弱穩健度。

表 2　台灣一等 GPS 點上由內群體觀測量形成穩健度最差所佔百分比(%)

	平均應變	總剪應變	局部微小旋轉
%	44%	40%	6%

4. 自身項的百分比與內群體觀測量多餘數之相關性：

理論推測，自身項應佔絕大部份，台灣一等衛星網確如理論所推測。表 1 驗證變形指標與點位上的多餘數成反比，從理論公式推導上又可知自身項佔百分比較高，自身項與多餘數的相關性顯然應更高，因此再求取其與點位上內群體觀測量多餘數總和之相關係數，成果數據如表 3，惟表中的相關係數並未能大幅提升顯示台灣一等 GPS 網未如理論預期。

表 3　變形指標的自身項所的百分比與內群體觀測量多餘數總和之相關係數

	平均應變	純剪應變.	簡剪應變	局部微小旋轉
R	-0.603	-0.551	-0.640	-0.567

5. 穩健度與點位精度之相關性：

求取此網形的法方程式矩陣之逆矩陣 N^{-1} 可得 98 個一等點位之先驗平均精度，為探求點位精度與穩健度指標相關的程度，因而求取每一變形指標與點位先驗平均精度之相關係數如表 4。由表中知點位穩健度與點位的先驗精度呈現高相關的情形，但在局部微小轉旋相關性較低，透露出無法由 N^{-1} 推測網形是否會旋轉。就本研究而言，穩健度分析可量化網點變形的程度，可為網形設計時另一種參考。

表 4　台灣一等 GPS 網之變形指標與其點位平均精度之相關係數

	平均應變	總剪應變	局部微小旋轉
R	0.80	0.62	0.16

四、結論

台灣一等衛星點之穩健度以東南部點位較差，其次為沿海之點位。以可靠度論之則是因為為這些點位上之內群體觀測量之多餘數總和較小。

位於東南部衛星點位之可靠度與穩健度可作補強之動作，可採取下列作法以補強：降低這些區域觀測量之權，以減少未被偵測出來之粗差對於其它點位估計之影響；增加外圍點位之聯測數目，就 GPS 觀測而言即加入外圍點位之間之基線向量。

穩健度分析可衡量並降低粗差對點位位置之影響，不失為網形設計時另一項參考工具。

五、參考文獻

Baarda W (1968) A testing procedure for use in geodetic networks. Publications on Geodesy, New Series, vol 2, No. 5. Netherlands Geodetic Commission Delft

Gregory R.T. and Krishnamurthy E.V. 1984, Method and application of error-free computation, Spring-Verlag, p115.

Hsu R. 2000, Pre-computing influences of observation for a network, J. of Surveying Engineering, American Society of Civil Engineers, Vol.126, No.1, 8-17.

Seemkooei A. A., 2001a. Comparison of reliability and geometrical strength criteria in geodetic networks, Journal of Geodesy, vol. 75, No. 4, 227-233.

Seemkooei A. A., 2001b. Strategy for designing geodetic network with high reliability and geometrical strength, Journal of Surveying Engineering, American Society of Civil Engineers, Vol. 127, No. 3, 104-117.

Vanicek P., Craymer M. R., Krakiwsky E.J. 2001. Robustness analysis of geodetic horizontal networks, Journal of Geodesy, vol. 75, No. 4, 199-209.

台灣一等 GPS 網之穩健度分析

Robustness Analysis of the First Order GPS Network of Taiwan

許榮欣＊　　李偉崧＊＊
R. Hsu　　W. Li

摘　要

本研究將 Vanicek 提出之穩健度理論作進一步之推導，分解變形指標值爲自身項與補充項，進而與巴達之可靠度理論建立連繫，並藉此以發掘弱穩健度之成因。

文中選用台灣地區一等 GPS 網作爲實證，成果顯示台灣東南部地區如：綠島、蘭嶼...等衛星點位之穩健度較差，起因於這些點位的內群體觀測量之多餘數總和較小且自身項幾乎獨佔整個變形指標值。此外，一點位之弱穩健度未必由內群體觀測量造成，可能爲附近一多餘數較小之觀測量導致。除了局部微小旋轉外，平均應變與總剪應變皆與點位之先驗平均精度呈高度相關。

ABSTRACT

In order to investigate robustness at points constituting a network, presented by Vanicek, the authors express a deformation measure in terms of local component and complementary component , and thereby relating robustness with Baarda's reliability.

The first order GPS network of Taiwan was selected and examined for its robustness. The experiments reveal that weak robustness happen at the points in the south-east region of Taiwan, such as Lu Island, Lan-yu, etc. A weak robustness is largely due to small group redundancies at the point of interest. For those points with very large deformation, the local components monopolize robustness measures. Furthermore, large robustness parameters at a point aren't necessarily due to the observation directly tied to the point of interest. It may caused by an observation owning small redundancy number . Except for the local twisting, deformation measures and mean positional precisions at individual points are highly correlated.

關鍵詞	Keywords
可靠度	Reliability
穩健度	Robustness
多餘數	Redundancy number

＊　國立臺灣大學土木工程學系教授
＊＊國立臺灣大學土木工程學系研究生

一、前言

測量網中的觀測量不免存有未被偵測出的粗差，傳統上粗差對網的影響常以可靠度來加以分析。其中內可靠度用以衡量網偵測粗差的能力，外可靠度討論未被偵測出來的粗差對整體參數估計的影響。一具有優良內、外可靠度的網並不能保証其個別網點位置都具有可靠的估計位置。

外可靠度理論僅討論粗差對整體參數估計的影響，並未述及其對個別測量網點空間位置所衍生效應。網點位置因粗差而生之變化，如何加以量化一直懸而未解。因此乃有下述問題：未被偵測出的粗差如何影響網點坐標呢？

穩健度分析理論(Vanicek et al.，2001)乃針對粗差對網點位置影響進行探討，量化其影響性並以數值大小表示之。

二、變形指標

觀測量中之粗差導致測量網內點位之移位，欲衡量點位變形之方法爲求取移位量之梯度。假設點$P_i(x_i, y_i)$之移位量爲：

$$\begin{bmatrix} \Delta x_i \\ \Delta y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix} \tag{1}$$

根據定義(Vanicek et al.，2001)，P_i之變形矩陣爲：

$$E_i = grad\left(\begin{bmatrix} \Delta x_i \\ \Delta y_i \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \partial u_i/\partial x & \partial u_i/\partial y \\ \partial v_i/\partial x & \partial v_i/\partial y \end{bmatrix} \tag{2}$$

藉由變形矩陣E_i，可組成三個衡量點位變形之變形指標(Vanicek et al.，2001)：

1.平均應變(mean strain)

$$\sigma_i = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x} + \frac{\partial v_i}{\partial y}\right) \tag{3}$$

σ_i描述研究點i處的平均伸縮或增長量，表尺度變形(deformation in scale)。

2.總剪應變(total shear)

$$\gamma_i = \frac{1}{2}\sqrt{\tau^2 + \upsilon^2} \tag{4}$$

上式中，純剪應變(pure shear)爲：$\tau_i = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x} - \frac{\partial v_i}{\partial y}\right)$，表二線間之間距變化；簡剪應變(simple shear)爲：$\upsilon_i = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial y} + \frac{\partial v_i}{\partial x}\right)$，表二線間夾角變化，而研究點$i$之總剪應變爲$r_i$純剪應變與簡剪應變取幾何平均，表點$i$處之形狀變形(deformation in shape)。

3.局部微小旋轉(local differential rotation)

$$\delta w_i = w_i - w_0 \tag{5}$$

上式中 $w_i = \frac{1}{2}(\frac{\partial v_i}{\partial x} - \frac{\partial u_i}{\partial y})$，表點$i$處之微小旋轉(Differential rotation)； $w_0 = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} w_i$ 爲所有網點微小旋轉之均值(mean)，m表網點總數。每個網點之微小旋轉W_i若扣除整體平均值，可眞正求得代表各個網點之局部微小旋轉δwi，它表旋轉變形。

三、變形向量

(Vanicek et al.，2001)建議，欲衡量測量網內點位之穩健度，可採用原始之網形各點位上之測線，抑或研究點處方圓r公里內之測線。

設與研究點 P_i 作聯測之點爲 P_j,(j=1,2,…t)則變形向量與移位量之關係式(Vanicek et al.，2001)：

$$vec(E_i) = \begin{bmatrix} \partial u_i/\partial x \\ \partial u_i/\partial y \\ \partial v_i/\partial x \\ \partial v_i/\partial y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_i & 0 \\ 0 & Q_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_j \\ V_j \end{bmatrix} \tag{6}$$

上式中 $U_j = [u_1 \ u_2 \cdots u_t]^T$ ， $V_j = [v_1 \ v_2 \ \cdots \ v_t]^T$ ， Q_i 爲刪除 $(K_i^T K_i)^{-1} K_i^T$ 矩陣之第一列後之矩陣，其中 $K_i = \begin{bmatrix} 1 & x_j - x_i & y_j - y_i \end{bmatrix}$ (j=1,2,…t)。

將(6)式中之移位向量擴及全網，設全網之移位向量爲Δx，則(6)式可改寫成：

$$vec(E_i) = T_i \Delta x = T_i N^{-1} A^T P \Delta L = H_i \Delta L \tag{7}$$

上式中 $\Delta x = [u_1 \quad u_2 \quad \cdots \quad u_m \quad v_1 \quad v_2 \quad \cdots \quad v_m]^T$ ， $H_i = T_i N^{-1} A^T P$ ，T_i 矩陣可由(6)式中之Q_i矩陣組成：

$$T_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & Q_i & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & Q_i & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{8}$$

巴達之可靠度理論中假設諸多觀測量中每次只有一觀測量俱有粗差，則點 i 處因觀測量粗差所引起之變形向量爲：

$$vec(E_i) = H_i \Delta L = H_i \nabla_k = h_k \nabla_{0k} \tag{9}$$

上式中粗差向量 $\nabla_k = [0 \ \cdots \ \nabla_{0k} \ \ 0 \cdots]$ ，k=1,2,…,n，n爲觀測量總數。

$\nabla_{0k} = \frac{\sigma_k \delta_0}{\sqrt{r_k}}$ 表在顯著水準α及檢驗功效β之下觀測值L_k未被偵測出之粗差。δ_0爲非中心化參數，σ_k表L_k的觀測標準差，r_k表其多餘觀測數。h_k爲H_i矩陣第k行的行向量。

對每個點位而言，每個觀測量都可產生一個 $vec(E_i)$，因此共有 n 個變形矩陣；而在穩健度

分析裡每一E_i可產生三個變形指標，所以每一點位上可算得$3n$個變形指標，即σ_i、γ_i、δw_i各有n個，每一變形指標皆取其最大絕對值作爲代表研究點之穩健度，絕對值愈小表點位愈穩健愈不易受粗差影響。另外，在網的最小約制基準下，上述三個變形指標不受基準原點平移與坐標系旋轉的影響，即原點平移與坐標系旋轉並不會改變三個變形指標的值，惟三個變形指標值與網的尺度基準定義有關，不過尺度基準改變時，對三個變形指標所產生的效應相當微小，可以忽略不計。(Vanicek et al.，2001)

四、變形向量進一步推導

設改正數協方差矩陣爲Q_v，各觀測量的多餘數可由下式的對角元素取得：

$$R = Q_v P = I - AN^{-1}A^T P \tag{10}$$

上式中等號的左右兩邊各前乘A^T，得$A^T R = A^T - A^T A N^{-1} A^T P$。重新整理可得：

$$N^{-1}A^T P = (A^T A)^{-1} A^T U = A^+ U \quad (U = I - R)$$

上式中 $A^+ = (A^T A)^{-1} A^T$ 表A矩陣之偽逆陣(pseudo inverse matrix)。(Hsu，2001)

藉由(11)式改寫(9)式爲：

$$vec(E_i) = (T_i N^{-1} A^T P)_k \nabla_{ok} = (T_i A^+ U)_k \nabla_{ok} = (G_i U)_k \nabla_{ok} \quad (G_i = T_i A^+) \tag{12}$$

上式中，4×n矩陣G_i爲點i處的運作元，它把矩陣U中的元素一一傳遞給變形向量$vec(E_i)$。U與G_i矩陣可表成如下形式(Hsu，2003)：

$$U = \begin{bmatrix} U_1 & U_2 & \cdots & U_n \end{bmatrix} \quad G_i = \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \\ G_3 \\ G_4 \end{bmatrix} \tag{13}$$

G_p表爲列向量，U_k表爲行向量

$$G_p = \begin{bmatrix} g_{p1} & g_{p2} & \cdots & g_{pn} \end{bmatrix} \quad p = 1,2,3,4 \tag{14}$$

$$U_k = \begin{bmatrix} u_{1k} \\ u_{2k} \\ \vdots \\ u_{nk} \end{bmatrix} \quad k = 1,2,\cdots,n \tag{15}$$

由(14)、(15)式，(12)式中之$G_i U$可表成：

$$G_i U = \begin{bmatrix} G_1U_1 & G_1U_2 & \cdots & G_1U_n \\ G_2U_1 & G_2U_2 & \cdots & G_2U_n \\ G_3U_1 & G_3U_2 & \cdots & G_3U_n \\ G_4U_1 & G_4U_2 & \cdots & G_4U_n \end{bmatrix} \tag{16}$$

上式中各個元素表示如下(Hsu，2003)：

$$G_pU_k = g_{pk}u_k + \sum_{j=1}^{n} g_{pj}u_{jk} \quad p=1,2,3,4 \quad k=1,2,\cdots,n \quad j\neq k \tag{17}$$

其中 $u_k = u_{kk} = 1 - r_{kk} = 1 - r_k$ ，u_k為第k個觀測量之參數數(Hsu，2000)，它為U矩陣當中列=行=k的對角線元線。$u_{jk} = -r_{jk}$ ，為U矩陣當中的非對角線元素。p編號從1到4，即變形向量$vec(E_i)$的維度為4。

依(17)式，(12)式可表為：

$$vec(E_i)_p = g_{pk}u_k\nabla_{ok} + \sum_{j=1}^{n} g_{pj}u_{jk}\nabla_{ok} \quad j\neq k \quad k=1,2,\cdots,n \quad k=1,2,3,4 \tag{18}$$

由上式知，$vec(E_i)p$ 由兩項所組成：第一項為，$g_{pk}U_k\nabla_{ok}$由第k個觀測量所提供，第二項為$\sum_{j=1}^{n} g_{pj}u_{jk}\nabla_{ok}$不含第k個之其他觀測量之總和。$u_k$為U矩陣的對角線元素，它恆為正，$g_{pk}$的數值可為正或負，而$u_{jk}$則為U矩陣中的非對角線元素，它的數值也可為正或負，但g_{pj}與u_{jk}相乘並連加後有可能造成數值相消的情形，因此變形向量$vec(E_i)p$的數值是由等號右邊第一項$g_{pk}U_k\nabla_{ok}$所主宰，當整個變形向量的元素數值較大，也就是研究點穩健度較差時，可推測主要是由第k個觀測量所造成。第一項稱之為自身項，第二項為補充項(Hsu，2003)。

變形向量分成二項後，可輕易地進行分析與研究，當多餘數r_i愈小（參數數u_k愈大），(18)式中等式右邊的第一項愈大，佔整個變形向量數量級的百分比將愈大，因而可由此概念對測量網中點位之穩健度進行研究，查看某一穩健度指標（即變形指標）由第k個觀測量所造成的百分比。

五、變形指標之分解式

根據(18)式，由編號k的觀測量所造成的變形指標，可分解成為自身項與補充補項，其形式如下(Hsu，2003)：

1.平均應變(Mean strain) σ

平均應變的自身項L_k^σ與補充項C_k^σ之分解式如下：

$$\sigma = \frac{1}{2}(g_{1k}+g_{4k})u_k\nabla_{ok} + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(g_{1j}+g_{4j})u_{jk}\nabla_{ok} = L_k^\sigma + C_k^\sigma,\ j\neq k \tag{19}$$

(19)式中等號右邊的第一項$L_k^\sigma = \frac{1}{2}(g_{1k}+g_{4k})u_k\nabla_{ok}$為點位上之平均應變σ由第k個觀測量造成之自身項；第二項$C_k^\sigma = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(g_{1j}+g_{4j})u_{jk}\nabla_{ok}$為補充項，它由非第k個觀測量連加所組成。以下總剪應變與微小旋轉之自身項與補充項之組成方式與平均應變相同，因此不多作說明。

2.總剪應變(Total shear) $\gamma = \frac{1}{2}\sqrt{\tau^2 + \upsilon^2}$

(a)純剪應變(Pure Shear) τ

自身項L_k^τ與補充項C_k^τ之分解式如下：

$$\tau = \frac{1}{2}(g_{1k} - g_{4k})u_k\nabla_{ok} + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(g_{1j} - g_{4j})u_{jk}\nabla_{ok} = L_k^\tau + C_k^\tau, j \neq k \tag{20}$$

(b)簡剪應變(Simple Shear) υ

自身項L_k^υ與補充項C_k^υ之分解式如下：

$$\upsilon = \frac{1}{2}(g_{2k} + g_{3k})u_k\nabla_{ok} + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(g_{2j} + g_{3j})u_{jk}\nabla_{ok} = L_k^\upsilon + C_k^\upsilon, j \neq k \tag{21}$$

3.微小旋轉(Differential rotation) w

自身項L_k^ω與補充項C_k^ω之分解式如下：

$$\omega = \frac{1}{2}(g_{3k} - g_{2k})u_k\nabla_{ok} + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(g_{3j} - g_{2j})u_{jk}\nabla_{ok} = L_k^\omega + C_k^\omega, j \neq k \tag{22}$$

以下僅就變形指標中之平均應變進行討論與歸納，總剪應變與微小旋轉指標的情形可類推之。

測量網中，一但網形與觀測量的權矩陣確定後，(16)式中之G_pU_k便固定不變。多餘數愈大，也就是參數數愈小，點位上的自身項將愈小，但這並不保證多餘數愈大，點位上的平均應變數值就愈小，因爲(19)式中之$g_{1k}, g_{4k}, g_{1j}, g_{4j}$及$u_{jk}$並無法以數學推導的方式定義出它們的正負號(Hsu，2003)。

雖然無法確定多餘數較小一定會導致平均應變值較大（即穩健度較差），一般而言，平均應變值較大，大都起因於多餘數較小之故，也就是當$\sigma_1>\sigma_2$時，常有$r_1<r_2$的現象。

根據(Seemkooei，2001a、b)所作的模擬實驗顯示，在大部份的情形下，由於測量網之外圍點位之測線數較少，常是弱穩健度之點位之所在。該文中並提到弱穩健度乃是由於點位上之多餘數較小造成。在(19)式、 (20)式、(21)式與(22)式中明確地表達穩健度與多餘數呈反比關係，爲 Seemkooei 的實驗提供了理論依據。因此穩健度較差之點，可以預期其上之多餘數總和較小或參數數總和較大。

六、台灣一等 GPS 網之穩健度

1.變形指標：

台灣 98 個一等衛星點計有點 4、7、8、11、16（分別爲鯉魚山、大森山、都蘭山、壽卡及綠島）的三個變形指標數超大，穩健度最差，這些點位皆位於東部、東南部，此地方可歸類成同一等級。另台灣沿海之各點位穩健度皆較差，可歸因於沿海點位之測線數目較少與內群體觀測量（點位上之測線）之多餘數總和較小。

2.點位變形與多餘數之相關性：

依第四及第五兩節之討論，變形指標值與測線之多餘數成反比，求取變形指標最大值與造成最大值之測線多餘數的相關係數列於表 1。數據上展現平均應變、總剪應變與局部微小旋轉均與此測線之多餘數呈中度負相關。

表 1　台灣一等 GPS 點變形指標與造成指標值測線之多餘數之相關係數

	平均應變	總剪應變	局部微小旋轉
相關係數	-0.554	-0.640	-0.516

3.內群體觀測量所造成之變形：

計算三個變形指標由內群體觀測量造成之百分比，如表2。表中顯示除了局部微小旋轉外，98 個網點中由內群體觀測量造成平均應變和總剪應變的百分比不如預期高，表示除了內群體觀測量外，尚有其它原因造成弱穩健度。

表 2　台灣一等 GPS 點上由內群體觀測量形成穩健度最差所佔百分比

	平均應變	總剪應變	局部微小旋轉
百分比	44%(43/98)	40%(39/98)	6%(7/98)

4.自身項的百分比與內群體觀測量多餘數之相關性：

理論推測，自身項應佔絕大部份，台灣一等衛星網確如理論所推測。表 1 驗證變形指標與點位上的多餘數成反比，從理論公式推導上又可知自身項佔百分比較高，自身項與多餘數的相關性顯然應更高，因此再求取其與點位上內群體觀測量多餘數總和之相關係數，成果數據如表 3(L.C.表自身項)，惟表中的相關係數並未能大幅提升顯示台灣一等 GPS 網未如理論預期。

表 3　變形指標的自身項佔全部百分比與內群體觀測量多餘數總和之相關係數

	平均應變L.C.	純剪應變L.C.	簡剪應變L.C.	局部微小旋轉L.C.
相關係數	-0.603	-0.551	-0.640	-0.567

5.穩健度與點位精度之相關性：

求取此網形的法方程式矩陣之逆矩陣 N^{-1} 可得 98 個一等點位之先驗平均精度，爲探求點位精度與穩健度指標相關的程度，因而求取每一變形指標與點位先驗平均精度之相關係數如表 4。由表中知點位穩健度與點位的先驗精度呈現高相關的情形，但在局部微小轉旋相關性較低，透露出無法由 N^{-1} 推測網形是否會旋轉。就本研究而言，穩健度分析可量化網點變形的程度，可爲網形設計時另一種參考。

表 4　台灣一等 GPS 網之變形指標與其點位平均精度之相關係數

	平均應變	總剪應變	局部微小旋轉
相關係數	0.80	0.62	0.16

七、結論

1.台灣一等衛星點之穩健度以東南部點位較差，其次爲沿海之點位。以可靠度論之則是因爲爲這些點位上之內群體觀測量之多餘數總和較小。

2.位於東南部衛星點位之可靠度與穩健度可作補強之動作，可採取下列作法以補強：降低這些區域觀測量之權，以減少未被偵測出來之粗差對於其它點位估計之影響；增加外圍點位之聯測數目，就 GPS 觀測而言即加入外圍點位之間之基線向量。

3.穩健度分析可衡量並降低粗差對點位位置之影響，不失爲網形設計時另一項參考工具。

參考文獻

1. Hsu R., 2003 Further expressions for the deformation primitives of a horizontal network, a manuscript copy.
2. Hsu R., 2002 Adjustment Treatments of Surveying Measurements, lecture note, Dept. of Civil Engr. National Taiwan University.
3. Seemkooei A. A., 2001a. Comparison of reliability and geometrical strength criteria in geodetic networks, Journal of Geodesy, vol. 75, No. 4, 227-233.
4. Seemkooei A. A., 2001b. Strategy for designing geodetic network with high reliability and geometrical strength, Journal of Surveying Engineering, vol. 127, No. 3, 104-117.
5. Vanicek P., Craymer M. R., Krakiwsky E.J. 2001 Robustness analysis of geodetic horizontal networks, Journal of Geodesy, vol. 75, No. 4, 199-209.