

行政院國家科學委員會專題研究計畫 成果報告

利用小波理論建立水文系統的時間和空間尺度參數化方法  
(I)

計畫類別：個別型計畫

計畫編號：NSC91-2313-B-002-325-

執行期間：91年08月01日至92年07月31日

執行單位：國立臺灣大學土木工程學系暨研究所

計畫主持人：徐年盛

報告類型：精簡報告

處理方式：本計畫可公開查詢

中 華 民 國 93 年 2 月 20 日

# 行政院國家科學委員會專題研究計畫成果報告

## 利用小波理論建立水文系統的時間和空間尺度參數化方法(一)

### Development of a Methodology for Parameterization of Time scale and Space scale in Hydrological Systems Based on Wavelet Theory (I)

計畫編號：NSC 91-2313-B-002-325-

執行期限：91年8月1日至92年7月31日

主持人：徐年盛 台灣大學土木工程學系及研究所 副教授

Email：nsshue@ntu.edu.tw

## 一、中文摘要

對於異質性地下水系統而言，介質的異質性和空間變異性是地質層本身固有的特徵，它導致滲透性能的空間變異性而直接影響地下水流動和污染物傳輸過程。因此，如何將模擬地區的地質參數適切的描述，是模擬結果準確與否的關鍵因素之所在。本研究從探討物理模式中參數的尺度效應，建立一套小波理論為基礎的分析方法，用以將異質性地下水系統之參數的尺度量化，研究中首先利用小波母函數，建立一維異質性地下水系統水力傳導係數與壓力水頭之小波能譜理論關係。其次，利用人工產生之非定常性水力傳導係數場，以正向問題方法，分析與比對實際能譜和小波分析建立能譜之間的對應關係；以及探討尺度效應與異質性地下水系統小波能譜的關係。本研究已完成建構一個可以同時處理定常性和非定常性地水問題的通式化方法的理論推演，數值實例驗證部分初步結果顯示小波分析理論所建構尺度化分析方法，可以辨識地層中的不連續現象(如斷層)及非定常性(異質性)行爲。

**關鍵詞：**異質性、非定常性、小波母函數、小波能譜、尺度效應。

affects the water and pollutant transport process directly. A key factor of simulating results depends on whether the parameters of the subsurface system were parameterized properly or not. In this study, a wavelet based analysis is applied to evaluate the scale effects of parameters and to develop a quantitative method of parameter scales. First, the wavelet kernel function is used to derive the theoretical relationship between the wavelet spectrum of piezometric head and hydraulic conductivity in a one-dimensional heterogeneous system. Furthermore, by solving forward problem, the relationship between the wavelet spectrum energy of nonstationary hydraulic conductivity field that is generated artificially and the actual energy is analyzed. Finally, the scale effects that contribute to wavelet spectrum energy in the heterogeneous groundwater system are investigated. A general theoretical solution for tackling both stationary and nonstationary process was developed. The numerical examples showed that wavelet-based approach was able to identify both discontinuity and pattern of heterogeneous for the nonstationary hydraulic conductivity of subsurface groundwater system.

**Keywords:** heterogeneous, nonstationary, kernel function, wavelet spectrum, scale effects

## Abstract

For the heterogeneous subsurface system, the heterogeneity and the spatial variability are the intrinsic properties of porous media which

## 二、研究目的

### 2.1. 地層中空間異質性和尺度問題

天然孔隙介質的孔隙結構是由孔隙和孔隙骨架所構成的非連續體，在大於孔隙結構尺度代表單元體積(REV)的線性尺度上，是具有空間變異性的連續體。因此代表單元體積的線性尺度是天然孔隙介質具有實用意義的起始研究尺度，在此尺度以下是描述孔隙結構的微觀尺度。傳統上，探討有關水流及污染物傳輸流經孔隙介質的過程，是建立在這樣的一個平均尺度上質量的連續性和動量平衡為基礎。圖一為 Gelhar(1994) 用來說明流體在孔隙介質中流動尺度範圍，從微觀的分子尺度(約  $10^{-8}$  以下)藉由平均的方式而達到滿足流體力學中的連體假設，而孔隙介質中則藉由 R.E.V 的概念再作一次平均得到滿足孔隙介質的連體假設，透過這種逐級平均的方式，求得屬於各個研究範圍的代表尺度，圖一顯示由於水力傳導度在空間的變異造成異質性的尺度範圍約在  $10^{-2}$  m 到  $10^3$  m 之間。

從影響地下水運動和溶質傳輸的角度而言，天然孔隙介質主要參數是水力傳導度、孔隙率和儲蓄係數，他們的空間變異決定了含水層的水力特徵及其空間變異特徵。空間變異統計結構的描述與空間擴展尺度及尺度結構有關，孔隙介質的水力參數特別是水力傳導係數，在同一尺度和不同尺度的空間區域內可呈若量的量級的變化，在黏土和砂礫的交互沉積的含水層中，水力傳導度變化的幅度可達 13 個量級，孔隙率變化幅度可達 2 個量級(約 0.01~0.60) (楊, 2000)。大尺度空間區域中水力傳導係數空間變異性統計特徵，控制着流體流動和溶質傳輸主要通道和路徑統計結構；小尺度空間區域中水力傳導係數空間變異特徵控制流速空間分佈和溶質傳輸延散結構。孔隙介質參數空間變異性，決定於基本沉積結構單元的孔隙結構特徵和沉積環境，一個大尺度的含水層包含多種類型的

沉積、地層單元，參數的空間變異統計結構與含水層空間擴展尺度有密切的關係。因此，要建立含水層參數空間變異結構需要引入空間變異尺度的概念。Dagan 1986 提出建立異質性與模擬尺度關係時，將尺度分為：實驗室尺度(laboratory scale or bench scale)，局部尺度(local scale)，及區域尺度(regional scale)三種基本尺度如表一所示，表中  $L$  代表流場空間擴展範圍的基本長度； $l$  代表描述空間變異性變量的相關長度，也就是空間中兩隨機變量不具有相關性的空間距離； $D$  代表變數體積平均的長度，這長度與量測工具尺寸有關。Dagan 認為，分析時  $l$ 、 $D$  和  $L$  這三種長度尺度扮演很重要的角色，在實驗室尺度時通常  $l \ll D \ll L$  的情況很普遍，因此滿足遍歷性的條件，整體統計平均可藉由體積平均求得；在局部尺度時，這種關係較不明顯，因此以孔隙介質有效的特性(例如，有效水力傳導係數)來表示；而在區域尺度時， $D \ll l$  是經常出現的情況，例如我們經常所能獲得的是在該區域內的點量測值，因此不確定性變得很大，需要採用更高次的統計動差或利用地質統計方法來達成。

### 2.2. 傳統統計方法的限制

應用上地質統計方法經常會假設二階定常性或內在假設，然後藉著一階動差或二階動差來求得隨機變量的統計量，也就是定常性假設下的特性尺度及參數值，空間域(space domain)通常以相關函數(correlation function)或是藉由傅利葉轉換將之轉換至頻率域以頻譜密度函數(spectra density function)來分析(Gelhar, 1994)，然而傅利葉轉換是屬於定常性理論基礎下的一種全域轉換。一般而言，地層中水文地質參數的主要空間頻率及相關尺度在空間上變化很大，亦具有空間的異質性的多尺度結構，而且可能均具有非線性的行為，這種情況下定常性理論基礎下的分析方法就有些不足以應付，例如，若我們想知道異質性變量在某些局部位置空間的變化情

況，就須以空間-頻率(或時間-頻率)二維表示方式才能達成。本研究的主要目的包括：探討尺度效應表現在自然狀況的異質性方式及特性、以小波分析理論建立一套描述地層的異質性，以及建立異質性與尺度效應於數值模擬的定性關係。

### 三、研究方法

本研究以小波分析理論來建構中水文系統的時間尺度和空間尺度參數化，本節內容主要包括波分析之基本理論背景、傅利葉能譜和小波能譜的守恆關係、傅利葉轉換至小波轉換的類比，以及傅利葉轉換應用於非定常性序率過程之推廣等四個內容，茲分述如下。

#### 3.1 小波轉換之理論背景

傅利葉轉換(FT)是在科學及很多工程領域中重要的應用工具，傳統的訊號分析是建立在傅利葉轉換的基礎上，以時變訊號  $s(t)$  為例，其連續傅利葉轉換的定義為：

$$S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) e^{-2i\pi f\tau} d\tau \quad (3-1)$$

其逆轉換為：

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(f) e^{2i\pi ft} df \quad (3-2)$$

從(3-1)式和(3-2)式中可看出，傅利葉轉換屬於全域的轉換，換言之，傅利葉轉換時間域和頻率域完全分開，傅利葉轉換後看不到時間的訊息，當我們對於某個特定時間點的能量感興趣時，從(3-1)式中是找不到任何端倪的，這也是非定常性(或異質性)資料最關鍵的性質。

Gabor 於 1946 年提出的所謂短時傅利葉轉換 (STFT)，是屬於一種線性時-頻的表示方式，主要是用來分析非定常性訊號的問題，其概念是將時變訊號  $s(t)$  乘上一個中心位置在  $t$  且具有限制範圍的視窗  $h(t)$  即：

$$F_x(t, f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h^*(\tau - t) e^{-2i\pi f\tau} d\tau$$

(3-3)

這個定義提供一個重要結果，即只要是有限範圍的視窗，就可找到原始訊號與短時傅利葉轉換之間一對一關係使得正轉換和逆轉換的關係存在。此轉換雖然解決傅利葉轉換在分析非定常性訊號方面的問題，但其仍存在一個瓶頸，即不能根據低、高頻信號的特點自動調整時-頻視窗，表現在時-頻局部化的細緻和靈活度方面較不理想。

而小波轉換主要概念是將(3-3)式中頻率域的平移運算以一個時間域中的尺度運算給于取代，是以一個有限支撐的函數  $\psi(t)$  與時變訊號  $s(t)$  做褶合積分，即

$$W_s(\tau, a) = \int_{\mathbb{R}} s(t) \psi\left(\frac{t-\tau}{a}\right) dt = \langle s(t), \psi_{a\tau}(t) \rangle \quad (3-4a)$$

$$= \frac{\sqrt{a}}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} S(\omega) \Psi(a\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \quad (3-4b)$$

式中， $W_s(\tau, a)$  是訊號  $s(t)$  的連續小波轉換係數； $a > 0$  稱為尺度因子； $\tau$  稱為平移因子； $S(\omega)$  是訊號  $s(t)$  的傅利葉轉換； $\Psi(a\omega)$  是小波母函數  $\psi_{a\tau}(t)$  的傅利葉轉換。而將訊號  $s(t)$  做小波轉換就意味著將一個時間函數投影到二維的時間-頻率平面上，而  $\psi_{a\tau}(t)$  稱為小波母函數基底其定義為：

$$\psi_{a\tau}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-\tau}{a}\right) \quad (3-5)$$

從(3-5)式可看出小波母函數基底乃是透過小波母函數(wavelet kernel function)  $\psi(t)$  的平移以及脹縮所形成的一組基底，式中  $\tau$  反應平移量，而  $a$  反應脹縮量。小波母函數有多種形式，建構方法也可不同，然而小波母函數必須滿足一些數學條件(楊福生, 2000)，才能被用來當作小波母函數，這些條件包括：

- (1) 有限的支撐長度(finite support)  
即在橫軸的兩端不會有無窮遠的漸進線，也就是在橫軸的某個位置含數值一定會與橫軸相交。
- (2) 容許條件 (admissible condition)

即： $C_\psi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Psi(\omega)}{\omega} d\omega < \infty$ ，以便保證小波轉換可以逆轉回來。

(3) 正規性(regularity condition)

即： $\int t^p \psi(t) dt = 0$ ， $p = 1 \sim n$ ，且  $n$

值越大越好。

(4) 對稱性 (symmetry)

即函數對稱於縱軸，因此可滿足對函數積分為零的特性。

其中(3)和(4)項為非必要條件，只是滿足該條件時，母函數的特性會比較好若滿足(2)的條件，則(3-4a)的逆轉換為：

$$s(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a^2} W_s(a, \tau) \psi_{a\tau}(t) d\tau da \quad (3-6)$$

由於小波母函數僅需滿足上述條件，就可用來當作分析的核函數，因此小波母函數具有不唯一性與多樣性，故較傳統傅利葉更具彈性，傅利葉只有  $\sin(\omega t)$ ,  $\cos(\omega t)$ ,  $\exp(i\omega t)$  等基底函數，故具有唯一性，在工程應用中，選擇最佳小波母函數基底是一個很重要的工作，因為利用不同小波母函數基底分析同一問題對結果的判釋會稍微有差異，Pando 等(1998)曾利用小波基底對訊號(資料)分析結果與理論分析結果的誤差來判定小波母函數基底的好與壞，目前已經被數學家推導出來，並常被引用的小波母函數有 Harr Wavelet, Daubechies Wavelet, Mexican Hat Wavelet, Morlet Wavelet 以及 Meyer Wavelet 等。

在此須進一步說明是，由於上述理論，最早均被應用在訊號處理的時間序列問題；若我們將上面討論的時間序列問題視為空間序列問題，亦即用來處理空間異質性問題時，其邏輯上是完全相同的，只需將原本為時變訊號  $s(t)$  變成空間變異訊號時變訊號  $s(x)$ ，而前面所討論的各種轉換的關係依然成立。

### 3.2 傅利葉能譜和小波能譜的守恆關係

就如同傅利葉頻譜分析一樣，無論用哪一種轉換方法當成轉換的工具，當我們把一訊號  $s(t)$  從時間域轉換到頻率域時，其總能量  $E$  在時間域及頻率域必須滿足守恆條件即：

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |s(\tau)|^2 d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} |S(f)|^2 df \quad (3-7)$$

同樣的，短時傅利葉轉換是在二維  $(t, f)$  平面上， $|F_s(t, f)|^2$  表示在某特定時間  $\tau$  和頻率  $f$  的能量，其總能量與訊號之關係為：

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |s(\tau)|^2 d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |F_s(t, f)|^2 dt df \quad (3-8)$$

小波轉換是在二維  $(\tau, a)$  平面上， $|W_s(\tau, a)|^2$  表示在某特定時間  $\tau$  和尺度  $a$  的能量，其總能量與訊號之關係為：

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |s(\tau)|^2 d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |W_s(\tau, a)|^2 \frac{d\tau da}{a^2} \quad (3-9)$$

從 (3-7)、(3-8) 及 (3-9) 式可看出三者的關係，短時傅利葉頻譜是將訊號的局部能量分佈在在  $(t, f)$  平面上；而小波頻譜是將訊號的局部能量分佈在在  $(\tau, a)$  平面上，而傅利葉頻譜則是將時間域的能量和頻率域的能量完全分離出來且時間域與頻率域的總能量相等。

### 3.3 傅利葉轉換至小波轉換的類比

傅利葉轉換在處理定常性(或均質性)序率過程時自相關函數與頻譜密度函數間的關係：

$$\begin{array}{ccc} s(t) & \stackrel{F.T.}{\Leftrightarrow} & S(f) \\ \downarrow & & \downarrow \\ R_{ss}(\tau) = E[s(t)s(t-\tau)] & \stackrel{F.T.}{\Leftrightarrow} & S_{ss}(f) = |S(f)|^2 \end{array} \quad (3-10)$$

式中， $S(f)$  為  $s(t)$  的傅利葉轉換，而  $R_{ss}(\tau)$  和  $S_{ss}(f)$  分別是序率過程  $s(t)$  的自相關函數與頻譜密度函數。在序率地下水文學的領域中均以此觀念為出發點，如 Kitanidis, 1983; Dagan, 1989; Gelhar, 1993 等。

利用上述的類比關係將小波轉換延伸 (Flandrin,1988) 以處理非定常性(異質性)序率過程的問題，則小波轉換將能應用於更廣的範疇。

$$\begin{array}{ccc} s(t) & \stackrel{W.T.}{\Leftrightarrow} & W_s(\tau, a) \\ \downarrow & & \downarrow \\ WVD_s(t, f) & \stackrel{E.q.(15)}{\rightarrow} & |W_s(\tau, a)|^2 \end{array} \quad (3-11)$$

式中， $W_s(\tau, a)$  為  $s(t)$  的小波轉換，而  $WVD_s(t, f)$  稱為 Wigner 分佈 (Claasen and Mecklenbräuker,1980; Cohen,1989)，其主要是用來從事非定常性訊號問題的時-頻分析，其定義為：

$$WVD_s(t, f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{ss}(t + \frac{\tau}{2}, t - \frac{\tau}{2}) e^{-i2\pi f\tau} d\tau \quad (3-12)$$

故其總能量為

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |s(\tau)|^2 d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} WVD_s(t, f) \cdot df dt \quad (3-13)$$

而我們有興趣的小波頻譜和 Wigner 分佈的關係 (Flandrin,1988) 為

$$|W_s(\tau, a)|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} WVD_s(u, f) \cdot WVD_\psi(\frac{u-\tau}{a}, af) dudf \quad (3-14)$$

從(3-14)是可看到用來分析非定常性(異質性)歷程的問題的小波轉換與 Wigner 分佈間的關聯，就好像用來分析定常性(均質性)歷程傅利葉與的連結一樣。事實上，(3-10)式和(3-11)式的類比關係並未完全對應，若將(3-11)式改成下列關係：

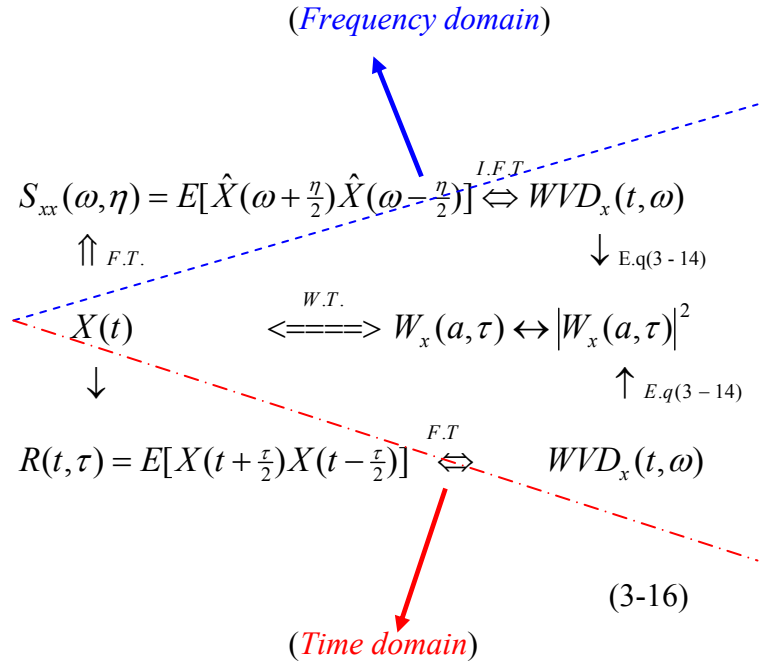
$$\begin{array}{ccc} s(t) & \stackrel{W.T.}{\Leftrightarrow} & W_s(\tau, a) \\ \downarrow & & \downarrow \\ R_{ss}[s(t + \frac{\tau}{2})s(t - \frac{\tau}{2})] & \stackrel{F.T.}{\Leftrightarrow} WVD_s(t, \omega) \stackrel{E.q.(5)}{\rightarrow} & |W_s(\tau, a)|^2 \end{array} \quad (3-15)$$

則可清楚的看出傅利葉轉換與 Wigner 分佈及小波轉換之間清楚的類比關係。從(3-15)式可看出非定常性(異質性)歷程經轉換後時間和頻率(或時間和頻率)會同時存在，不像定常性

(均質性)歷程，時間域(空間域)經傅利葉轉換後全部變成頻率而看不到時間(空間)。

### 3.4 傅利葉轉換應用於非定常性序率過程之推廣

我們可以將(3-15)式作進一步推廣改寫成(3-16)式的形式，其可應用在與更廣的範圍，其包含定常性及非定常性序率過程。



(3-16)式是(3-10)式的類比並加以推廣，它將解決問題的方法通式化，亦即(3-16)式可用於各種情況包括定常性和非定常性等問題，對定常性問題而言，它僅僅是(3-16)式的一個特例 (special case)。同樣的若將(3-16)式中的時間域(time domain)，改成空間域(space domain)則可用來處理空間異質性問題。

### 四、空間變異性分析 (spatial variability analysis)

考慮一維穩態異質性序率地下水系統的控制方程式如下(Gelhar,1994)：

$$\frac{d}{dx} \left( K(x) \frac{d\phi}{dx} \right) = 0 \quad (4-1)$$

式中， $\phi(x)$  為總水頭； $K(x)$  為飽和水力傳導

係數，假設為一個序率過程； $x$  為水平方向座標，(4-1)式可以改寫成：

$$\frac{d \ln(K)}{dx} \frac{d\phi}{dx} + \frac{d^2 \phi}{dx^2} = 0 \quad (4-2)$$

利用微小擾動法 (perturbation method)

$$\begin{aligned} \ln K &= F + f(x) \\ \phi(x) &= H(x) + h(x) \end{aligned} \quad (4-3)$$

其中， $F = E[\ln K]$  且  $E[f] = 0$ ； $H(x) = E[\phi(x)]$  且  $E[h] = 0$

將(4-3)式代入(4-2)式，且忽略高階項  $\frac{d^2 H}{dx^2}$ ，

則得擾動控制方程式可表示為：

$$\frac{d^2 h}{dx^2} + J \frac{df}{dx} \approx 0 \quad (4-4)$$

#### 4.1 利用定常性方法來求解

在求解(4-4)式時，傳統的序率地下水文學的方法是傅利葉頻譜分析理論為基礎 (Gelhar, 1993)，假設序率過程為定常性，而定常性分析方法主要是根據傅利葉-史提吉斯展開法 (Fourier-Stieltjes representation) 為基礎，廣泛應用在定常性序率地下水系統中，其主要概念係假設(4-4)式中  $h$  和  $f$  滿足統計上的定常性，其可表示為：

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega x} dZ_f(\omega) \quad (4-5)$$

$$h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega x} dZ_h(\omega) \quad (4-6)$$

式中  $dZ_f(\omega)$  和  $dZ_h(\omega)$  分別是  $f(x)$  和  $h(x)$  的序率過程，其主要特性是  $E[dZ(\omega)] = 0$  且  $E[dZ(\omega)dZ^*(\omega)] = 0$ ， $dZ^*(\omega)$  與  $dZ(\omega)$  互為共軛，而  $\omega$  代表角頻率。將(4-5)式及(4-6)式代入(4-4)式得：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \{(i\omega)^2 \cdot e^{i\omega x} dZ_h + J(i\omega) \cdot e^{i\omega x} dZ_f\} = 0 \quad (4-7)$$

則

$$dZ_h = \frac{-J}{i\omega} dZ_f \quad (4-8)$$

函數  $h$  的頻譜密度函數可表為：

$$S_{hh} = \frac{J^2}{\omega^2} S_{ff} \quad (4-9)$$

式中， $S_{hh} = E[dZ_h \cdot dZ_h^*]$  為函數  $h$  的頻譜密度函數； $S_{ff} = E[dZ_f \cdot dZ_f^*]$  為函數  $f$  的頻譜密度函數，從上式可看出， $S_{hh}$  在波數等於零時會有奇異點發生。因此必須引入一些符合物理限制條件，即讓水力傳導度的頻譜函數  $S_{ff}$  在零附近比更快趨近於 0，在物理上，相對於這樣的情況，即是要求震幅在低頻時相對非常小。滿足這樣的頻譜函數又叫做“hole function”即：

$$S_{ff}(\omega) = \frac{2\omega^2 \sigma_f^2 l^3}{\pi(1 + \omega^2 l^2)^2} \quad (4-10)$$

其對應的變異數函數為

$$R_{ff}(\xi) = \sigma_f^2 (1 - |\xi|/l) e^{-(|\xi|/l)} \quad (4-11)$$

式中  $l$  是相關長度。

#### 4.2 利用小波分析法來求解

然而自然界的水文歷程及現象絕大部分屬於非定常性(或是空間上的異質性)，吳等 (2002) 曾利用統計方法證明資料的非定常性現象，該資料被假設成定常性而以傅利葉頻譜分析理論來分析。若考慮序率水文過程資料的非定常性現象，以小波轉換來分析求解(4-4)式，則式中  $h$  和  $f$  沒有統計上的定常性或非定常性的限制，利用(3-6)式將  $h$  和  $f$  作小波逆轉換如下：

$$h(x) = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a^2} W_h(a, \tau) \psi_{a\tau}(x) d\tau da \quad (4-12)$$

及

$$f(x) = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a^2} W_f(a, \tau) \psi_{a\tau}(x) d\tau da \quad (4-13)$$

代入(4)式得：

$$\frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{1}{a^{3/2}} W_h(a, \tau) \psi_{a\tau}''(x) + \frac{J}{a^{3/2}} W_f(a, \tau) \psi_{a\tau}'(x) \right\} d\tau da = 0 \quad (4-14)$$

則：

$$W_h(a, \tau) = -aJ \frac{\psi'_{a\tau}(x)}{\psi''_{a\tau}(x)} W_f(a, \tau) \quad (4-15)$$

(4-15)式中右手邊  $\frac{\psi'_{a\tau}(x)}{\psi''_{a\tau}(x)}$  項若採用適當的小波母函數，則就可容易的找到  $h$  和  $f$  間小波係數的解析關係。接下來說明如何以高斯函數 (Gaussian function) 來推導小波函數 (Lewalle,1998)，高斯函數的表示式為：

$$\psi(z) = e^{-\frac{z^2}{2}} \quad (4-16)$$

(16)式的一次微分為

$$\psi'(z) = -z \cdot e^{-\frac{z^2}{2}} \quad (4-17)$$

若將(4-16)式微分二次可得到

$$\psi''(z) = (z^2 - 1) \cdot e^{-\frac{z^2}{2}} \quad (4-18)$$

若將(4-16)式微分三次可得到

$$\psi'''(z) = (-z^3 + 3z) \cdot e^{-\frac{z^2}{2}} \quad (4-19)$$

則(4-17)(4-18)及(4-19)式做縮張(dilation)和平移(translation)則得三組小波基底函數，其分別為：

$$\psi'_{a\tau} = \left(\frac{x-\tau}{a}\right) \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\tau}{a}\right)^2} \quad (4-20)$$

(4-20)式又稱為反對稱小波基底函數 (anti-symmetric wavelet)，

$$\psi''_{a\tau} = \left[\left(\frac{x-\tau}{a}\right)^2 - 1\right] \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\tau}{a}\right)^2} \quad (4-21)$$

(4-21)式又稱為墨西哥草帽小波基底函數 (Mexican hat wavelet)，

$$\psi'''_{a\tau} = \left[-\left(\frac{x-\tau}{a}\right)^3 + 3\left(\frac{x-\tau}{a}\right)\right] \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\tau}{a}\right)^2} \quad (4-22)$$

(4-21)式又稱  $g_3$  小波基底函數 (Gaussian third order wavelet)雖然高斯函數本身並不滿足作為小波函數的要件；然而其各階導數卻都能滿足作為小波函數的要件。若取反對稱小波基底函數(4-20)式作為(3-4a)式中的小波分析核，則將(4-21)式及(4-22)式代入(4-15)式可得到：

$$\begin{aligned} W_h(a, \tau) &= -aJ \left[ \frac{\left(\frac{x-\tau}{a}\right)^2 - 1}{-\left(\frac{x-\tau}{a}\right)^3 + 3\left(\frac{x-\tau}{a}\right)} \right] \cdot W_f(a, \tau) \\ &= Ja \left[ \frac{\left(\frac{x-\tau}{a}\right)^2 - 1}{\left(\frac{x-\tau}{a}\right)^3 - 3\left(\frac{x-\tau}{a}\right)} \right] \cdot W_f(a, \tau) \end{aligned} \quad (4-23)$$

若以能量則(4-23)式可寫成

$$|W_h(a, \tau)|^2 = J^2 a^2 \left[ \frac{\left(\frac{x-\tau}{a}\right)^2 - 1}{\left(\frac{x-\tau}{a}\right)^3 - 3\left(\frac{x-\tau}{a}\right)} \right]^2 \cdot |W_f(a, \tau)|^2 \quad (4-24)$$

表示  $h(x)$  在  $a-\tau$  平面上每一點的小波係數能量與  $f(x)$  的小波係數能量之對應關係。在

$$(4-24) \text{ 式中令 } \tilde{K}^2(a, \tau) = J^2 a^2 \left[ \frac{\left(\frac{x-\tau}{a}\right)^2 - 1}{\left(\frac{x-\tau}{a}\right)^3 - 3\left(\frac{x-\tau}{a}\right)} \right]^2$$

則

$$|W_h(a, \tau)|^2 = \tilde{K}^2(a, \tau) \cdot |W_f(a, \tau)|^2 \quad (4-25)$$

$h$  小波係數能量  $|W_h(a, \tau)|^2$  是藉由轉換函數  $\tilde{K}^2(a, \tau)$  和  $f$  小波係數能量  $|W_f(a, \tau)|^2$  相乘而得。

### 4.3 分析實例

以下用兩個非定常性的分析實例，來說明(4-23)式及(4-25)式之應用，並探討水力傳導係數與壓力水頭之小波能譜關係。圖二和圖三分別用來模擬兩個不同特性的地層構造，

實例 (一)

如圖二所示  $K(x)$  的分佈為：

$$K(x) = 5.0 + N(0,1), \quad x = [0,50]$$

$$= 2.0 + 0.2 \times N(0,1), \quad x = [51,100]$$

這種分佈方式的設計主要是用來模擬地層中有斷層的情況，斷層兩側為兩個不同特性  $K(x)$  的序率過程。

實例 (二)



如圖二所示， $K(x)$ 的分佈為

$$K(x) = 5.0 \sin(e^{\frac{x}{4}}) + N(0,1), \quad x = [0,100]$$

用來模擬頻率一直在改變的非定常性的現象。

上述兩種不同序率過程的  $K(x)$  輸入到地下水系統所，會造成不同的地下水水頭反應。利用小波轉換(3-4a)式，求得  $K(x)$  即(3-4a)式中  $f$  的小波係數  $|W_f(a, \tau)|$  然後透過(4-24)式，可求得地下水水頭  $h(x)$  小波係數能量  $|W_h(a, \tau)|$  最後再利用小波轉換(3-4b)式，將  $|W_h(a, \tau)|$  作小波逆轉換而可得到  $h(x)$  的序率過程。在分析求解過程中小波分析所展現的尺度現象，以及在(4-24)式中  $\tilde{K}(a, \tau)$  的行為和其物理特性，乃是下一節所探討的主題。

## 五、結果與討論

利用小波轉換將分析實例(一)的  $K(x)$  的分佈轉換如圖四所示，圖上可看出在斷層處有明顯的能量變化，在圖四藍色線的兩側高能量的部分，是由於資料的兩個端點所造成，這種現象在訊號或圖形處理尚稱為邊緣效應(edge effect)，因此，此在藍色綠色線以內的部分才是  $K(x)$  的分佈的真正表徵。圖五為分析實例(二)的  $K(x)$  的分佈轉換圖，圖中左側部分也有前述現象，而右側部分因為  $K(x)$  的分佈在  $N(0,1)$  間變動且呈指數衰減所以不明顯。

圖六為實例一控制方程式配合邊界條件的數值計算水頭分佈，利用數值計算給定邊界條件求得水頭  $h(X)$  的分佈，圖中三組藍色的線，為給定不圖的邊界條件下，所求得水頭  $h(X)$  的分佈。相同的，圖七為實例二控制方程式配合邊界條件的數值計算水頭分佈，利用數值計算給定邊界條件求得水頭  $h(X)$  的分佈，圖中三組藍色的線，為給定不圖的邊界條件下，所求得水頭  $h(X)$  的分佈，從圖上看起來藍色的線好像都是平滑線，事實上線上有微小的擾動現象，只是與繪圖尺度相差較大表現不出來。

圖八為實例一水頭  $h(x)$  小波轉換係數分佈，利用推導理論式，(4-24)式計算的結果，而圖九為實例一水頭  $h(x)$  小波轉換係數分佈由方程式數值解再利用(3-4a)計算而得，也就是圖六中最上方的藍色線，邊界條件  $u(0)=100, u(100)=0$  求解數值解所得的  $h(x)$  再利用小波轉換(3-6)式所得的係數分佈。雖然圖八和圖九求得的方式不一樣，即圖八之結果是透過(4-24)式計算所得，沒有任何邊界問題；而圖九是解方程式的數值問題，需要邊界條件才能解。但從兩張圖中可看出其趨勢是一致的。

圖十為實例二水頭  $h(x)$  小波轉換係數分佈，利用推導理論式，(4-24)式計算而得，圖十一為實例二水頭  $h(x)$  小波轉換係數分佈由方程式數值解再利用(3-4a)計算而得，也就是圖七中最上方的藍色線，邊界條件  $u(0)=100, u(100)=0$  求解數值解所得的  $h(x)$  再利用小波轉換(3-6)式所得的係數分佈。相同的，雖然圖十和圖十一求得的方式不一樣，即圖十之結果是透過(4-24)式計算所得，沒有任何邊界問題；而圖十一是解方程式的數值問題，需要邊界條件才能解。但從兩張圖中可看出其結果的趨勢亦相當一致。

圖十二是利用方程式(4-24)式所求得，在  $x=50.5$  時  $\tilde{K}(a, \tau)$  的分佈情況，圖中具齒狀是因為數值計算上在取尺度參數  $a$  的間時隔所造成。圖十三是利用方程式(4-24)式所求得，在  $x=50.5$  並給定不同尺度  $a$  時  $\tilde{K}(a, \tau)$  的分佈情況，從圖上可看出在固定的  $x$  位置，每一條不同尺度  $a$  所畫出來的曲線，正好反對稱於縱軸，而且  $a$  越大(表示窗越大)，其曲線越明顯，類似於在該  $x$  位置處開了一個反對稱的窗。從數值實驗可看出  $\tilde{K}(a, \tau)$  隨著  $x$  位置變動而移動，但其形狀並無改變。

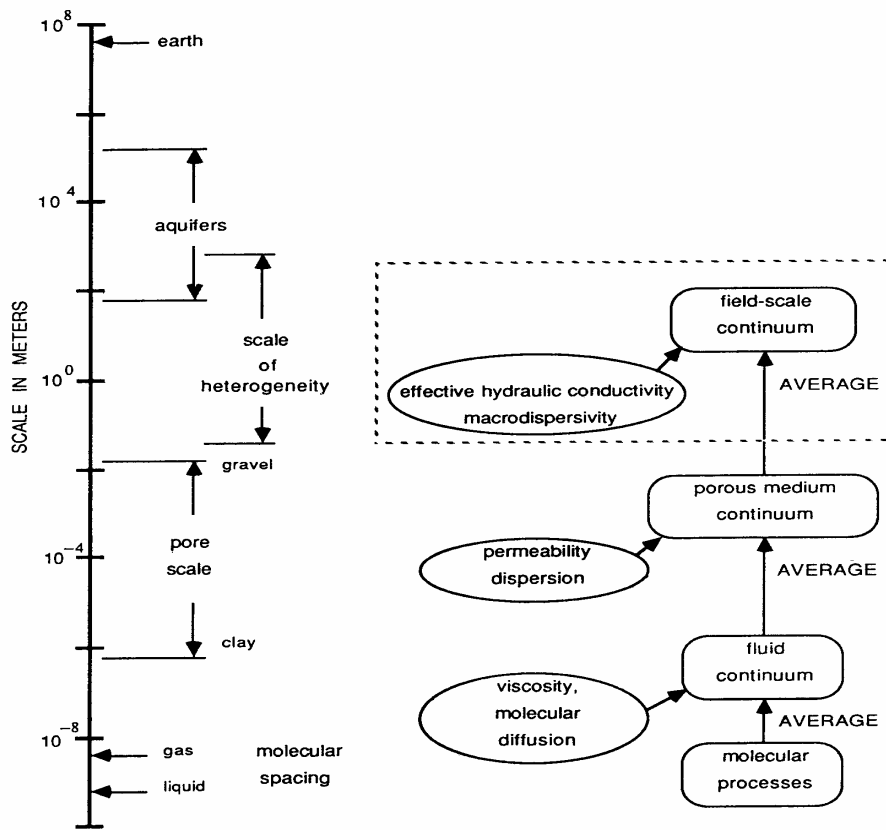
## 六、研究建議

自然現象的複雜程度及變異性，常常遠超過我們想像的範圍，大部分的隨機資料從整體來看都是屬於非定常性(或異質性)，小波分析方法在解決非定常性問題並將其量化的方向應該可行，要應用在地下水及水文地質分析等相關領域，需要更進一步嚴謹的理論推演並以更多的驗證

實例來證實此論點。對於異質性地下水系統而言，介質的異質性和空間變異性是地質層本身固有的特徵，它導致滲透性能的空間變異性而直接影響地下水流動和污染物傳輸過程，因此，如何將模擬地區的地質參數適切的描述，是模擬結果準確與否的關鍵因素。然而，要進行大範圍且高精度的實驗不但耗資、費時且困難度很高，如何將各種不同尺度下的實驗資料進行融合將是另一個可以思考的方向。

## 七、參考文獻

1. 吳呈懋、李天浩、陳主惠、徐年盛，「利用小波分析表現二維非等向異質性水文地質之研究」，第五屆地下水資源及水質保護研討會論文集，pp.B50-B57，91年6月，雲林縣。
2. 徐年盛、李天浩、陳主惠、吳呈懋，「利用小波分析推求地下水系統刺激與反應之頻譜密度函數」，九十一年度農業工程研討會，pp.444-454，91年12月，雲林縣。
3. 楊金忠、蔡樹英、黃冠華 (2000)「多孔介質中水分及溶質運移的隨機理論」，科學出版社。
4. 楊福生，小波變換的工程分析與應用，科學出版社，2000。
5. Brewer, K. E. and S. W. Wheatcraft, "Including Multi-Scale Information in the Characterization of Hydraulic Conductivity Distributions", *Wavelet in Geophysics*, pp213-248, 1994.
6. Claassen, T.A.C.M., and W.F.G. Mecklenbräuker, "The Wigner Distribution - A Tool for time-frequency signal analysis: Part I Continuous time signal", *Philips Journal of Research* Vol.35, No.3, pp217-251, 1980.
7. Cohen, L., "Time-Frequency Distributions- A review", *Proceeding of the IEEE*, Vol.77, No.7, pp.941-981, 1989.
8. Dagan, Gedeon, *Flow and Transport in Porous Formation*, Springer-Verlag, 1989, pp45-404.
9. Flandrin, P. "Time-frequency and time-scale", *IEEE Fourth Annual ASSP Workshop on Spectrum Estimation and Modeling*, Minneapolis, Minnesota, pp 77-80, 1988.
10. Gabor, D., "Theory of communication", *J. Inst. Elec. Eng.*, Vol.93, pp429-457, 1946.
11. Gelhar, L.W., *Stochastic subsurface Hydrology*, Prentice Hall, New Jersey, 1993, pp95-196.
12. Kitanidis, P. K. "Statistical estimation of polynomial generalized covariance functions and hydrologic applications," *Water Researches Resources*, 19(4), 909-921, 1983.
13. Lark R. M. and R. Webster, "Analysis and elucidation of soil variation using wavelets," *European Journal of Soil Science*, No.50, pp185-206, 2000.
14. Li, Bai-Lian, "Wavelet analysis for characterizing spatial heterogeneity in the surface," *Proceeding of SPIE*, Vol.2569, pp736-743, 1995.
15. Pando, J. and Li-Zhi Fang, "An introduction of the wavelet transform," *Wavelet in Physics*, World Scientific, 1998, pp15-44.



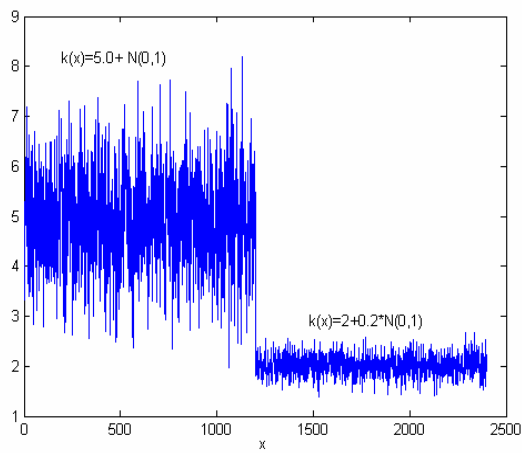
圖一 地下水流系統的空間尺度

(摘自 Gelhar, "Stochastic Subsurface Hydrology", 1993)

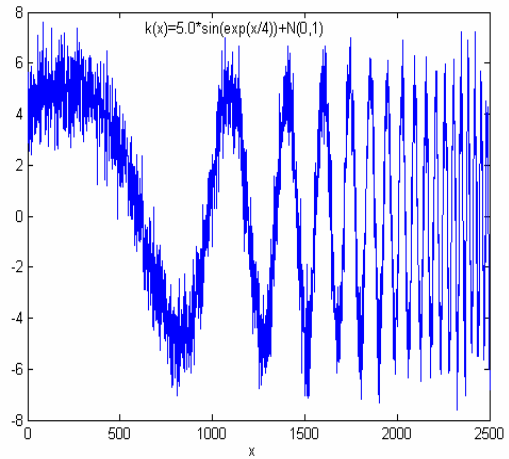
表一 三種基本尺度的主要特徵 (摘自 Dagan, 1986)

(單位：m)

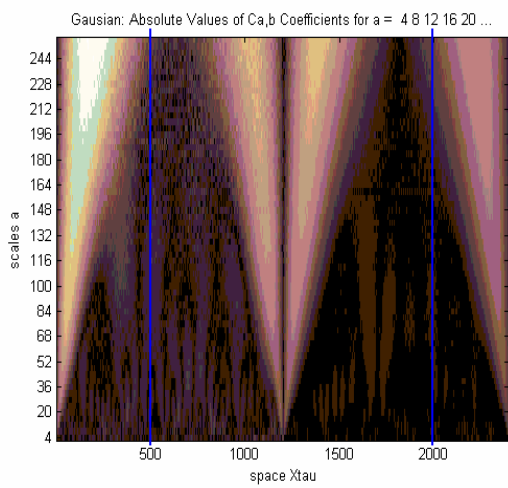
尺度	定義變量點值的體積平均線性長度	描述空間變異性變量的相關長度 $I$	觀測體積平均線性長度 $D$	流場空間擴展的線性長度 $L$
實驗室尺度	$\gg$ 分子尺度	孔隙尺度 $\sim 10^{-3}$	$10^{-1}$	$10^0$
局部尺度	$10^{-1}-10^0$	水力傳導係數對數相關尺度 $\sim 10^0$	$10^0-10^1$	$10^1-10^2$
區域尺度	$10^1-10^2$	流通係數對數相關尺度 $\sim 10^3-10^4$	$10^2-10^4$	$10^3-10^5$



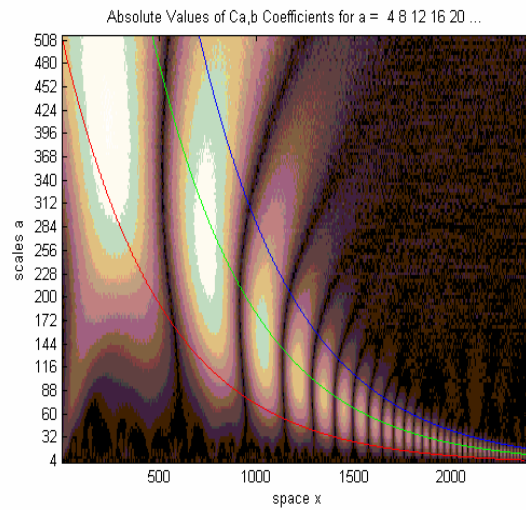
圖二 水力傳導係數  $K(x)$  的序率分佈



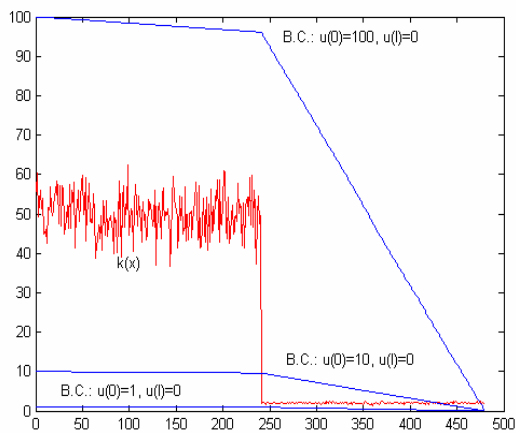
圖三 水力傳導係數  $K(x)$  的序率分佈



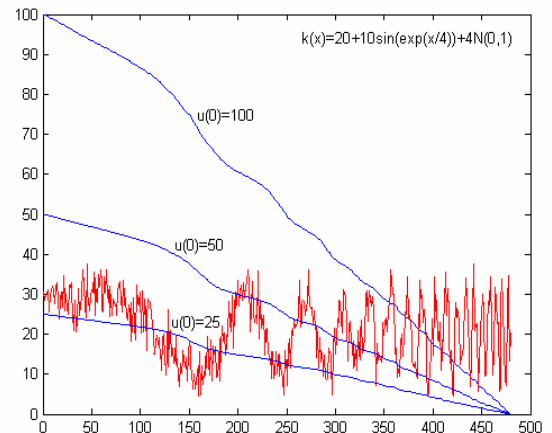
圖四 實例一  $K(x)$  的小波轉換係數分佈



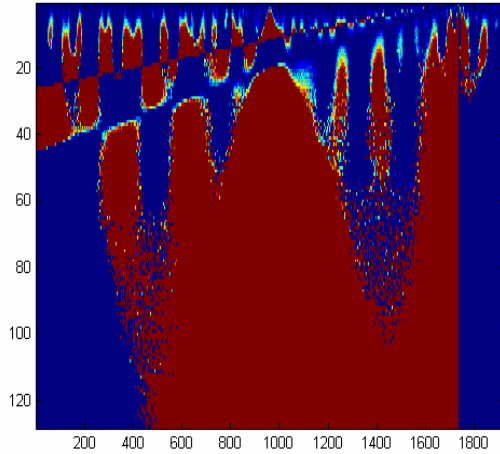
圖五 實例二  $K(x)$  的小波轉換係數分佈



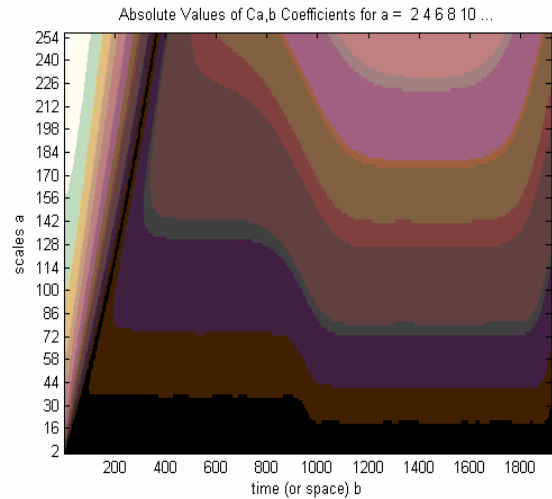
圖六 實例一控制方程式配合邊界條件的  
數值計算水頭分佈



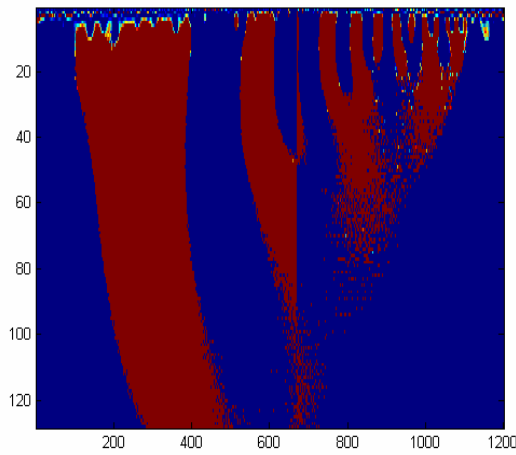
圖七 實例二控制方程式配合邊界條件的  
數值計算水頭分佈



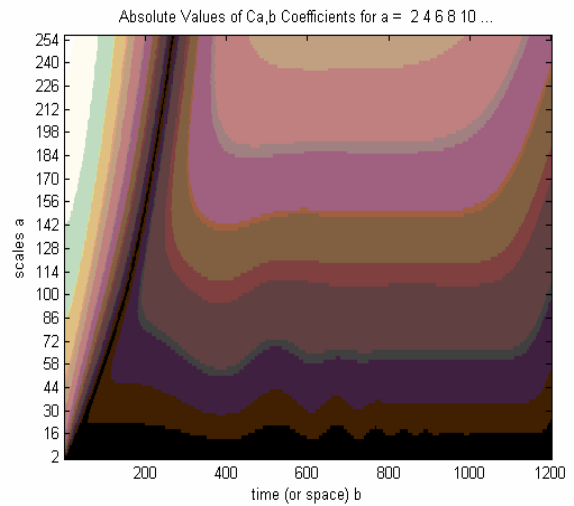
圖八 實例一水頭  $h(x)$  小波轉換係數分佈  
利用(4-24)式計算而得



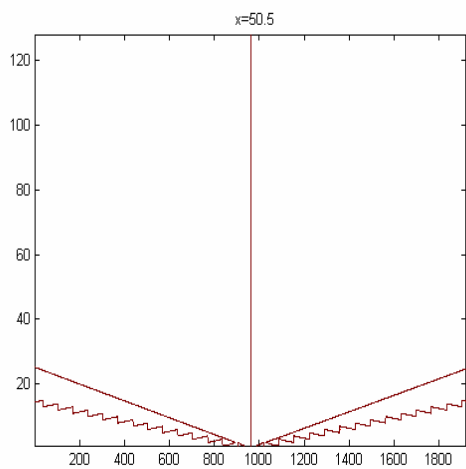
圖九 實例一水頭  $h(x)$  小波轉換係數分佈  
由方程式數值解再利用(3-4a)式計算而得



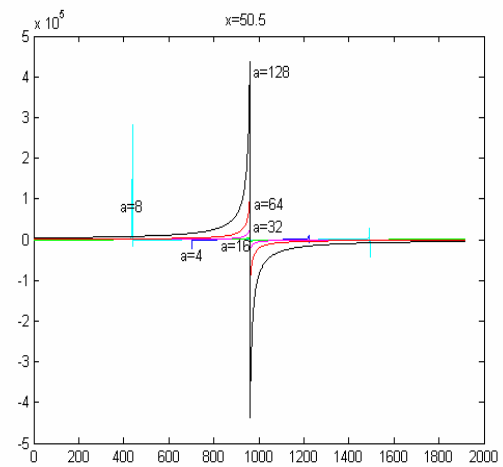
圖十 實例二水頭  $h(x)$  小波轉換係數分佈  
利用(4-24)式計算而得



圖十一 實例二水頭  $h(x)$  小波轉換係數分佈  
由方程式數值解再利用(3-4a)式計算而得



圖十二 方程式(4-24)式中 在  $x=50.5$  時  
 $\tilde{K}(a, \tau)$  的分佈情況



圖十三 方程式(4-24)式中在  $x=50.5$  並給  
定不同尺度  $a$  時  $\tilde{K}(a, \tau)$  的分佈情況