

行政院國家科學委員會專題研究計畫 成果報告

幂定律用於循環彈塑性與黏彈性之建模(2/2)

計畫類別：個別型計畫

計畫編號：NSC92-2211-E-002-078-

執行期間：92年08月01日至93年07月31日

執行單位：國立臺灣大學土木工程學系暨研究所

計畫主持人：洪宏基

計畫參與人員：劉立偉

報告類型：完整報告

處理方式：本計畫可公開查詢

中 華 民 國 94 年 5 月 2 日

行政院國家科學委員會專題研究計畫期中精簡報告

冪定律用於循環彈塑性與黏彈性之建模(2/2)

The power law for modeling cyclic elastoplasticity and viscoelasticity

NSC 92-2211-E-002-078

92年8月1日至93年7月31日

洪宏基 教授

hkhong@ntu.edu.tw

國立台灣大學土木工程學系

1. 摘要

本計畫以兩年為期，探索固態系統之黏彈性與彈塑性行為反應規律，嘗試找出其共通的共性，歸結基本原理，以適當的數學語言表達之。以此共性、原理、數學模式為平台，具體引入黏彈性時間冪定律及塑性當量冪定律的觀念，藉由冪定律與分數導數及積分組成律核函數的關係來系統化地模擬黏彈性與彈塑性應力應變關係。

本計畫研究各種不老化線性黏彈性組成模式，其中無參數的有積分組成律、分布 Kelvin 與 Maxwell 模型、分布分數 Kelvin 與 Maxwell 模型等三種，有參數的有微分組成律、廣義 Kelvin 與 Maxwell 模型、各種特定分布 Kelvin 與 Maxwell 模型、狀態空間表示法、分數微積分組成模式、各種特定分布分數 Kelvin 與 Maxwell 模型等六種。因為積分組成律可作為各種研究的平台，本計畫進而研究它的 16 種寫法，並且由線性不老化，推廣至線性老化，也研究其推廣為非線性老化的通式。

在黏彈性及彈塑性的各種應力應變關係中，循環棘齒行為是極難妥適建模描述的。一般認為唯有在應力均值不為零的循環負載下才會發生棘齒，但由實際的文獻與實驗卻發現即使在應力均值為零的對稱等振幅應力循環負載下，也能觀察到拉伸向的棘齒現象。本計劃在實驗部分嘗試把實驗分為真實應力控制與標稱應力控制來分析在應力均值為零的循環負載下所觀察到的棘齒現象。經比較分析後證實：不論是真實應力控制或標稱應力控制的實驗，在應力均值為零的循環負載下都會往拉伸向產生棘齒。

由進一步分析顯示，上述在應力均值為零時所觀察到的拉伸向棘齒現象是由拉、壓硬化不對稱所造成，壓硬化大於拉硬化，因此隨著實驗循環圈數的累積，會逐漸往拉伸向產生棘齒。而且先拉或先壓不同的控制歷時會影響拉、壓硬化不對稱的程度，先壓的控制歷時會讓壓硬化加劇，因此往拉伸向的棘齒會較先拉控制歷時還快出現，棘齒現象也較明顯。對於循環硬化材料，如鋁 7075，拉伸向的棘齒現象在一開始的幾圈循環裡會被循環硬化所隱蔽。但隨著循環硬化的影響逐漸變小，便可觀察到拉伸向棘齒。

另外，為了讓實驗達到真實應力控制，本研究也導出徑向位移的理論公式，並以自製的環向伸長計驗證其精確度。

關鍵詞：黏彈性、彈塑性、積分組成律、冪定律、分數導數、棘齒行為、對稱零均值應力循環、真實應力控制、拉壓硬化不對稱、徑向位移。

Abstract

The present project was proposed to study in a two-year period common characteristics and basic principles underpinning viscoelasticity and elastoplasticity. The power law is specifically introduced into the stress-strain relationship by converting the power law to the fractional derivative and to the kernel of the stress functional of the plastic strain increment.

We studied various constitutive models of non-aging linear viscoelasticity. These include 3 kinds of non-parametric models: integral constitutive laws, distributed Kelvin and Maxwell models, and distributed fractional Kelvin and Maxwell models, and also 6 kinds of parametric models: differential constitutive laws, generalized Kelvin and Maxwell models, distributed Kelvin and Maxwell models of a variety of special distributions, state space methods, fractional derivative constitutive models, and distributed fractional Kelvin and Maxwell models of a variety of special distributions. In view of the role the integral constitutive laws play as a framework for constructing and uniting various forms of constitutive modeling, we went further to investigate their 16 expressions, generalizing them from non-aging linearity to aging linearity, and furthermore to a general expression for aging nonlinearity.

Ratchetting behavior is one of the most difficult phenomena to model among the viscoelastic and elastoplastic stress-strain relations. Generally speaking, ratchetting can be found under cyclic loading with non-zero mean stress. However, some experiments showed that even under cyclic loading with zero mean stress, ratchetting in the direction of tension can still be found. The experimental part of this project analyzed the phenomena of ratchetting under nominal-stress -controlled cyclic loading and

true-stress-controlled cyclic loading with zero mean stress. The results show that ratchetting in the direction of tension can be found in true-stress-controlled experiments as well as in nominal-stress-controlled experiments.

The results of analysis also show that the ratchetting in the direction of tension as mentioned above was caused by the asymmetry of hardening between tension and compression, the hardening of compression being larger than the hardening of tension and hence the tensile strain being larger than the compressive strain in each cycle. As the cyclic contributions accumulated, the ratchetting in the direction of tension gradually developed. Furthermore, the difference of controlled path would also affect the asymmetry of hardening between tension and compression. If the controlled path started in the compression direction, the asymmetry of hardening between tension and compression would be more apparent than that of the controlled path starting in the direction of tension; therefore, ratchetting is more apparent. For cyclic hardening materials, e.g. Al 7075, the phenomenon of ratchetting in the direction of tension was shadowed in the first few cycles. Once the cyclic hardening effect phased out, ratchetting manifested itself.

In order to conduct true-stress-controlled experiments, we developed formulae to calculate the theoretical value of radial strain, and checked its accuracy by a self-developed radian strain extensometer.

Keywords: viscoelasticity, elastoplasticity, integral constitutive laws, power law, fractional derivative, ratchetting, cyclic loading with zero mean stress, true stress control, asymmetry of hardening between tension and compression.

2. 緣由與目的

關於固態系統之力學行為反應，無論在大型結構層次，或構件層次，或剖面（剖線）微元層次，或材料微元層次，或晶粒晶格（顆粒結塊）層次，都可區分為彈性、黏彈性、塑性三大類，不同層次當然有其不同之重點，但在彈性、黏彈性、塑性行為上卻也有其共通的特性或基本原則。我們長期研究這些共通的特性，利用各種理論的、實驗的、數值的方式來探察隱匿其中的奧秘，尋求以簡潔的概念、原理、數學式來表述它們。譬如彈塑性的基本原理是（一）閔氏時空未來截錐的因果律，（二）可達有界狀態空間的可控性與保守或耗散性。而又譬如黏彈性的重要特性就是因果性與消退記憶性，我們知道消退記憶性具有非常廣泛的概括性，在直覺上也是具有物理意義，舉例來說，

$$p_0\sigma + p_1\dot{\sigma} + \dots + p_m\sigma^{(m)} = q_0\varepsilon + q_1\dot{\varepsilon} + \dots + q_n\varepsilon^{(n)}$$

的材料常數 $p_0, p_1, \dots, p_m, q_0, q_1, \dots, q_n$ 必須滿足一些相當複雜的不等式才具有消退記憶性，在研究手法上，與其研究這些不等式，不如直接研究「消退記憶性」本身，而「消退記憶性」利用積分組成律的核函數來表達，遠比上述不等式簡潔明瞭，而且其數學形式也具有廣泛的概括性。

黏彈性組成律以時間 t 為自變數，而（變率無關彈）塑性組成律以塑性當量為自變數，塑性當量即塑性應變路徑的弧長（塑性弧長）或其同胚。這個概念使得很多黏彈性組成模式可以以代 t 的方式改成彈塑性組成模式。作法是變形分解為彈性部分與塑性部分，將應力表示為塑性應變增量的泛函，其核函數具奇異性，如此應力就可分為主動應力與回應力。然後補上互補三元作為彈性與塑性二相切換的機制，而前述有關於黏彈性組成律討論時關於其核函數受因果性、消退記憶性而有的限制，同樣亦可類似地移植到彈塑性，只要做 $t \rightarrow$ 的變換而已。

以上這些背景討論的重要，在於它們是屬於共通特性的，無論在概念或數學形式上都有很廣泛的概括性，也因此是一個很好的平台，可由此做特殊化的工作，將所謂無參數模式特殊化為有參數模式，並可構造模式集合，配合實驗做模式識別參數估測。

在特殊化上，本計畫探索冪定律，將核函數表示為冪函數。我們的動機有二。一是許多經驗公式以冪定律表示，準確率很高，在黏彈性與彈塑性文獻裡，都有非常多的數據支持這個論點。二是冪函數與分數導數是一體的兩面，有堅強的「分數微積分」理論基礎。尤其近年更有不少深入的研究與應用。

一般工程材料從製成使用至破壞期間會受到反覆不定的外因作用，如：建築物在受到風力、地震力載重下之往復擺動，橋梁受到車輛的通過而造成大梁與橋面板的往復振動，以及飛機飛行中機翼受到風力所引起之顫動，皆是循環負載的實際例子。因此，結構體或結構構件必須設計成能抵抗循環載重，而對結構體或結構構件之變形產生決定性影響的最重要因素之一便是棘齒行為（ratchetting behavior）。在黏彈性與彈塑性的各種特性中，棘齒行為可說是極為重要的，也是極難描述建模的。

棘齒行為是循環負載下應變隨循環圈數增加而逐漸累積的一種現象。在單向應力循環控制

時，如果所施加的應力振幅不對稱，在應力均值之方向上隨著循環圈數的增加而使應變均值逐漸累積。在雙向負載時，如果其中一向施加循環負載，在另一向施加固定應力，則在此向上其應變會隨著循環負載而逐漸累積增加。逐漸累積的應變會導致結構的漸進破壞 (progressive failure)，引發致命的結構安全問題。

在過去許多相關的研究中，都曾對不同的材料觀察到棘齒行為，而在這些相關研究中，許多模式都試著模擬一種或多種棘齒行為，但幾乎目前所有的材料彈塑性組成律對於棘齒行為都無法得到比較令人滿意的模擬，因此在循環負載下，控制材料塑性應變累積因素的複雜性便可想而知了。

本研究實驗部分主要是觀察不銹鋼 316 及鋁合金 7075 在完全退火態下，經對稱等振幅應力循環控制歷時所產生的棘齒現象，並分析、探討其產生的原因，希望能對組成律的發展有所助益。

3. 研究方法

3.1 無參數的黏彈性組成模式(一)積分組成律

線性不老化黏彈性積分組成方程式為

$$\int_{-\infty}^t P(t-t')\sigma(t')dt' = \int_{-\infty}^t Q(t-t')\varepsilon(t')dt' \quad (1)$$

或

$$\varepsilon(t) = C(t-t_0)\sigma(t_0) + \int_{t_0}^t C(t-t')d\sigma(t')$$

或

$$\sigma(t) = E(t-t_0)\varepsilon(t_0) + \int_{t_0}^t E(t-t')d\varepsilon(t')$$

其中 $C(t)$ 為潛變順數、 $E(t)$ 為鬆弛模數。上三式中的 t_0 是零值時間，當時間 $t \leq t_0$ 時，材料處於零值狀態。零值狀態就是金屬材料的退火態或土壤的重模態。

3.2 有參數的黏彈性組成模式(一)微分組成律

最常見的有參數表示法為微分組成方程式：

$$p_0\sigma + p_1\dot{\sigma} + \dots + p_m\sigma^{(m)} = q_0\varepsilon + q_1\dot{\varepsilon} + \dots + q_n\varepsilon^{(n)}$$

其中 $p_0, p_1, \dots, p_m, q_0, q_1, \dots, q_n$ 為材料常數，可以為張量。微分組成律與核函數為指數函數之和的積分組成律有等價關係。細節不在此詳述，其演繹過程類似 3.11 節。

3.3 有參數的黏彈性組成模式(二)廣義 Kelvin 與 Maxwell 模型

Kelvin 模型為

$$\tau_c \dot{\varepsilon}(t) + \varepsilon(t) = C\sigma(t)$$

將 m 個 Kelvin 模型串聯(series connection)起來，得到廣義 Kelvin 模型：

$$\tau_c \dot{\varepsilon}_c(t) + \varepsilon_c(t) = C\sigma(t)$$

$$\varepsilon(t) = \sum_{c=1}^m S_c \varepsilon_c(t)$$

其中 (t_c, S_c) 表示第 c 個 Kelvin 元件的遲緩時間 t_c 與離散遲緩譜值 S_c 。

Maxwell 模型為

$$\dot{\sigma}(t) + \sigma(t)/\tau_r = E\dot{\varepsilon}(t)$$

將 n 個 Maxwell 模型並聯(parallel connection) 起來，得到廣義 Maxwell 模型：

$$\dot{\sigma}_r(t) + \sigma_r(t)/\tau_r = E\dot{\varepsilon}(t)$$

$$\sigma(t) = \sum_{r=1}^n S_r \sigma_r(t)$$

其中 (t_r, S_r) 表示第 r 個 Maxwell 元件的鬆弛時間 t_r 與離散遲緩譜值 S_r 。另外，可參考文獻[27]之形式。

如果將有限多個元件變為無限多個，同時對 $t_c, c=1,2, \dots, m, t_r, r=1,2, \dots, n$ 連續化，使 $t_c, t_r \in [0, \infty)$ ，則廣義模型(離散譜)連續化為分布模型(連續譜)，見 3.4 節。

由分布模型(連續譜)反過來看廣義模型(離散譜)，甚有實用意義。相應於連續譜，離散譜的表示法是已經(塊)對角化的狀態空間表示法，可具象化為特定的機械模型：離散遲緩譜相當於廣義 Kelvin 模型，串聯多個 Kelvin 元素，離散鬆弛譜相當於廣義 Maxwell 模型，並聯多個 Maxwell 元素。離散的方式有三種，一種是在 $\ln \tau_c$ 軸(或 $10 \log_{10} \tau_c / \tau_c^{ref}$ 軸)上取等間距，第 c 間距的中心即為第 c 遲緩時間 τ_c ，在此間距裏，連續譜曲線下的面積即為第 c 遲緩譜值 S_c ，即第 c 個 Kelvin 元素的彈性順數，注意 τ_c 不是參數而 S_c 才是參數。另一種方式則是倒過來，間距不等但面積相等[8, 9]，如此 S_c 不是參數， τ_c 反成為參數。以參數估測的角度來看，前者較好，因為前者參數 S_c 是乘在指數函數前面，而後者的參數 τ_c 卻在指數裏。遲緩時間取對數刻度而不是線性刻度可以使前者之間距個數大幅降低，此即聲學上常用的倍頻譜分析手法(octave spectral analysis)。第三種方式則 τ_c 與 S_c 都視為參數[31, 33]，當連續譜有明顯幾個高峰者最適用此方式。以上以遲緩譜為例說明，鬆弛譜類似。

3.4 無參數的黏彈性組成模式(二) 分布 Kelvin 與 Maxwell 模型

分布 Kelvin 模型利用遲緩時間 τ_c 的遲緩譜(張量) $S_c(\ln \tau_c)$ 取代潛變順數(張量) $C(t)$ ，將組成律寫成

$$\tau_c \dot{\varepsilon}(t, \tau_c) + \varepsilon(t, \tau_c) = C\sigma(t)$$

$$\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S_c(\ln \tau_c) \varepsilon(t, \tau_c) d \ln \tau_c$$

或分布 Maxwell 模型利用鬆弛時間 τ_r 的鬆弛譜(張量) $S_r(\ln \tau_r)$ 取代鬆弛模數(張量) $E(t)$ ，將組成律寫成

$$\dot{\sigma}(t, \tau_r) + \sigma(t, \tau_r)/\tau_r = E\dot{\varepsilon}(t)$$

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S_r(\ln \tau_r) \sigma(t, \tau_r) d \ln \tau_r$$

其中 C 是彈性順數、 E 是彈性模數，兩者為材料常數，可以為張量，互為逆張量。這種描述方法，叫做連續譜表示法，或分布元素法(分布 Kelvin 模型、分布 Maxwell 模型)，它們分別引進內變數(狀態變數) $\varepsilon(t, \tau_c)$ 及 $S(t, \tau_r)$ 來描述分布元素內的應變或應力。

將連續譜歸一化後可看出其統計上的意義：歸一化遲緩譜其實就是遲緩時間的分布函數概率密度函數，歸一化鬆弛譜其實就是鬆弛時間的分布函數概率密度函數。

潛變順數 $C(t)$ 與遲緩譜 $S_c(\ln \tau_c)$ 的關係為

$$C(t) = C(0) + t\eta_{\infty}^{-1} + \int_{-\infty}^{\infty} S_c(\ln \tau_c)(1 - e^{-t/\tau_c}) d \ln \tau_c$$

其中 η_{∞} 為漸近黏滯係數，當 $\eta_{\infty} = \infty$ 則為固體。鬆弛模數 $E(t)$ 與鬆弛譜 $S_r(\ln \tau_r)$ 的關係為

$$E(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S_r(\ln \tau_r) e^{-t/\tau_r} d \ln \tau_r + E(\infty)$$

當 $E(\infty) = 0$ 則為流體。上述 ε 、 σ 、 $C(t)$ 、 $E(t)$ 、 C 、 E 、 S_c 、 η_{∞} 、 S_r 均可以是張量，上標-1表

示求張量之逆。以上組成律表示法並無參數，為無參數表示法。

3.5 有參數的黏彈性組成模式(三)特定分布 Kelvin 與 Maxwell 模型

上節談到歸一化連續譜可以視為統計分布之概率密度函數，因此我們可以經由物理意義的探索，合理地假設該物性(遲緩時間、鬆弛時間)的統計概率分布，如此可以將參數降至一、二個，如 Rayleigh 分布只要一個參數[8]，Weibull 分布只要兩個參數[9]，對數常態分布、gamma 分布也只要兩個參數。這些分布的範圍都是 $(0, \infty)$ ，如果改成 $(\tau_c^{\text{inf}}, \infty)$ 則多一個參數 τ_c^{inf} 。

3.6 有參數的黏彈性組成模式(四)機械模型與狀態空間表示法

黏彈性機械模型試圖表現材料的內部構造，模擬其間力的傳遞平衡以及變形的運動諧和，反應出構造的內在參數，是一種參數表示法，化為方程式實際上相當於系統學的狀態空間表示法：

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du\end{aligned}$$

其中 u 為輸入(控制)， y 為輸出(響應)， x 為狀態變數(內變數)。如 $u = \sigma$ 則 $y = \varepsilon$ (如果進一步將狀態矩陣 A (塊)對角化即為前述廣義 Kelvin 模型)。如 $u = \dot{\varepsilon}$ 則 $y = \sigma$ (如果進一步將 A (塊)對角化即為前述廣義 Maxwell 模型)。更一般地可將 σ 空間與 ε 空間之乘積空間分解成兩個獨立互補的子空間，一為 u 空間，另一為 y 空間。以分量來看，此種分解就有 $2^6=64$ 種之多，其中最極端的兩種分解就是前述全應力控制 $u = \sigma$ 而 $y = \varepsilon$ ，以及全應變控制 $u = \dot{\varepsilon}$ 而 $y = \sigma$ 。有回饋控制的材料試驗機雖然能夠執行應變控制，但它們都不是全應變控制，頂多能做到兩個應變分量的控制。上述 x, u, y, A, B, C, D 都可視為張量或相應之矩陣。

3.7 消退記憶性與非退火態初始條件

消退記憶性要求 $dC(t)/dt$ 正半定、 $dE(t)/dt$ 負半定、 S_c 正半定、 $\tau_c > 0$ 、 S_r 正半定、 $\tau_r > 0$ 、機械模型的參數張量正半定、參數純量大於零。至於微分組成方程式中的參數則受到相當複雜的不等式的約束；不等式可由參數與正半定的 $dC(t)/dt$ 或負半定的 $dE(t)/dt$ 之間的關係導得。除了消退記憶性外，還有有限記憶性、IIR 或 FIR、穩定性、抹除記憶性等課題。

如果初始時間 t_i 不為零值時間 t_0 ，則應力、應變及其導數，以及內變數(狀態變數)等之初始值必須滿足非退火態初始條件，以微分組成方程式為例，其非退火態初始條件為

$$\sum_{i=k}^l p_i \sigma^{(i-k)}(t_0) = \sum_{i=k}^l q_i \varepsilon^{(i-k)}(t_0) \quad (k=1, 2, \dots, l)$$

其中 $l = \max(m, n)$ 。與此類似，非退火態之積分組成方程式的寫法亦需相應修正。

一個看似細節卻重要的是初始效應，如初始應力、初始應變，以及各內變數的初始值，無論在識別、實驗、計算都必須小心注意。採取的方式是積分式，分數微分式同步推導，定義必要之內變數，將退火時間至初始時間之間的有關訊息以內變數之初始值代表之。在推導及識別時，必須小心分辨內變數初始值與材料常數，絕不能混淆。

在實驗現象，定性走勢的觀察上，可以試驗設計的方法，如正交試驗設計、均勻試驗設計，有效節省試驗的次數。

3.8 有參數的黏彈性組成模式(五)分數微積分組成模式

另一種有參數表示法為分數微積分組成方程式：

$$p_0 \sigma + p_1 \sigma^{(\alpha_1)} + \dots + p_m \sigma^{(\alpha_m)} = q_0 \varepsilon + q_1 \varepsilon^{(\beta_1)} + \dots + q_n \varepsilon^{(\beta_n)}$$

其中 $p_0, p_1, \dots, p_m, q_0, q_1, \dots, q_n$ 為材料常數，可以是張量， $a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n$ 為材料常數，只能為純量；如果是正實數則為分數微分，如果是負實數則為分數積分。

函數 $f(t)$ 的 n 階分數微積分 $f^{(n)}(t)$ 定義如下：

$$f^{(\nu)}(t) = \frac{d^\nu f}{dt^\nu} = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(-\nu)} \int_{-\infty}^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\nu+1}} d\tau & \text{for } \nu < 0 & (1) \\ f(t) & \text{for } \nu = 0 & (2) \\ \frac{d^n}{dt^n} \frac{d^{\nu-n}}{dt^{\nu-n}} f(t) & \text{for } \nu > 0 & (3) \end{cases}$$

其中 ν 是實數，由 ν 選 n ，使得 n 是不小於 ν 的整數($n \geq \nu$)。在(1)中 ν 是負實數， $f^{(\nu)}$ 是分數積分，在(3)中 ν 是正實數， $f^{(\nu)}$ 是分數微分。在(1)中 ν 若是負整數，則 $f^{(\nu)}$ 就回復為一般的 $-\nu$ 重積分，在(3)中 ν 若是正整數，則 $f^{(\nu)}$ 就回復為一般的 ν 階微分(ν 階導數)。

如果 $0 < \alpha < 1$ ，則選 $n=1$ ，由(3)及(1)得

$$f^{(\alpha)}(t) = \frac{d^\alpha f}{dt^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_{-\infty}^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1}} d\tau \quad \text{for } 0 < \alpha < 1$$

這就是一般常見的 α 階分數微分定義。

3.9 無參數的黏彈性組成模式(三)分布分數 Kelvin 與 Maxwell 模式

對應 3.4 節分布 Kelvin 或 Maxwell 模型，也可以造出分布分數 Kelvin 或 Maxwell 模式。分數 Kelvin 模式為

$$\tau_c^\beta \varepsilon^{(\beta)}(t) + \tau_c^\gamma \varepsilon^{(\gamma)}(t) = C\sigma(t)$$

分布分數 Kelvin 模式為

$$\tau_c^\beta \varepsilon^{(\beta)}(t, \tau_c) + \tau_c^\gamma \varepsilon^{(\gamma)}(t, \tau_c) = C\sigma(t)$$

$$\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S_c(\ln \tau_c) \varepsilon(t, \tau_c) d \ln \tau_c$$

式中引進內變數 $\varepsilon(t, \tau_c)$ 以描述分佈元素內的應變，而且 b 、 g 、 S_c 均是 $\ln \tau_c$ 的函數，也就是有 $b(\ln \tau_c)$ 、 $g(\ln \tau_c)$ 、 $S_c(\ln \tau_c)$ 三種材料函數。

另一方面，分數 Maxwell 模式為

$$\sigma(t) + \tau_r^\alpha \sigma^{(\alpha)}(t) = \tau_r^\beta E \varepsilon^{(\beta)}(t)$$

分布分數 Maxwell 模式為

$$\sigma(t, \tau_r) + \tau_r^\alpha \sigma^{(\alpha)}(t, \tau_r) = \tau_r^\beta E \varepsilon^{(\beta)}(t)$$

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S_r(\ln \tau_r) \sigma(t, \tau_r) d \ln \tau_r$$

式中引進內變數 $\sigma(t, \tau_r)$ 以描述分佈元素內的應力，而且 a 、 b 、 S_r 均是 $\ln \tau_r$ 的函數，也就是有 $a(\ln \tau_r)$ 、 $b(\ln \tau_r)$ 、 $S_r(\ln \tau_r)$ 三種材料函數。

3.10 有參數的黏彈性組成模式(六)特定分布分數 Kelvin 與 Maxwell 模式

分布 Kelvin 或 Maxwell 模型的核心是指數函數，而分布分數 Kelvin 或 Maxwell 模式的核心是冪函數。仿照 3.5 節分布 Kelvin 或 Maxwell 模型選擇特定分布以達到參數化的方式，可以發展出分布分數 Kelvin 或 Maxwell 模式選擇特定分布以達到參數化的方式。

3.11 核函數為冪函數的積分組成律

分數微積分組成律與核函數為冪函數的積分組成律有等價關係。例如下述積分組成方程式：

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^t E(t-t') d\varepsilon(t') \quad (1)$$

或(若 $\varepsilon(t)=0$ 當 $t<0$ 則)

$$\sigma(t) = E(t)\varepsilon(0) + \int_0^t E(t-t') d\varepsilon(t') \quad (2)$$

的核函數，鬆弛模數 $E(t)$ ，若令其為

$$E(t) = Bt^{-\beta}$$

其中 $B>0$ ， $0<\beta<1$ 則可證明(1)等價於下述分數微分組成方程式

$$\sigma = B\Gamma(1-\beta)\varepsilon^{(\beta)} \quad (3)$$

其中 $\Gamma(x)$ 是 gamma 函數。

若

$$E(t) = E_e + B_1 t^{-\beta_1} + \dots + B_n t^{-\beta_n}$$

則(1)等價於

$$\sigma = q_0 \varepsilon + q_1 \varepsilon^{(\beta_1)} + \dots + q_n \varepsilon^{(\beta_n)}$$

此處 $q_0=E_e=E(0)>0$ 就是所謂的平衡模數，也就是熱力學平衡態的彈性模數，即一般彈性力學裏的彈性模數，而對 $j=1, \dots, n$ ， $q_j=B_j\Gamma(1-\beta_j)$ ， q_j 受到由負半定的 $dE(t)/dt$ 導得的不等式的約束。 $0<\beta_1<\dots<\beta_n$ ，但除了 β_1 外， β_j 不一定要小於 1。

另一方面，下述積分組成方程式

$$\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^t C(t-t') d\sigma(t') \quad (4)$$

或

$$\varepsilon(t) = C(t)\sigma(0) + \int_0^t C(t-t') d\sigma(t')$$

的核函數，潛變順數 $C(t)$ ，若令其為

$$C(t) = At^{-\alpha} \quad (5)$$

其中 $A>0$ ， $0<\alpha<1$ ，則可證明(4)等價於下述分數微分組成方程式

$$\varepsilon = A\Gamma(1-\alpha)\sigma^{(\alpha)} \quad (6)$$

若

$$\beta = -\alpha, \quad B = \frac{1}{A\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1+\alpha)}$$

則四種組成方程式(1)配(2)，(3)，(4)配(5)，(6)是等價的組成表示。若令

$$C(t) = C_e + A_1 t^{-\alpha_1} + \dots + A_m t^{-\alpha_m}$$

則(4)等價於

$$\varepsilon = p_0 \sigma + p_1 \sigma^{(\alpha_1)} + \dots + p_m \sigma^{(\alpha_m)}$$

此處 $p_0 = C_e = C(0) > 0$ 就是所謂的平衡順數，也就是熱力學平衡態的彈性順數，即一般彈性力學裏的彈性順數，而對 $i=1, \dots, m$, $p_i = A_i \Gamma(1-\alpha_i)$, p_i 受到由正半定的 $dC(t)/dt$ 導得的不等式的約束。 $0 < -\alpha_1 < \dots < -\alpha_m$ ，但除了 $-\alpha_1$ 外， $-\alpha_i$ 不一定要小於 1。

實務上，也使用下述雙邊的積分組成方程式

$$P(t)\sigma(0) + \int_0^t P(t-t') d\sigma(t') = Q(t)\varepsilon(0) + \int_0^t Q(t-t') d\varepsilon(t') \quad (7)$$

其核函數若令為

$$P(t) = p_0 + \frac{p_1}{\Gamma(1-\alpha_1)} t^{-\alpha_1} + \dots + \frac{p_m}{\Gamma(1-\alpha_m)} t^{-\alpha_m}$$

$$Q(t) = q_0 + \frac{q_1}{\Gamma(1-\beta_1)} t^{-\beta_1} + \dots + \frac{q_n}{\Gamma(1-\beta_n)} t^{-\beta_n}$$

則(7)等價於

$$p_0 \sigma + p_1 \sigma^{(\alpha_1)} + \dots + p_m \sigma^{(\alpha_m)} = q_0 \varepsilon + q_1 \varepsilon^{(\beta_1)} + \dots + q_n \varepsilon^{(\beta_n)}$$

其中 $p_0 > 0$, $q_0 > 0$ ，而 $p_1, \dots, p_m, q_1, \dots, q_n, \alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_n$ 受到由正半定的 $dC(t)/dt$ 或負半定的 $dE(t)/dt$ 導得的不等式的約束， $C(t)$ 、 $E(t)$ 均可由 $P(t)$ 與 $Q(t)$ 導得。

舉例說明如下：分數 Maxwell 模式

$$\sigma + p\sigma^{(\alpha)} = q\varepsilon^{(\beta)} \quad (8)$$

的 a 與 b 必須滿足

$$0 \leq \alpha \leq \beta \leq 1$$

否則 $E(t)$ 會上升，不合鬆弛模數的物理意義。

3.12 不老化線性積分組成方程式

由上述討論，可看出積分組成律甚為有用，可作為各種研究之平台，尤其可供彈塑性組成建模之借鏡，因此底下進一步討論其各種表示方式。為簡化計，先假設線性，而且不老化（時不變，移不變），並以控制 u 為輸入，響應 y 為輸出，單位階梯響應 K 為卷積核函數。 $K(Dt) = K(t-t')$ 的意義是：當 $u(t) = H(t-t')$ 單位階梯函數時， $y(t) = K(t-t')$ 。也就是說， $K(t-t')$ 是，由於在時刻 t' 起，作用一單位的階梯控制，在時刻 t 的響應。根據因果律

$$K(t-t') = 0 \quad \text{for } t < t'$$

採用簡化符號，積分上下限均指對 t 而言，且

$$\dot{K}(t-t') = \frac{d}{d\tau} K(\tau) \Big|_{\tau=t-t'}$$

$$\dot{u}(t-t') = \frac{d}{d\tau} u(\tau) \Big|_{\tau=t-t'}$$

根據 $K(Dt)$ 的定義，將控制 $u(t)$ 水平切片，或垂直切片，然後每片乘適當之單位階梯響應 K ，線性疊加後，就得到響應 $y(t)$ 。水平切片或垂直切片兩種導法分別得出

$$y(t) = \int_{-\infty}^t K(t-t') du(t') \quad (1)$$

$$y(t) = u(t)K(0) - \int_{-\infty}^{t^-} u(t') dK(t-t') = - \int_{-\infty}^{t^+} u(t') dK(t-t') \quad (2)$$

經過變數變換，上二式分別化為

$$y(t) = - \int_0^{\infty} K(t') du(t-t') \quad (3)$$

$$y(t) = u(t)K(0) + \int_{0^+}^{\infty} u(t-t') dK(t') = \int_{0^-}^{\infty} u(t-t') dK(t') \quad (4)$$

若 $u(t)$ 對 $t \in (0, \infty)$ 可微或 $K(\Delta t)$ 對 $\Delta t \in (0, \infty)$ 可微，但 $K(0)$ 可以不可微，可有跳躍，則上 4 式分別化為

$$y(t) = \int_{-\infty}^t K(t-t') \dot{u}(t') dt' \quad (1d)$$

$$y(t) = u(t)K(0) + \int_{-\infty}^{t^-} u(t') \dot{K}(t-t') dt' = \int_{-\infty}^{t^+} u(t') \dot{K}(t-t') dt' \quad (2d)$$

$$y(t) = \int_0^{\infty} K(t') \dot{u}(t-t') dt' \quad (3d)$$

$$y(t) = u(t)K(0) + \int_{0^+}^{\infty} u(t-t') \dot{K}(t') dt' = \int_{0^-}^{\infty} u(t-t') \dot{K}(t') dt' \quad (4d)$$

若 $u(t) = 0$ 當 $t < 0$ ，但 $u(0)$ 可能不為 0，則(1)、(1 d)的下限由 $-\infty$ 化為 0^- ，(2)、(2 d)的下限由 $-\infty$ 化為 0 ，(3)、(3 d)的上限由 ∞ 化為 t^+ ，(4)、(4 d)的上限由 ∞ 化為 t ，而(1)、(3)、(1 d)、(3 d)可進一步將 $du(0)$ 或 $\dot{u}(0)$ 的奇異積分出一項來，(2 d)、(3 d)又可利用 Leibnitz 規則反過來兩項併為一項積分之微分，最後得到

$$y(t) = \int_{0^-}^t K(t-t') du(t') = K(t)u(0) + \int_{0^+}^t K(t-t') du(t') \quad (1')$$

$$y(t) = u(t)K(0) - \int_0^{t^-} u(t')dK(t-t') = -\int_0^{t^+} u(t')dK(t-t') \quad (2)'$$

$$y(t) = -\int_0^{t^+} K(t')du(t-t') = K(t)u(0) - \int_0^{t^-} K(t')du(t-t') \quad (3)'$$

$$y(t) = u(t)K(0) + \int_{0^+}^t u(t-t')dK(t') = \int_{0^-}^t u(t-t')dK(t') \quad (4)'$$

$$y(t) = \int_{0^-}^t K(t-t')\dot{u}(t')dt' = K(t)u(0) + \int_{0^+}^t K(t-t')\dot{u}(t')dt' \quad (1d)'$$

$$\begin{aligned} y(t) &= u(t)K(0) + \int_0^{t^-} u(t')\dot{K}(t-t')dt' = \int_0^{t^+} u(t')\dot{K}(t-t')dt' \\ &= \frac{d}{dt} \int_0^t u(t')K(t-t')dt' \end{aligned} \quad (2d)'$$

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^{t^+} K(t')\dot{u}(t-t')dt' = K(t)u(0) + \int_0^{t^-} K(t')\dot{u}(t-t')dt' \\ &= \frac{d}{dt} \int_0^t K(t')u(t-t')dt' \end{aligned} \quad (3d)'$$

$$y(t) = u(t)K(0) + \int_{0^+}^t u(t-t')\dot{K}(t')dt' = \int_{0^-}^t u(t-t')\dot{K}(t')dt' \quad (4d)'$$

- 註 1：上述 16 式，單數式以控制 $u(t)$ 的橫向切片導得，雙數式以控制 $u(t)$ 的水平切片導得。兩者之間可用部分積分證明等價。
- 註 2：這 16 個式子， $16=2^4$ ，是由 4 種因素組合而成：水平或垂直切片、變數變換與否、 u 或 K 可微與否、零時前零控制與否。所以上述式子編碼中， d 代表可微，而 1、2、3、4 可分別改為 h 、 v 、 hc 、 vc ，且 $'$ 可改為 0，即以 h 代表水平切片， v 代表垂直切片， c 代表變數變換，0 代表零時前零控制。
- 註 3：注意 $dK(t-t')$ ， $\dot{K}(t-t')$ ， $du(t-t')$ ， $\dot{u}(t-t')$ 的 d 與 $'$ 是對其自變數 $(t-t')$ ，而非對 t' ，或對 t 。但積分上下限卻是對 t' 。
- 註 4：(1) 式積分上限 t 不需分別 t^- ， t ， t^+ ，(3)、(1d)、(3d) 類似，不需分別。然而 (2) 式之積分上限則需分別 t^- 與 t^+ ，(4)、(2d)、(4d) 類似，需要分別。這是由於 $K(Dt)$ 在 $Dt=0$ 處有跳躍，(2)、(4)、(2d)、(4d) 涉及 $dK(0)$ 或 $\dot{K}(0)$ ，所以要分別，但 (1)、(3)、(1d)、(3d) 只涉及 $K(0)$ ，不涉及 $dK(0)$ 與 $\dot{K}(0)$ ，所以不需分別。簡言之，前 8 式裡，偶數式有 $dK(0)$ 或 $\dot{K}(0)$

奇異性問題，故要計較零測度問題。

註 5：後 8 式都要計較零測度問題，因為偶數式有 $dK(0)$ 或 $\dot{K}(0)$ 奇異性問題，而奇數式有 $du(0)$ 或 $\dot{u}(0)$ 奇異性問題。

註 6：對前 8 式而言，水平切片的(1)、(3)、(1 d)、(3 d)很自然地只有單一積分項。垂直切片的(2)、(4)、(2 d)、(4 d)則很自然地均有兩項，除了由延時來的積分項(正規項)外，又有瞬間響應的非積分項(非正規項)，兩項可人為地收為單一的奇異積分項(有奇異核的積分)。對後 8 式而言，很自然地均有兩項，但均可人為地收為單一的奇異積分項(有奇異核的積分)，(2 d)與(3 d)則又可利用 Leibnitz 規則收為單一正規積分項的微分。

註 7：有奇異核的單一積分項表示法看似人為，但卻方便於採用弱奇異冪函數作為核函數。

註 8：文獻[19] Kondo 1991 之 p.393 式(10.136)與上述 16 式無一相合，是屬於廣義 Maxwell 與 Kelvin 模型的寫法，參見文獻[27] Valains 1971 的 Section 6。

3.13 老化模式

上述眾模式都是不老化(時不變，移不變)的，如為老化(時變，移變)則各材料性質變成隨時間變化的函數，例如 $K(t, t-t')$ 、 $C(t, t-t')$ 、 $E(t, t-t')$ 、 $S_c(t, \ln \tau_c)$ 、 $S_r(t, \ln \tau_r)$ 、 $p_i(t)$ 、 $q_i(t)$ 等等，因此模式變得比較複雜，常用的簡化舉例如下：

$$K(t, t-t') = \sum_i f_i(t) R_i(t-t') \quad (1)$$

也就是假設可分離，其中 $f_i(t)$ 代表老化部分。3.18 與 3.19 節即用到這樣的假設。

3.14 老化線性積分組成方程式

本節推廣上節 16 個式子到老化材(時變、移變系統)，但仍作線性假設。考慮老化，單位階梯響應 K 不僅是時差 $\Delta t = t - t'$ 的函數，也是時間 t 的函數，成了兩個自變數 t 、 Δt 的函數 $K(t, \Delta t) = K(t, t-t')$ 。採用簡化符號記法，積分上下限均指對 t' 而言，且

$$dK(t, t-t') = [K(t, \tau + d\tau) - K(t, \tau)] \Big|_{\tau=t-t'}$$

$$\dot{K}(t, t-t') = \frac{\partial}{\partial \tau} K(t, \tau) \Big|_{\tau=t-t'}$$

也就是 dK, \dot{K} 都是針對 $K(t, \Delta t)$ 的第 2 個自變數 Δt 作用的。此處採用以時差 Δt 作為第 2 個自變數的定義 $K(t, \Delta t)$ ，顯然比以控制作用時 t' 作為第 2 個自變數的定義 $K(t, t')$ 來得好，因為如此則老化(時差、移變)與不老化(時不差、移不變)幾乎可一體處理，只要將上節不老化各式的 $K(t-t')$ 多加一個自變數 t 改成 $K(t, t-t')$ ，並使用上述簡化符號記法即可。

各式據此分別推廣如下列。兩種導法分別得出

$$y(t) = \int_{-\infty}^t K(t, t-t') du(t') \quad (1)$$

$$y(t) = u(t)K(t, 0) - \int_{-\infty}^{t^-} u(t') dK(t, t-t') = - \int_{-\infty}^{t^+} u(t') dK(t, t-t') \quad (2)$$

經過變數變換，上二式分別化為

$$y(t) = -\int_0^{\infty} K(t, t') du(t-t') \quad (3)$$

$$y(t) = u(t)K(t, 0) + \int_{0^+}^{\infty} u(t-t') dK(t, t') = \int_{0^-}^{\infty} u(t-t') dK(t, t') \quad (4)$$

若 $u(t)$ 可微或 $K(t, \Delta t)$ 對 $\Delta t \in (0, \infty)$ 可微，但對 $Dt=0$ 不可微，則上 4 式分別化為

$$y(t) = \int_{-\infty}^t K(t, t-t') \dot{u}(t') dt' \quad (1d)$$

$$y(t) = u(t)K(t, 0) + \int_{-\infty}^{t^-} u(t') \dot{K}(t, t-t') dt' = \int_{-\infty}^{t^+} u(t') \dot{K}(t, t-t') dt' \quad (2d)$$

$$y(t) = \int_0^{\infty} K(t, t') \dot{u}(t-t') dt' \quad (3d)$$

$$y(t) = u(t)K(t, 0) + \int_{0^+}^{\infty} u(t-t') \dot{K}(t, t') dt' = \int_{0^-}^{\infty} u(t-t') \dot{K}(t, t') dt' \quad (4d)$$

若 $u(t) = 0$ 當 $t < 0$ ，但 $u(0)$ 可能不為 0，則上述 8 式分別化為

$$y(t) = \int_{0^-}^t K(t, t-t') du(t') = K(t, t)u(0) + \int_{0^+}^t K(t, t-t') du(t') \quad (1')$$

$$y(t) = u(t)K(t, 0) - \int_0^{t^-} u(t') dK(t, t-t') = -\int_0^{t^+} u(t') dK(t, t-t') \quad (2')$$

$$y(t) = -\int_0^{t^+} K(t, t') du(t-t') = K(t, t)u(0) - \int_0^{t^-} K(t, t') du(t-t') \quad (3')$$

$$y(t) = u(t)K(t, 0) + \int_{0^+}^t u(t-t') dK(t, t') = \int_{0^-}^t u(t-t') dK(t, t') \quad (4')$$

$$y(t) = \int_{0^-}^t K(t, t-t') \dot{u}(t') dt' = K(t, t)u(0) + \int_{0^+}^t K(t, t-t') \dot{u}(t') dt' \quad (1d)'$$

$$y(t) = u(t)K(t, 0) + \int_0^{t^-} u(t') \dot{K}(t, t-t') dt' = \int_0^{t^+} u(t') \dot{K}(t, t-t') dt'$$

$$= \frac{d}{d\tau} \int_0^{\tau} u(t')K(t, \tau - t')dt' \Big|_{\tau=t} \quad (2d)'$$

$$y(t) = \int_0^{t^+} K(t, t')\dot{u}(t-t')dt' = K(t, t)u(0) + \int_0^{t^-} K(t, t')\dot{u}(t-t')dt'$$

$$= \frac{d}{d\tau} \int_0^{\tau} K(t, t')u(\tau - t')dt' \Big|_{\tau=t} \quad (3d)'$$

$$y(t) = u(t)K(t, 0) + \int_{0^+}^t u(t-t')\dot{K}(t, t')dt' = \int_{0^-}^t u(t-t')\dot{K}(t, t')dt' \quad (4d)'$$

3.15 老化非線性積分組成方程式

上篇(3.14 節)的(2d)式

$$y(t) = K(t, 0)u(t) + \int_{-\infty}^{t^-} \dot{K}(t, t-t')u(t')dt' = \int_{-\infty}^{t^+} \dot{K}(t, t-t')u(t')dt' \quad (1)$$

以控制 $u(t)$ 為輸入，響應 $y(t)$ 為輸出，單位衝激響應 $\dot{K}(t, \Delta t)$ 為核函數，為老化線性積分組成方程式的一種形式，可用來推廣寫出老化非線性積分組成方程式。

因為(1)₁也可以看做是 $u(t)$ 的第 2 型線性 Volterra 積分方程式，而相應地 $u(t)$ 的第 2 型非線性 Volterra 積分方程式可寫作[19]

$$y(t) = H(t, 0, u(t)) + \int_{-\infty}^{t^-} \dot{H}(t, t-t', u(t'))dt' = \int_{-\infty}^{t^+} \dot{H}(t, t-t', u(t'))dt' \quad (2)$$

(1)與(2)都採用簡化符號記法：如同在(1)式中的 \dot{K} 是指 K 對第 2 個自變數 $(t-t')$ 的偏導數，在(2)式中的 \dot{H} 是指 H 對第 2 個自變數 $(t-t')$ 的偏導數。事實上，

$$\frac{\partial K}{\partial \tau}(t, \tau) \quad \text{與} \quad K(t, 0)$$

是兩個獨立的函數(前者為單位衝激響應，後者為瞬間放大係數)，而

$$\frac{\partial H}{\partial \tau}(t, \tau, u) \quad \text{與} \quad H(t, 0, u)$$

也是兩個獨立的函數，所以(1)₁·(2)₁ 式的確就是(與文獻裡一樣的)第 2 型線性、非線性 Volterra 積分方程式。

式(2)中的 $u(t)$ 視為控制輸入， $y(t)$ 響應輸出，則(2)就成為老化非線性積分組成方程式。

3.16 無參數彈塑性組成理論架構與冪函數參數化

彈塑性組成模式，在主動部分以羅倫茲群加以概括頗為成功，然而若是回應力部分佔有大宗，則所謂走動規則就很重要，這部分可藉由上述各節黏彈性組成模式以 λ 代替 t 來表示，同樣考慮消退記憶性其基本性質來系統化地模擬彈塑性應力應變關係。配合單向單調試驗及各種多向

循環試驗，如二向之軸扭試驗及三向之軸扭內壓試驗，發展系統化的實驗數據處理、試驗設計及模式識別、參數估計方法。

以共通特性為理論平台在前述緣由與目的已有部分陳述，要點是利用黏彈性理論、動態系統（動力學）理論、李群理論來建構彈塑性組成律。黏彈性理論幾乎可以移植過來，而動態系統理論與李群理論的應用在幾年前的研究裡已有成果。本節及下二節進一步研究三者之間的整合，在朝向彈塑性組成模式的改造上如何調整，並特殊化為冪定律，以及與實驗（數據識別估測）之配合。

3.17 塑性積分組成律(例一)

參考 3.14 節(2)或(2d)式，作以下的代換

$$\begin{aligned}
 t &\rightarrow \lambda(t) \\
 t' &\rightarrow \lambda' = \lambda(t') \\
 u &\rightarrow d\varepsilon^p/d\lambda \\
 y &\rightarrow \sigma \\
 K(t, t-t') &\rightarrow K(\lambda, \lambda - \lambda') \\
 dK(t, t-t') &\rightarrow dK(\lambda, \lambda - \lambda') = \Psi(\lambda, \lambda - \lambda')d(\lambda - \lambda') = -\Psi(\lambda, \lambda - \lambda')d\lambda' \\
 \dot{K}(t, t-t') &\rightarrow \Psi(\lambda, \lambda - \lambda')
 \end{aligned}$$

其中 λ 是塑性當量， ε^p 是塑性應變， σ 是應力，則(2)式與(2d)式化為

$$\sigma(\lambda) = K(\lambda, 0) \frac{d\varepsilon^p}{d\lambda} + \int_{-\infty}^{\lambda} \Psi(\lambda, \lambda - \lambda') d\varepsilon^p(\lambda')$$

兩邊乘以 $\dot{\lambda}(t)$ ，整理得

$$\dot{\lambda}(t)\sigma(t) = K(\lambda(t), 0)\dot{\varepsilon}^p(t) + \dot{\lambda}(t) \int_{-\infty}^t \Psi(\lambda(t), \lambda(t) - \lambda'(t))\dot{\varepsilon}^p(t')dt'$$

與 $\sigma = \sigma^a + \sigma^b$ 比較，可令

$$\dot{\lambda}(t)\sigma^a(t) = K(\lambda(t), 0)\dot{\varepsilon}^p(t)$$

$$\sigma^b(t) = \int_{-\infty}^t \Psi(\lambda(t), \lambda(t) - \lambda'(t))\dot{\varepsilon}^p(t')dt'$$

前者是塑流規則，規範主動應力 σ^a 與塑性應變率的關係，後者是走動硬軟化規則，規範回應力 σ^b 即降伏面中心的演化。

3.18 塑性積分組成律(例一)之冪函數參數化

本節具體說明，先寫出三維彈塑性組成律，配合軸向循環實驗，則組成律可化為一維的如下：

$$\dot{\varepsilon}_{11} = \dot{\varepsilon}_{11}^e + \dot{\varepsilon}_{11}^p \quad (1)$$

$$\dot{\sigma}_{11} = E\dot{\varepsilon}_{11}^e \quad (2)$$

$$\dot{\lambda}\sigma_{11}^a = 3\tau_c^2 \dot{\varepsilon}_{11}^p \quad (3)$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}}|\sigma_{11}^a| \leq \tau_c \quad (4)$$

$$\dot{\lambda} \geq 0 \quad (5)$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \dot{\lambda} |\sigma_{11}^a| = \dot{\lambda} \tau_c \quad (6)$$

在軸向循環實驗，塑性弧長(塑性應變路徑的弧長) η 是由 $\dot{\eta} = \left| \dot{\varepsilon}_{11}^p \right|$ 定義，因為是軸向循環試驗，

分上升段與下降段，所以上升段 $\frac{d\varepsilon_{11}^p}{d\eta} = 1$ ，下降段 $\frac{d\varepsilon_{11}^p}{d\eta} = -1$ ，那麼上述塑性當量 λ 又是什麼呢？

探討 λ 的意義如下：取(3)式的絕對值，代入(5)與(6)得

$$\dot{\lambda} = \sqrt{3} \tau_c \left| \dot{\varepsilon}_{11}^p \right| = \sqrt{3} \tau_c(\eta) \dot{\eta} \quad (7)$$

可見 λ 不是塑性弧長 η ，而是 η 的同胚，因為 $\tau_c(\eta) > 0$ 。

接著看，應力表成塑性應變增量的泛函

$$\sigma_{11}(\eta) = f(\eta)R(0) \frac{d\varepsilon_{11}^p}{d\eta} + f(\eta) \int_{-\infty}^{\eta^-} \psi(\eta - \eta') \frac{d\varepsilon_{11}^p}{d\eta'} d\eta' \quad (8)$$

其中 $\dot{R}(t) = \psi(t)$ 。注意此積分組成律是移變的，其核函數假設為單項可分離，即 3.17 節之

$K(\lambda, \lambda - \lambda')$ 改為 $K(\eta, \eta - \eta')$ 並假設

$$K(\eta, \eta - \eta') = f(\eta)R(\eta - \eta')$$

$$\dot{K}(\eta, \eta - \eta') = f(\eta)\dot{R}(\eta - \eta') = f(\eta)\psi(\eta - \eta')$$

$f(\eta)$ 就是移變的部份，相當於等向硬軟化函數，不失一般性令 $f(0) = 1$ 。

另由 $\sigma_{11} = \sigma_{11}^a + \sigma_{11}^b$ 與式(8)，可令

$$\sigma_{11}^a = f(\eta)R(0) \frac{d\varepsilon_{11}^p}{d\eta} \quad (9)$$

$$\sigma_{11}^b = f(\eta) \int_{-\infty}^{\eta^-} \psi(\eta - \eta') \frac{d\varepsilon_{11}^p}{d\eta'} d\eta'$$

已分出主動應力部分與回應力部分。由(3)及(7)可得

$$\sigma_{11}^a = 3\tau_c^2 \frac{d\varepsilon_{11}^p}{d\lambda} = \sqrt{3} \tau_c \frac{d\varepsilon_{11}^p}{d\eta}$$

此式與(9)比較可得

$$\sqrt{3} \tau_c(\eta) = f(\eta)R(0) \quad (10)$$

若進一步特殊化，具體假設卷積核函數 $\psi(\eta)$ 為冪函數，即 $\psi(\eta) = E_0 \eta^{-\alpha}$ ，其中 E_0 、 α 為材料常

數， $0 < \alpha < 1$ ，由 $\dot{R}(t) = \psi(t)$ 得

$$R(\eta) = R(0) + \frac{E_0}{1-\alpha} \eta^{1-\alpha}$$

接著討論單位斜坡響應(unit ramp response)：若對應黏彈性， $\varepsilon(t) = tH(t)$ ，可得 $\sigma(t) = R(t)$ ，因此若塑性，當 $\varepsilon_{11}^p(\eta) = \eta H(\eta)$ ，代入(8)可得

$$\sigma_{11} = \sigma_{11}^a + \sigma_{11}^b = f(\eta)R(\eta)$$

從實驗數據中的 $\sigma_{11} - \eta$ 關係圖[35]，取單軸拉伸段來看即為此關係式，因此此段數據即可寫成

$$\sigma_{11}(\eta) = f(\eta) \left[R(0) + \frac{E_0}{1-\alpha} \eta^{1-\alpha} \right]$$

在(8)及(10)式中，當 $\eta=0^+$ 時， $\sigma(0)=f(0)R(0)=R(0)=\sqrt{3} \tau_c(0)$ ，由實驗數據可得 $R(0)$ 及 $\tau_c(0)$ 的數值。

3.19 彈塑性分數微積分組成模式之參數估測

本節針對一個最簡單的彈塑性分數微積分組成模式，根據實驗數據，估測其材料參數。此模式為一個具有走動硬軟化之彈塑性組成模式，在彈性時為等向線彈性，主動應力滿足 von Mises 應力允許條件，塑性時遵守正交塑流規則，而其回應力則遵守分數微積分方程式所表示的走動規則。

將上述組成模式配合軸向實驗之應力應變狀態可表示成：

$$\dot{\varepsilon}_{11} = \dot{\varepsilon}_{11}^e + \dot{\varepsilon}_{11}^p$$

$$\sigma_{11} = \sigma_{11}^a + \sigma_{11}^b$$

$$\dot{\sigma}_{11} = E \dot{\varepsilon}_{11}^e$$

$$\dot{\lambda} \sigma_{11}^a = 3 \tau_c^2 \dot{\varepsilon}_{11}^p$$

$$\sigma_{11}^b(\eta) = E_0 \frac{d^\alpha}{d\eta^\alpha} \varepsilon_{11}^p(\eta), \quad 0 \leq \alpha \leq 1$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} |\sigma_{11}^a| \leq \tau_c$$

$$\dot{\lambda} \geq 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \dot{\lambda} |\sigma_{11}^a| = \dot{\lambda} \tau_c$$

根據 3.8 節分數微積分的定義，走動規則可以改寫成

$$\sigma_{11}^b(\eta) = E_0 \frac{\eta^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \varepsilon_{11}^p(0) + \frac{E_0}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\eta (\eta-\eta')^{-\alpha} \frac{d}{d\eta'} \varepsilon_{11}^p(\eta') d\eta', \quad 0 \leq \eta \leq 1$$

因 $\eta=0$ 代表零值狀態，故 $\varepsilon_{11}^p(0) = 0$ 。此時可以看出上述之彈塑性分數微積分組成模式為 3.18 節中積分組成律的一個移不變的特例。

若只識別拉伸段，其 $\frac{d\varepsilon_{11}^p}{d\eta} = 1$ ，因此可以解得回應力之演化方程式為

$$\sigma_{11}^b(\eta) = \frac{E_0}{\Gamma(2-\alpha)} \eta^{1-\alpha}, \quad 0 \leq \alpha \leq 1$$

利用實驗初期彈性段所估測出的 E 、 τ_c ，可以從塑性段的實驗數據中推求得出相對應的 σ_{11}^b 、 η 。因為上式在雙對數座標下為一直線方程式，故可以利用最小二乘法來估測出材料參數 E_0 、 α 。

$$\alpha = 1 - \exp \left\{ \frac{1}{D} \left[- \sum_{i=1}^N \ln \eta(i) \sum_{i=1}^N \ln \sigma_{11}^b(i) + \sum_{i=1}^N \ln(\sigma_{11}^b(i) + \eta(i)) \right] \right\}$$

$$E_0 = \Gamma(2-\alpha) \exp\left\{\frac{1}{D} \left[\sum_{i=1}^N \ln 2\eta(i) \sum_{i=1}^N \ln \sigma_{11}^b(i) - \sum_{i=1}^N \ln \sigma_{11}^b(i) \sum_{i=1}^N \ln(\sigma_{11}^b(i) + \eta(i)) \right]\right\}$$

其中 N 為數據個數、 $a(i)$ 代表第 i 時刻的 a 值、 $D = N \sum_{i=1}^N \ln 2\eta(i) - \left[\sum_{i=1}^N \ln \sigma_{11}^b(i) \right]^2$ 。圖一為根據

估測出 E_0 、 a 所模擬的 $\sigma_{11}^b - \eta$ 曲線與其實驗值。

若走動規則具有二個分數微積分項

$$\sigma_{11}^b(\eta) = E_0^\alpha \frac{d^\alpha}{d\eta^\alpha} \varepsilon_{11}^p(\eta) + E_0^\beta \frac{d^\beta}{d\eta^\beta} \varepsilon_{11}^p(\eta), \quad 0 \leq \alpha, \beta \leq 1$$

則其所對應之拉伸段回應力演化方程式

$$\sigma_{11}^b(\eta) = \frac{E_0^\alpha}{\Gamma(2-\alpha)} \eta^{1-\alpha} + \frac{E_0^\beta}{\Gamma(2-\beta)} \eta^{1-\beta}, \quad 0 \leq \alpha, \beta \leq 1$$

在雙對數座標下不為一直線方程式。因此利用最小二乘法來估測材料參數 α 、 E_0^α 、 β 、 E_0^β ，

則變為解四條聯立方程式

$$\begin{aligned} \alpha &= 1 - \exp\left\{\frac{1}{D_y} \left[-\sum_{i=1}^N \ln \eta(i) \sum_{i=1}^N \ln y(i) + \sum_{i=1}^N \ln(y(i) + \eta(i)) \right]\right\} \\ E_0^\alpha &= \Gamma(2-\alpha) \exp\left\{\frac{1}{D_y} \left[\sum_{i=1}^N \ln 2\eta(i) \sum_{i=1}^N \ln y(i) - \sum_{i=1}^N \ln \sigma_{11}^b(i) \sum_{i=1}^N \ln(y(i) + \eta(i)) \right]\right\} \\ \sum_{i=1}^N \left[\ln y(i) - \exp\left(\frac{E_0^\alpha}{\Gamma(2-\alpha)}\right) - (1-\alpha) \ln \eta(i) \right] \frac{\partial}{\partial A} \ln y(i) &= 0 \\ \sum_{i=1}^N \left[\ln y(i) - \exp\left(\frac{E_0^\alpha}{\Gamma(2-\alpha)}\right) - (1-\alpha) \ln \eta(i) \right] \frac{\partial}{\partial \beta} \ln y(i) &= 0 \end{aligned}$$

其中 $y(i) = \sigma_{11}^b(i) - A_1 \eta^{1-\beta}(i)$ 、 $D_y = N \sum_{i=1}^N \ln 2\eta(i) - \left[\sum_{i=1}^N \ln y(i) \right]^2$ 、 $A = \ln\left(\frac{E_0^\beta}{\Gamma(2-\beta)}\right)$ 。

同理，若走動規則具有 M 個分數微積分項，利用最小二乘法來估測材料參數 α 、 E_0^α 、 β_j 、

$E_0^{\beta_j}$ ，則變為解 2^M 個聯立方程式

$$\begin{aligned} \alpha &= 1 - \exp\left\{\frac{1}{D_y} \left[-\sum_{i=1}^N \ln \eta(i) \sum_{i=1}^N \ln y(i) + \sum_{i=1}^N \ln(y(i) + \eta(i)) \right]\right\} \\ E_0^\alpha &= \Gamma(2-\alpha) \exp\left\{\frac{1}{D_y} \left[\sum_{i=1}^N \ln 2\eta(i) \sum_{i=1}^N \ln y(i) - \sum_{i=1}^N \ln \sigma_{11}^b(i) \sum_{i=1}^N \ln(y(i) + \eta(i)) \right]\right\} \\ \sum_{i=1}^N \left[\ln y(i) - \exp\left(\frac{E_0^\alpha}{\Gamma(2-\alpha)}\right) - (1-\alpha) \ln \eta(i) \right] \frac{\partial}{\partial A_j} \ln y(i) &= 0, \quad j=1, \dots, M-1 \\ \sum_{i=1}^N \left[\ln y(i) - \exp\left(\frac{E_0^\alpha}{\Gamma(2-\alpha)}\right) - (1-\alpha) \ln \eta(i) \right] \frac{\partial}{\partial \beta_j} \ln y(i) &= 0, \quad j=1, \dots, M-1 \end{aligned}$$

其中 $y(i) = \sigma_{11}^b(i) - \sum_{j=1}^{M-1} A_j \eta^{1-\beta_j}(i)$ 、 $A_j = \ln\left(\frac{E_0^{\beta_j}}{\Gamma(2-\beta_j)}\right)$ 。

3.20 標稱應力控制與真實應力控制

過去文獻中[23, 24]曾指出在應力均值為零的對稱等振幅應力循環下，會有往拉伸向棘齒的現象。但有文獻[16]提及，若是標稱應力控制的實驗，會因為循環期間截面積的變化而造成應力均值往拉伸向偏移，這可能是產生上述棘齒的原因。

為了瞭解在真實應力均值為零的循環實驗中是否仍會產生拉伸向的棘齒，本計劃對兩種不同材料：鋁合金 7075 及不銹鋼 316，分別比較在標稱應力控制下與真實應力控制下經對稱等振幅應力循環後的應變反應，觀察其棘齒現象是否存在？有何差異？並觀察先拉或先壓不同的控制歷時對棘齒現象有何影響。

在真實應力控制的實驗過程中，以環向伸長計量測徑向位移，並換算成截面積變化後即時修正所控制的荷重，以達到真實應力控制的目的。但我們發現鋁 7075 由於表面硬度太軟，會讓環向伸長計嵌入試桿，以致無法達到真實應力控制的目的，為了克服此問題，我們利用金屬材料沒有塑性體積變形只有彈性變形這一重要事實，進一步假設此彈性為線性彈性，嘗試以下述三組應變應力對表示此線性彈性組成律：

A: *Lagrangian strain* 與 *2nd Piola-Kirchhoff stress*

B: *Eulerian logarithmic strain* 與 *Kirchhoff stress*

C: *Eulerian logarithmic strain* 與 *Cauchy stress*

並推導出理論的徑向位移(u_r)與徑向座標(r)比值： u_r/r [34]，再以無嵌入問題的不銹鋼 316 之實驗結果來驗證其精確度。這三組理論值與實際環向伸長計的測量值比較結果如圖一。由於我們實驗使用的試桿經真空退火處理，因此較一般加工硬化(work hardened)處理的試桿要軟，為了避免第一圈循環時，因應變反應過於劇烈而造成太大的誤差，我們從第二圈循環以後才開始計算理論值。由圖一我們可知這三種理論值與實際量測值都十分接近。如此理論值便可取代環向伸長計來回饋修正控制的荷重，達到真實應力控制的目的。

3.21 鋁合金 7075 的實驗分析

圖二及圖三是鋁合金 7075 在標稱應力控制下，經三階段(165-185-195MPa)對稱等振幅軸向應力循環各五圈後的應變反應歷時，圖二為先拉歷時的反應，圖三為先壓歷時的反應，由圖二與圖三我們可以清楚看到在第三階段 195MPa 時，都有明顯往拉伸向的棘齒行為。

為了清楚觀察出棘齒在循環期間的變化、及方便比較不同實驗的棘齒行為，我們將應變歷時中，應變率為負的應變貢獻量 ($\Delta\epsilon_i^c$) 與應變率為正的應變貢獻量 ($\Delta\epsilon_i^t$) 相重疊比較，對於循環硬化材料，當 $\Delta\epsilon_i^t$ 大於 $\Delta\epsilon_i^c$ 時，即表示往拉伸向產生棘齒，而且 $\Delta\epsilon_i^t - \Delta\epsilon_i^c$ 表示每圈的拉伸向棘齒增量[34]。我們將上述兩組實驗的應變貢獻量重疊後如圖四與圖五。圖四為先拉歷時，圖五為先壓歷時。

由圖四與圖五我們清楚看到，在第一階段 165MPa 循環期間，應變貢獻量 ($\Delta\epsilon_i^t$ 與 $\Delta\epsilon_i^c$) 明顯愈來愈小，即循環硬化的影響頗大。但隨著循環圈數及振幅的加大，應變貢獻量漸趨穩定，即循環硬化的影響漸小，一旦拉伸向的應變貢獻量 $\Delta\epsilon_i^t$ 大過壓縮向的應變貢獻量 $\Delta\epsilon_i^c$ ，便可逐漸觀察到拉伸向的棘齒現象。

因此可推斷，拉伸向棘齒產生的原因是由於拉、壓硬化不對稱所造成，壓硬化大於拉硬化，使得拉伸向的應變貢獻量 $\Delta\epsilon_i^t$ 大於壓縮向的應變貢獻量 $\Delta\epsilon_i^c$ ，如此隨著循環圈數累積，便形成拉伸向的棘齒。而循環硬化會影響上述的拉、壓硬化不對稱現象，即 $\Delta\epsilon_i^t$ 受循環硬化影響而小於 $\Delta\epsilon_i^c$ ，因而隱蔽棘齒現象。

另外再比較圖四與圖五，可發現先壓控制歷時要比先拉控制歷時還早發生棘齒，而且每圈的棘齒增量也較大。

圖六是鋁合金 7075 在真實應力控制下，經對稱等振幅(185MPa)軸向應力循環後的應變反應歷時，圖七是其應變貢獻量比較圖。由圖六及圖七可以明顯看到，在排除截面積變化所造成的應力均值偏差影響，而給予真實應力控制後，仍然有往拉伸向產生棘齒的現象。而且即使應變貢獻量都還有變小的趨勢，意即循環硬化尚未飽和，只要拉、壓硬化不對稱的影響大過循環硬化的影響，便可觀察到棘齒。

3.22 不銹鋼 316 的實驗分析

為了瞭解上述棘齒現象在不同材料間的差異，以下將以不銹鋼 316 的實驗結果和鋁合金 7075 相互比較。不銹鋼 316 除了彈性模數與降伏點和鋁合金 7075 不同外，在循環期間不銹鋼 316 是

先呈現循環硬化然後轉為循環軟化直到飽和，而鋁合金 7075 則是一直呈現循環硬化直到飽和為止。

圖八與圖九是不銹鋼 316 在標稱應力控制下，經對稱等振幅(450MPa)軸向應力循環二十圈的應變反應歷時，圖八為先拉，圖九為先壓。分別將其應變貢獻量重疊比較後可得圖十與圖十一，若在循環軟化期間要滿足拉伸向棘齒，應變貢獻量需同時滿足 $\Delta\varepsilon_i^t > \Delta\varepsilon_i^c$ 與 $\Delta\varepsilon_i^t - \Delta\varepsilon_i^c > \Delta\varepsilon_i^c - \Delta\varepsilon_{i-1}^t$ [34]。

由圖八與圖九我們同樣發現有往拉伸向產生棘齒的現象，由圖十與圖十一可更清楚看到先壓控制歷時比先拉的還快產生拉伸向棘齒，且先壓的每圈的棘齒增量也比先拉的還大。

圖十二與圖十三是在真實應力控制下，經兩階段(450MPa-475MPa)對稱等振幅軸向應力循環的應變反應歷時，圖十二為先拉歷時，圖十三為先壓歷時。圖十四與圖十五分別為其應變貢獻量比較圖。將圖十四與圖十五與圖十、圖十一比較後可看出，標稱應力控制實驗下的棘齒現象要比真實應力控制下的還明顯，換句話說，因截面積變化所造成的應力均值偏差，會讓拉伸向的棘齒更明顯。同樣的，我們也發現先壓歷時的棘齒要比先拉歷時還明顯。

對於先壓控制歷時的棘齒增量都會大過先拉控制歷時的原因，我們的解釋是因為先壓控制歷時會讓壓方向的硬化加劇，即壓縮向的應變貢獻量 $\Delta\varepsilon_i^c$ 較小，因此讓拉、壓不對稱更明顯，棘齒增量 $\Delta\varepsilon_i^t - \Delta\varepsilon_i^c$ 當然就更大。

4. 討論與結論

1. 本計畫探討各種模擬黏彈性組成關係的方法，包括積分組成律、遲緩譜、鬆弛譜、分布分數 Kelvin 與 Maxwell 模式等無參數表示法，以及微分組成律、廣義 Kelvin 模型、廣義 Maxwell 模型、各種特定分布 Kelvin 與 Maxwell 模型、分數微積分組成律，廣義分數 Kelvin 模式、廣義分數 Maxwell 模式、各種特定分布分數 Kelvin 與 Maxwell 模式、機械模型等有參數表示法。
2. 非退火態初始條件，在實務上極為重要，微分組成律的非退火態初始條件，在 3.7 節已給出，其他各種形式的組成模式的非退火態初始條件仍有待詳細導出。
3. 積分組成律可作為各種研究的平台，它的各種寫法在 3.12 節(不老化線性)與 3.14 節(老化線性)已詳細寫出，而老化非線性的通式寫法在 3.15 節也給出，利用這些平台，選擇 3.14 節的(2)式，以 $d\varepsilon^p / d\lambda$ 做為輸入 u ， σ 作為輸出 y ，也在 3.17 等節，有所應用。但是仍可探討其他可能性(其他的式，其他的量為 u ，其他的量為 y)。而且 3.12 節與 3.14 節只是單邊的積分方程式，還可以如 3.1 節的(1)式，與 3.11 節的(7)式般，寫出雙邊積分方程式，作為研究的平台。雙邊積分方程式作為研究平台是不可或缺的，在 3.11 節(8)式已有分數 Maxwell 模式的例子。
4. 本計畫研究譜表示法，建議應該進一步探討其作為(塊)對角化狀態空間表示法的意義以及狀態矩陣的左右特徵向量基的價值。有關於模式識別、參數估測，如何選擇(降低)參數的方式，本研究指出有三種離散化的方式以及設定各種統計分布之方式。
5. 彈塑性組成律的主動應力部份可以用羅倫茲群(或其推廣：龐加萊群、共形群)加以概括，回應力部份則可仿照線性老化黏彈性積分組成律，以塑性弧長或其同胚代替時間，以塑性應變代替應變，應力還是應力。由於此積分組成方程式是第二類 Volterra 積分方程式，可以自然地分出主動應力部份與回應力部份。主動應力部份與上述基於群論導得者比較，可以幫助確定核函數之移變(非卷積核)部份。而核函數之卷積核部份則可以利用冪函數(或指數函數或雙曲正切函數)等具體參數化之。
6. 同樣的實驗數據可以用不同的參數表示法(模式)去做參數估測，那一種方法，用的參數愈

少(對參加擬合的實驗數據而言),預測能力愈高(對未參加擬合的實驗數據而言),則那一種參數表示法愈好。整體來看,這就由『參數估測』進步到『模式識別』了。所以開發不同的無參數表示法作為研究平台,並開發各種不同的而有系統的參數表示法,甚為重要,值得再進一步努力。

7. 由 3.19 節的擬合經驗可知:(1)不止函數值本身要擬合,斜率值也要擬合,要做到值對了,趨勢也對,才是成功的擬合。(2)函數值、斜率值、以及約束條件之間的相對權重,或進一步更細分,不同區間的相對權重,也必須注意。因為在數值上,各個數據之間的量級可能大不同,不止百分比之差、或倍數差,而是量級差。(3)因為斜率(趨勢)很重要,必須參加擬合,所以實驗數據的雜訊必須去除,適當的濾波(光滑化)去雜訊的工作是必要的。(4)由所擬合的結果(圖一)來看,一個冪函數不夠,必須再增加,因為光一個冪函數,在應力應變曲線的前、中、後段,以及函數值或斜率值,會顧此失彼,如前段之函數值及斜率值都模擬好,但其他段卻可能不好,如只顧斜率(其權重加大),趨勢都對,但函數值卻反而不好,可見模擬的自由度、模態不夠。
8. 不論是真實應力控制或標稱應力控制,在對稱等振幅軸向應力循環下,鋁及不銹鋼都會往拉伸向產生棘齒,而且在標稱應力控制下,由於截面積的變化,會使真實應力的均值往拉伸向偏,因此棘齒現象較明顯。
9. 在對稱等振幅軸向應力循環下的棘齒現象主要是由“拉壓硬化不對稱”所造成,壓硬化大於拉硬化導致拉伸向的應變反應會大過壓縮向的應變反應,因此隨著循環圈數的逐漸累積會形成拉伸向的棘齒。對於循環期間遲滯圈呈循環硬化的材料,如:鋁合金 7075,則會讓拉伸向的棘齒隱蔽,因此需等到拉壓不對稱的影響大過循環硬化的影響才能觀察出棘齒現象,換句話說,拉壓不對稱的現象一直存在,而循環硬化隱蔽棘齒的影響卻會逐漸減小。若在循環期間遲滯圈呈循環軟化的材料,如:不銹鋼 316,則無上述隱蔽拉伸向棘齒的現象。
10. 應力振幅的大小會影響拉壓硬化不對稱的程度,不論是在真實應力控制或標稱應力控制的實驗中,當應力振幅較大時,拉壓硬化不對稱較明顯,所造成的應變反應差異也較大,棘齒累積量也大。而在標稱應力控制下的對稱等振幅應力循環,當振幅變大時因為循環期間截面積變化造成真實應力往拉伸向的偏移會更大,所以會讓拉伸向的棘齒比真實應力控制的還明顯。
11. 在循環實驗中,先壓的控制歷時會讓壓方向的硬化加劇($\Delta\varepsilon_i^c$ 變小的趨勢較明顯),因此先壓歷時與先拉歷時相比,拉伸向的應變反應會較快大過壓縮向的應變反應($\Delta\varepsilon_i^t$ 較快大過 $\Delta\varepsilon_i^c$),所以棘齒會比先拉歷時還快出現。如果棘齒是在循環硬、軟化飽和前出現,則先壓歷時的棘齒增量(即拉壓應變貢獻量差值 $\Delta\varepsilon_i^t - \Delta\varepsilon_i^c$)會大過先拉的,因此棘齒現象也較明顯。

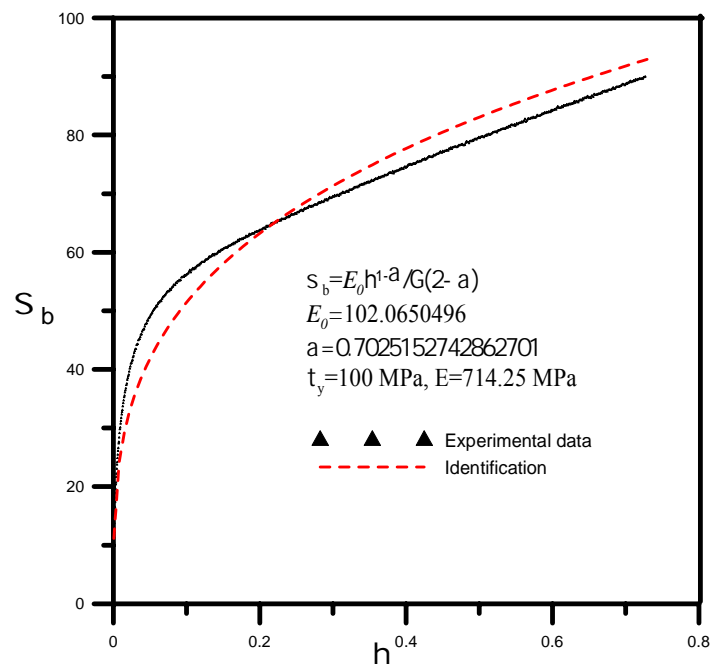
12. 參考文獻

- [1] Bagley, R. L. and Torvik, P. J., A theoretical basis for the application of fractional calculus to viscoelasticity, *Journal of Rheology*, Vol.27, No.3, pp.201-210, 1983.
- [2] Bagley, R. L. and Torvik, P. J., Fractional calculus—a different approach to the analysis of viscoelastically damped structures, *AIAA Journal*, Vol.21, No.5, 1983.
- [3] Bagley, R. L. and Torvik, P. J., On the fractional calculus model of viscoelastic behavior, *Journal*

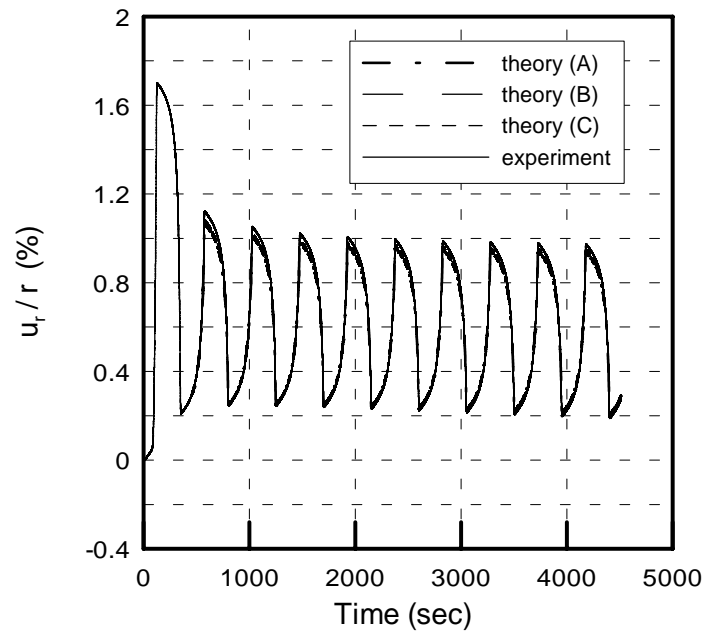
- of *Rheology*, Vol.30, No.1, pp.133-155, 1986.
- [4] Bocher, L., Delobelle, P., Robinet, P., and Feaugas, X., Mechanical and microstructural investigations of an austenitic stainless steel under non-proportional loadings in tension-torsion-internal and external pressure, *International Journal of Plasticity*, Vol.17, pp.1491-1530, 2001.
 - [5] Chaboche, J. L., and Nouaihas, D., Constitutive modeling of ratchetting effects— Part : experimental facts and properties of the classical models, *Journal of Engineering Materials and Technology*, Vol.111, pp.384-392, 1989.
 - [6] Chaboche, J. L., On some modifications of kinematic hardening to improve the description of ratchetting effects, *International Journal of Plasticity*, Vol.7, pp.661-678, 1991.
 - [7] Chaboche, J. L., Modeling of ratchetting: evaluation of various approaches, *European Journal of Mechanics, A/Solids*, Vol.13, pp.501-518, 1994.
 - [8] Chiang, D. Y., and Beck, J. L., A new class of distributed-element models for cyclic plasticity- . Theory and application, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 31, pp. 469-484, 1994.
 - [9] Chiang, D. Y., Su, K. H., and Liao, C. H., A study on subsequent yield surface based on the distributed-element model, *International Journal of Plasticity*, Vol.18, pp.51-70, 2002.
 - [10] Delobelle, P., Robinet, P., and Bocher, L., Experimental study and phenomenological modelization of ratchet under uniaxial and biaxial loading on an austenitic stainless steel, *International Journal of Plasticity*, Vol.11, pp.295-330, 1995.
 - [11] Findley, W. N. and Peterson, D. B., Prediction of long-time creep with ten-year creep data on four plastic laminates, *Proceedings of ASTM*, vol.58, pp.841, 1958.
 - [12] Hassan, T., and Kyriakides, S., Ratcheting in cyclic plasticity, Part : uniaxial behavior, *International Journal of Plasticity*, Vol.8, pp.91-116, 1992.
 - [13] Hassan, T., Corona, E., and Kyriakides, S., Ratcheting in cyclic plasticity, Part : multiaxial behavior, *International Journal of Plasticity*, Vol.8, pp.117-146, 1992.
 - [14] Hassan, T., and Kyriakides, S., Ratcheting of cyclically hardening and softening materials: . uniaxial behavior, *International Journal of Plasticity*, Vol.10, pp.149-184, 1994.
 - [15] Hassan, T., and Kyriakides, S., Ratcheting of cyclically hardening and softening materials: . multiaxial behavior, *International Journal of Plasticity*, Vol.10, pp.185-212, 1994.
 - [16] Haupt, A., and Schinke, B., Experiments on the ratcheting behavior of AISI 316L(N) austenitic steel at room temperature, *Journal of Engineering Materials and Technology*, Vol.118, pp.281-284, 1996.
 - [17] Jiang, Y., and Sehitoglu, H., Cyclic ratchetting of 1070 steel under multiaxial stress states, *International Journal of Plasticity*, Vol.10, pp.579-608, 1994.
 - [18] Kang, G., Gao, Q., and Yang, X., Uniaxial cyclic ratcheting and plastic flow properties of SS304 stainless steel at room and elevated temperatures, *Mechanics of Materials*, Vol.34, pp.145-159, 2002.
 - [19] Kondo, J., *Integral Equations*, Kodansha, Tokyo; Clarendon Press, Oxford, 1991.
 - [20] McDowell, D. L., Description of nonproportional cyclic ratcheting behavior, *European Journal of Mechanics, A/Solids*, Vol.13, pp.593-604, 1994.
 - [21] Ohno, N., Constitutive modeling of cyclic plasticity with emphasis on ratchetting, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol.40, pp.251-261, 1998.
 - [22] Ohno, N., Abdel-Karim, M., Kobayashi, M., and Igari, T., Ratchetting characteristics of 316FR steel at high temperature, Part : strain-controlled ratchetting experiments and simulations, *International Journal of Plasticity*, Vol.14, pp.355-372, 1998.
 - [23] Postberg, B., and Wei , E., Simulation of ratchetting of AISI 316L(N) steel under nonproportional uniaxial loading and high number of load cycles using the Ohno and Wang nonlinear kinematic material model, *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, Vol.77, pp.207-213, 2000.
 - [24] Richard, T. G., and Sandor, B. I., The Cyclic Stress-Strain Response of High Strength Cast Iron, *Proceedings of International Conference on Mechanical Behavior of Materials*, Kyoto, Japan, 1971.
 - [25] Sandor, B. I., *Fundamentals of cyclic stress and strain*, The University of Wisconsin Press, Wisconsin, 1972.
 - [26] Taheri, S., and Lorentz, E., An elastic-plastic constitutive law for the description of uniaxial and multiaxial ratchetting, *International Journal of Plasticity*, Vol.15, pp.1159-1180,1999.

- [27] Valanis, K. C., Irreversible Thermodynamics of Continuous Media: Internal Variable Theory, Springer-Verlag, Wien, 1971.
- [28] Xia, Z., and Ellyin, F., A constitutive with capability to simulate complex multiaxial ratcheting of materials, *International Journal of Plasticity*, Vol.13, pp.127-142, 1997.
- [29] Yoshida, F., Ratchetting behavior of 304 stainless steel at 650 under multiaxially strain-controlled and uniaxially/multiaxially stress-controlled conditions, *European Journal of Mechanics, A/Solids*, Vol.14, pp.97-117, 1995.
- [30] Yoshida, F., A constitutive model of cyclic plasticity, *International Journal of Plasticity*, Vol.16, pp.359-380, 2000.
- [31] 蕭雅柏，構造用金屬材料多向循環負載與異向性研究，國立台灣大學土木工程學研究所博士論文，台北，2000。
- [32] 曹長勇，單向對稱應力循環下之不對稱性棘齒行為實驗，國立台灣大學土木工程學研究所碩士論文，台北，2001。
- [33] 陳勇先，軸向循環塑性組成律模型參數研究，國立台灣大學土木工程學研究所碩士論文，台北，2001。
- [34] 余健維，單向對稱應力循環下之棘齒行為研究，國立台灣大學土木工程學研究所碩士論文，台北，2002。
- [35] 蔡耀宇，軸向循環塑性之系統化模擬，國立台灣大學土木工程學研究所碩士論文，台北，2002。
- [36] 李志偉，真實應力控制與標稱應力控制之棘齒行為研究，國立台灣大學土木工程學研究所碩士論文，台北，2003。

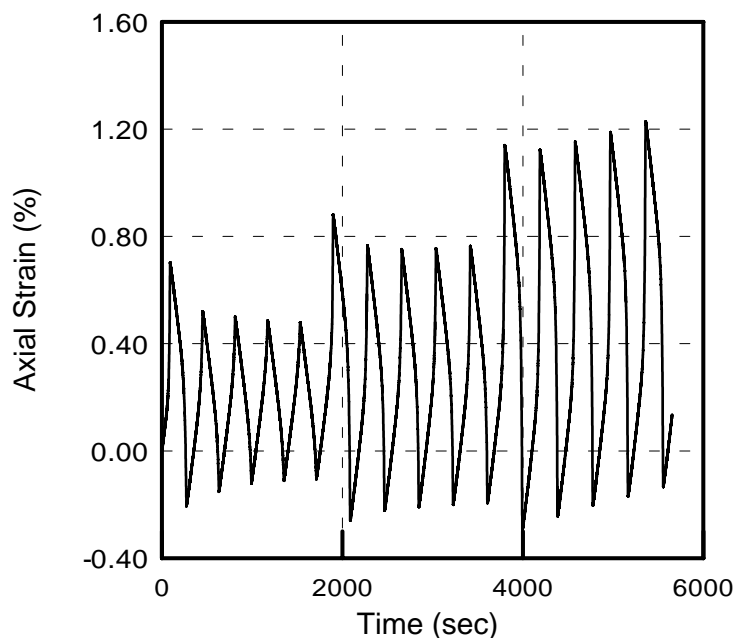
13. 圖



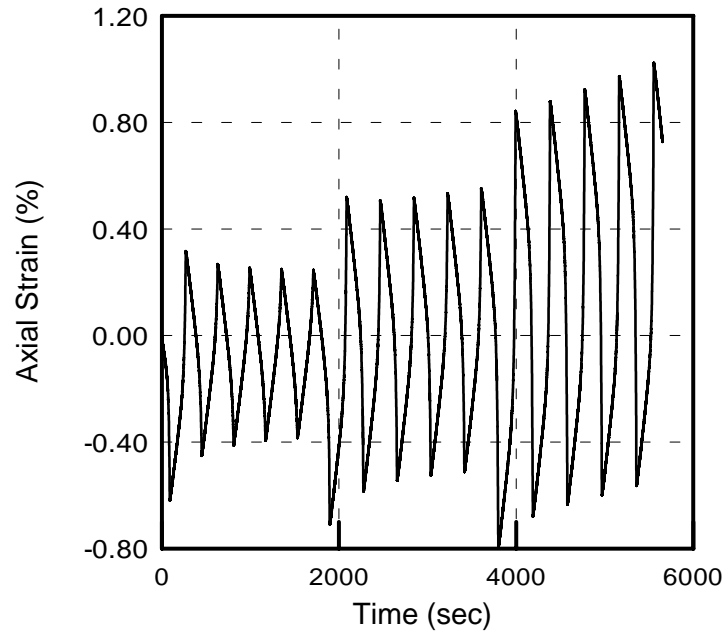
圖一 鋁 7075 實驗與模擬之 $\sigma_{11}^b - \eta$ 曲線



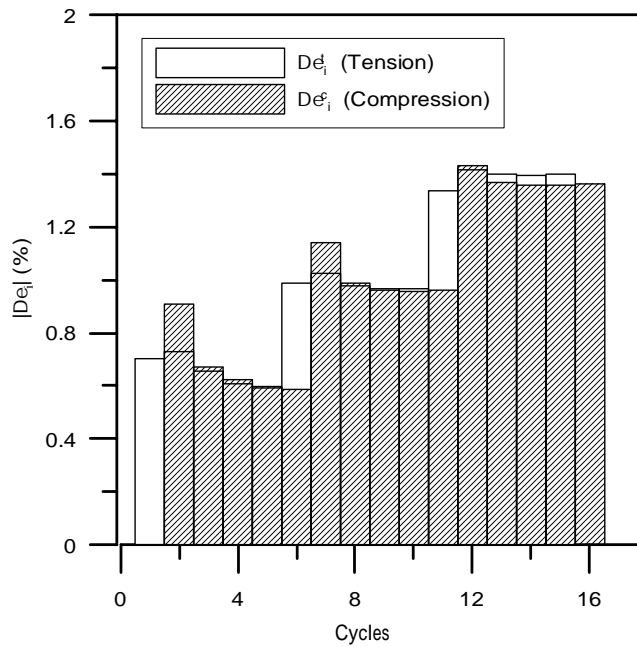
圖二 三組理論值與實際環向伸長計的量測值比較



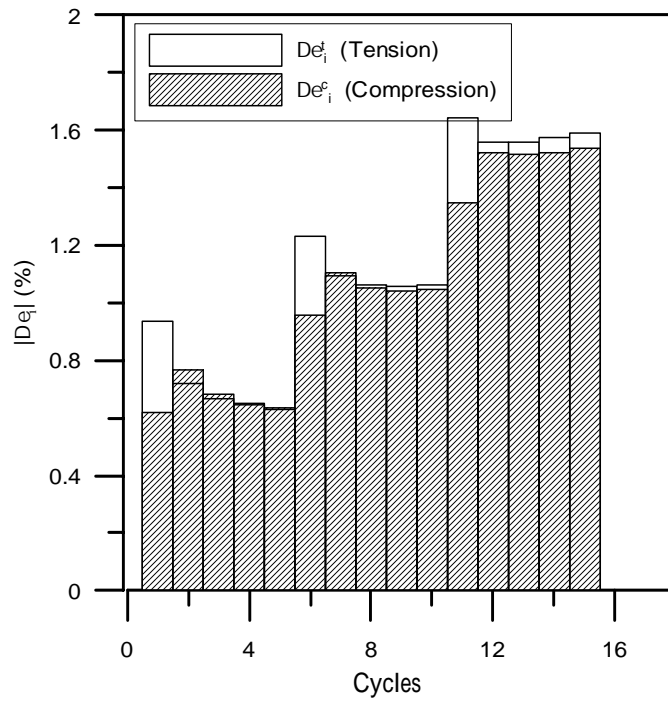
圖三 鋁 7075 三階段(165-185-195 MPa)對稱等振幅軸向應力循環應變反應歷時(先拉)



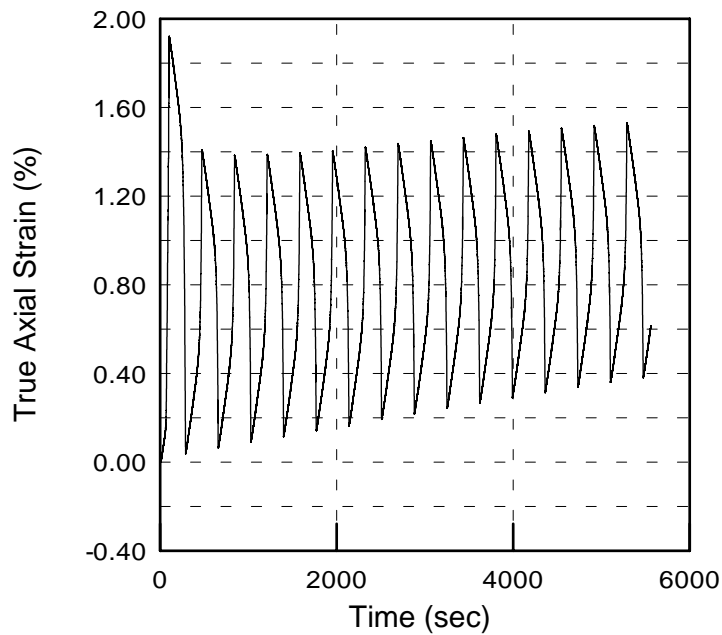
圖四 鋁 7075 三階段(165-185-195 MPa)對稱等振
幅軸向應力循環應變反應歷時(先壓)



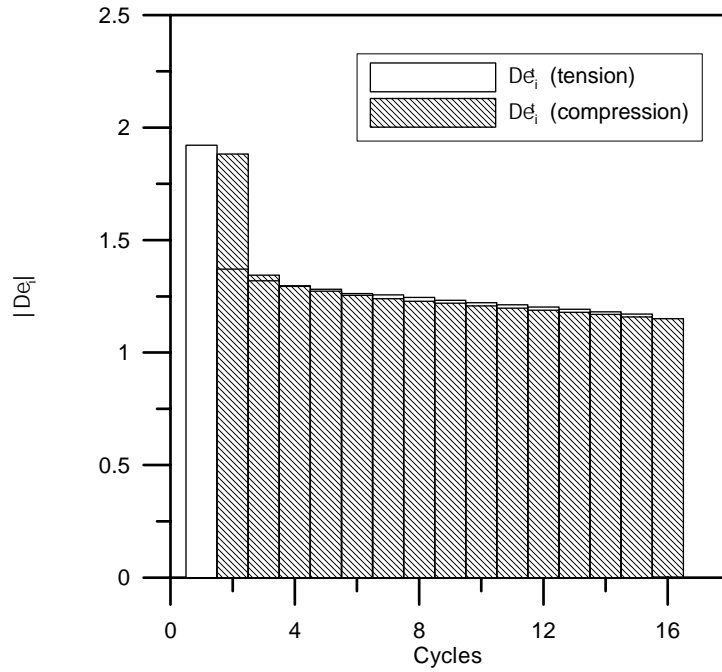
圖五 鋁 7075 三階段(165-185-195 MPa)對稱等振
幅軸向應力循環應變貢獻量比較圖(先拉)



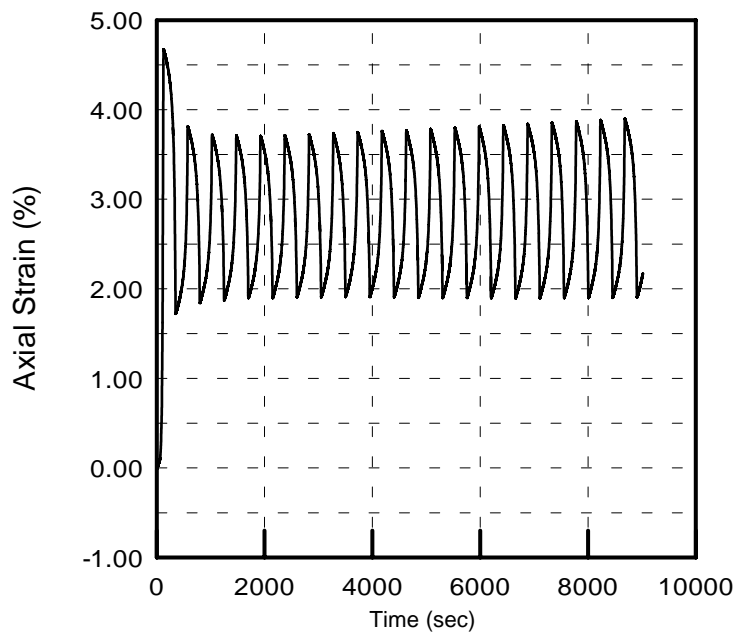
圖六 鋁 7075 三階段(165-185-195 MPa)對稱等振幅
軸向應力循環應變貢獻量比較圖(先壓)



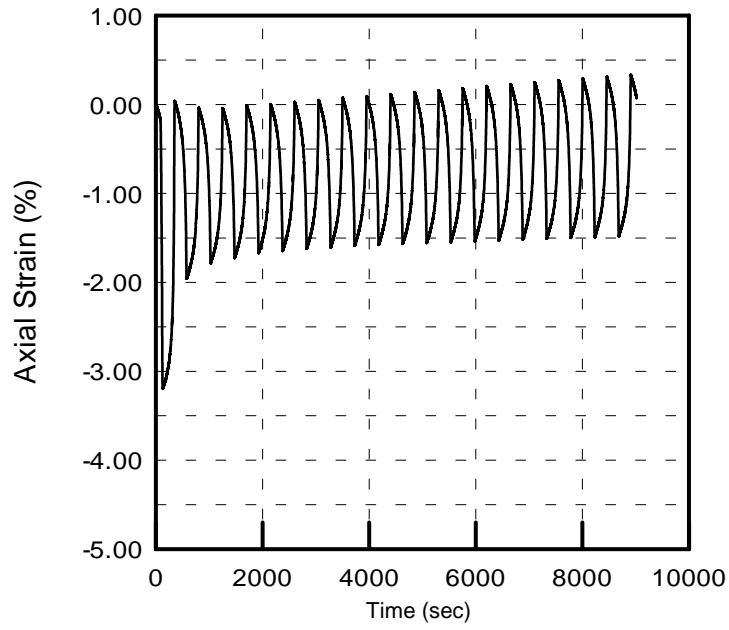
圖七 鋁 7075 對稱等振幅(185 MPa)軸向應力循環
應變反應歷時(真實應力控制)



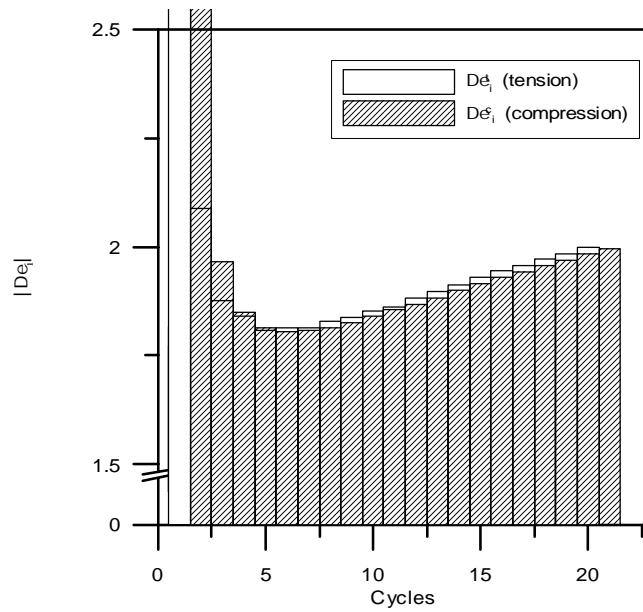
圖八 鋁 7075 對稱等振幅(185 MPa)軸向應力循環
應變貢獻量比較圖(真實應力控制)



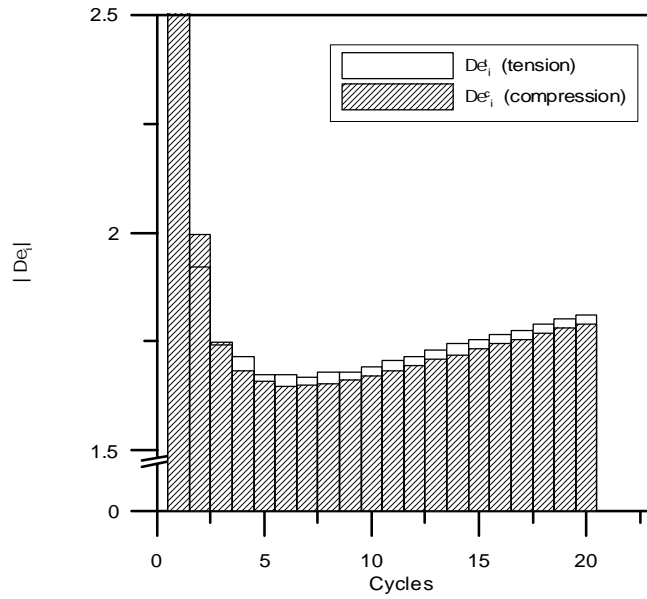
圖九 不銹鋼 316 對稱等振幅(450 MPa)軸向應力循環
應變反應歷時(先拉)



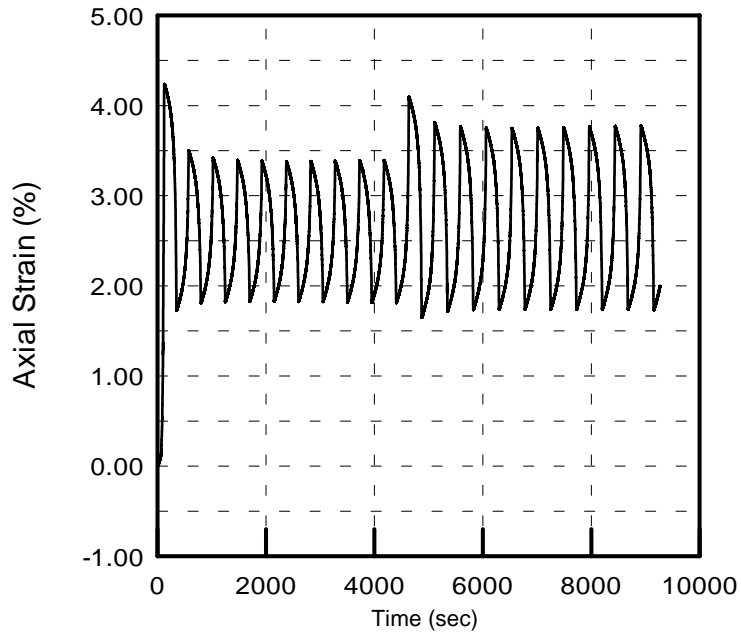
圖十 不銹鋼 316 對稱等振幅(450 MPa)軸向應力
循環應變反應歷時(先壓)



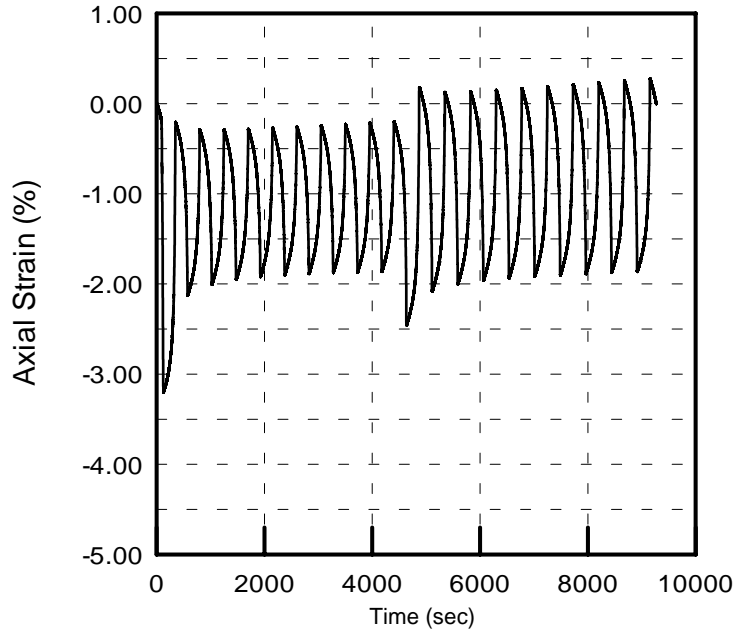
圖十一 不銹鋼 316 對稱等振幅(450 MPa)軸向應力
循環應變貢獻量比較圖(先拉)



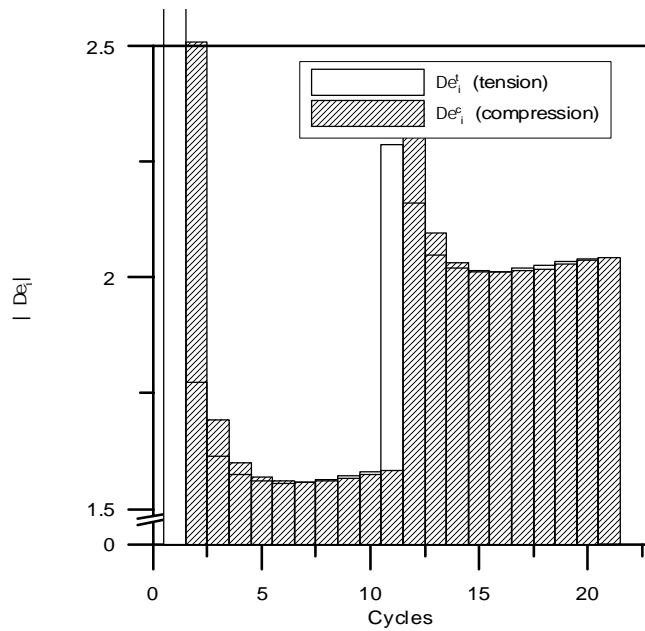
圖十二 不銹鋼 316 對稱等振幅(450 MPa)軸向應
力循環應變貢獻量比較圖(先壓)



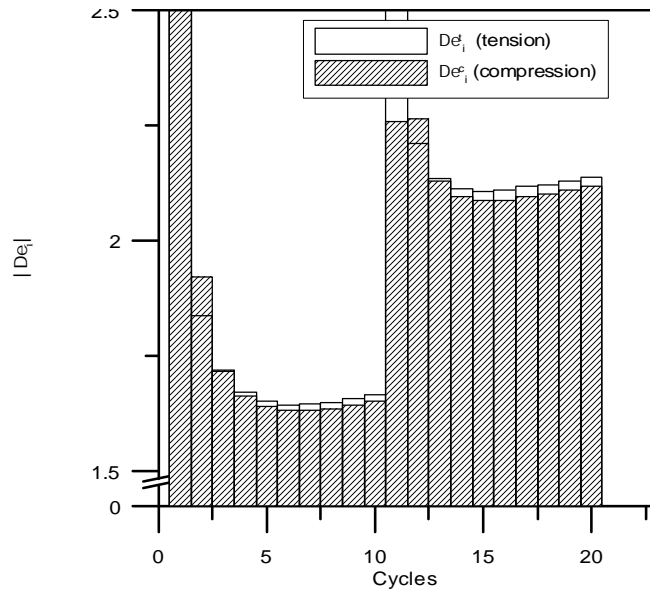
圖十三 不銹鋼 316 兩階段(450-475 MPa)對稱等振幅
軸向應力循環(真實應力控制)應變反應歷時(先拉)



圖十四 不銹鋼 316 兩階段(450-475 MPa)對稱等
振幅軸向應力循環(真實應力控制)應變反應歷時(先壓)



圖十五 不銹鋼 316 兩階段(450-475 MPa)對稱等振幅
軸向應力循環(真實應力控制)應變貢獻量比較圖(先拉)



圖十六 不銹鋼 316 兩階段(450-475 MPa)對稱等
 振幅軸向應力循環(真實應力控制)應變貢獻量比較圖(先壓)