

行政院國家科學委員會專題研究計畫 成果報告

反演孔頸網絡模型參數、建構導水曲線與發展動態二相流傳
輸之研究(2/2)

計畫類別：個別型計畫

計畫編號：NSC92-2211-E-002-083-

執行期間：92年08月01日至93年07月31日

執行單位：國立臺灣大學土木工程學系暨研究所

計畫主持人：李天浩

計畫參與人員：鄭安孺

報告類型：完整報告

處理方式：本計畫可公開查詢

中 華 民 國 93 年 11 月 23 日

行政院國家科學委員會專題研究計畫成果報告

反演孔頸網絡模型參數、建構導水曲線與發展動態二相流傳輸之研究(2/2)

A Study on Parameter Identification of Pore-Throat Network Model, Derivation of Conductivity Curve and on the Two-Phase Flow within the Dynamic Regime

計畫編號：NSC91-2211-E-002-042

執行期限：92年8月1日至93年7月31日

主持人：李天浩 國立台灣大學土木工程學系副教授

Email：thlee@ntu.edu.tw

中文摘要

本研究原先的構想是引入「孔頸網絡模型」(pore-throat network model)的觀念，完成發展孔頸網絡模型之非實驗性建構技術以及建制一套較完整的動態傳輸模擬程序的工作。唯本研究在深入探討「孔頸網絡模型」現有應用理論的完整性後，發現因為「孔頸網絡模型」有尺度效應的問題，無法完成解決逆向問題的研究目標，因此乃變更第二年的研究目標，改為發展一全新的孔隙尺度微模型，稱之為「單元孔頸系集模型」(Unit-pore-throat Ensemble Model)。

「單元孔頸系集模型」在幾何型態上，具有與孔頸網絡模型類似的擴張與收縮的「孔頸」結構；三角形頸管與正立方體頂角銜接的簡單幾何形狀，使得角隅濕潤相能夠相互連結，有利於未來計算單元孔頸傳導度。在力學機制上，「單元孔頸系集模型」是完全由微觀流體界面力學平衡原理，計算在某特定毛細壓力下，二流體相界面的形狀、位置、飽和度，以及流體界面幾何形狀與飽和度達到臨界狀態，發生置換的門檻毛細壓力條件。在正向分析上，「單元孔頸系集模型」可以模擬微觀墨水瓶效應與汲取過程中非濕潤相的入陷，實現巨觀上的磁滯現象，同時可以表現不同接觸角對於毛細壓力飽和度曲線的影響。在逆向演算時，「單元」和「系集」的設計，避免網絡模型尺寸效應和聯合機率密度問題，孔頸大小分布參數和退水、進水毛細壓力飽和度曲線的

連結關係較為直接。

利用退水和進水曲線的試驗資料，嘗試不同的「頸管管徑」-「孔徑徑比值」兩變數的聯合機率密度函數，歸納得兩變數為一對一對應分布即可得到良好的擬合結果的結論。正向演算證實本微模型基於幾何模型和物理原理，確實具有實現巨觀上磁滯現象以及表現不同接觸角對於毛細壓力飽和度影響的能力。唯本模型無論在正向或逆向演算上均非常繁複，並且目前反演模型參數的理論仍是基於過度簡化的假設上，雖然可以得到容易解析的好處，但是也限制模式的表現和解釋能力，還待未來研究逐步改進。

關鍵詞：孔隙介質、非水相性液體、二相流、特徵曲線、磁滯現象、非濕潤相殘餘量、單元孔頸系集模型、置換機制、逆向問題。

Abstract

This study establishes a Unit-Pore-Throat Ensemble Model (UPTM). It mimics the soil pore structure by many pore-throat units of different sizes which are not connecting to one another. Methodologies are developed to estimate the parameters of size distributions of pores and throats. They utilize the water-air soil experiment data of capillary pressure (P_c) and saturation (s) during primary drainage, primary imbibition and secondary drainage processes. The objective is to make the UPTM hydraulically equivalent to the actual

water-air-soil system. Provided with the UPTM parameters, the P_c - s scanning loops of water-NAPL two-phase fluids within the same soil can be inferred without doing the characteristic-curve experiments.

The equilateral triangle throats and cubic pore morphology of pore-throat units enable the UPTM to simulate the ink-bottle effect. The simple geometry and interconnected pore-throat edges make easy the positioning of fluid-interface balanced with the capillary pressure using Laplace Equation, as well as calculating the critical position and capillary pressure for interface displacement. Knowing the interface position, conductivity in addition to wetting- and non-wetting- phase saturations can be computed. In direct problems, UPTM can reproduce the hysteresis effect and quantify the trapping ratio on macro-scale. For the displacement criteria are derived from fluid mechanic principles and morphology of pore-throat units, UPTM can demonstrate the effect of contact angle on characteristic curves explicitly. The ensemble design of pore-throat units avoids the difficulties caused by size effect and the need to estimate joint distribution of network pore-throats in inverse problems. For the same reason, the size distribution parameters are more directly linked to the P_c - s curves.

Fitting the drainage and imbibition P_c - s curves with UPTM was tried with application of different 'throat' and 'aspect ratio' distribution types. It is shown that using a simple one-to-one relationship between the two variables, the model can match the data reasonably well. The drawbacks of the UPTM model are tedious calculation and over-simplified parameter estimation methodologies. Future research is needed for further improvement.

Keywords: Porous medium, non-aqueous phase liquid (NAPL), two phase flow, characteristic curves, hysteresis, non-wetting phase residuals, Unit-pore-throat Ensemble Model, displacement mechanism, inverse problem.

一、研究目的

利用數值模式描述異質性土壤中，包括非水相液體(NAPLs)的不互溶二相或三相流體的傳輸，最困難的部分是如何準確估計毛細壓力(p) 飽和度(s)和水力傳導係數(k)等特徵曲線參數。模擬多相流傳輸的套裝軟體(例如：UTCHEM-9.0, 資料來源：美國德州大學網站 <http://www.pe.utexas.edu/CPGE/UTCHEM>)及相關文獻中(例如 Parker, 1987 ; Parker and Lenhard, 1987 ; Lenhard and Parker, 1987a, b 等)，多建議在多相流系統中使用尺度化(*scaling*)技術修正的 Brooks and Corey(1966) 或 van Genuchten(1980)的模式，來估計包括 NAPL 在內的任意二相流或三相流 p - s - k 特徵曲線。然而，由於 Brooks and Corey 或 van Genuchten 等人參數化模式背後的平行管束理論並不能解釋磁滯現象(*hysteresis phenomena*)、無法估計 NAPL 的殘餘量，也不能正確表現殘留非濕潤相對於二相流體非飽和傳導係數的影響；而尺度化技術本身亦必須符合水 NAPL 或 NAPL 空氣接觸角等於水 空氣接觸角的假設，因此 Parker(1989)等人所提出的多相流特徵曲線模式其實是有許多物理上的限制。欲確估計有 NAPL 存在的多相流系統的水分壓力(P) 飽和度(s)和水力傳導係數(k)等特徵曲線參數準確估計水分壓力(P) 飽和度(s)和水力傳導係數(k)等特徵曲線參數，必須使用接近實際土壤的物理或數學模型。

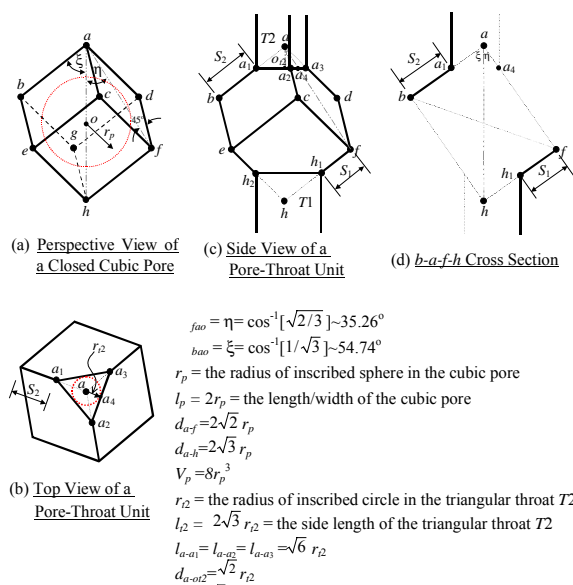
本研究原先的構想是引入「孔頸網絡模型」(*pore-throat network model*)的觀念，擬分為兩年完成以下的研究目標：一為發展孔頸網絡模型之非實驗性建構技術：利用逆向問題(*inverse problem*)的研究方法，由擬靜態的排退與汲取的 P_c - s 特性曲線決定孔頸元件的特性；二為建制一套較完整的動態傳輸模擬程序：推導計算單一矩形頸管中二相流傳導度的正確公式並建立計算偶合壓力場的方法，然後仿效 Mogenson et al.(1998)以及 Hughes and Blunt(1999, 2001)的研究，建制一套較完整的動態傳輸模擬程序。唯本研究在深入探討「孔頸網絡模型」現有應用理論的完整性後，發現因為「孔頸網絡模型」有尺度效應的問題，

無法完成解決逆向問題的研究目標(有關此部分的討論已於第一年的其中提出),因此乃變更第二年的研究目標,改為發展一全新的孔隙尺度微模型,稱之為「單元孔頸系集模型」(Unit-pore-throat Ensemble Model)。此「單元孔頸系集模型」由研究構想、模型單元與幾何設計、脫離置換機制推衍、界面位置與兩流體相飽和度計算等,均為本研究團隊所獨創。透過「單元孔頸系集模型」分析與應用,可由實際土壤中的「水 空氣」的首次退水、主進水、以及二次退水的毛細壓力 飽和度實驗資料,不經由實驗,推估在相同土壤中任意二相流體對、包含掃描迴路在內的磁滯毛細壓力 飽和度曲線。

二、研究方法

2.1 「單元孔頸」幾何

「單元孔頸系集模型」是許多大小不同、平行並列、且彼此獨立的「單元孔頸」的聚合體。每一「單元孔頸」中均包含二根正三角稜柱形頸管元件以及一正立方體孔元件,三元件之間是以如圖一所示之頸孔「頸」的方式組合,正三角形稜柱頸管是連接到正立方體孔的兩對頂角,並且頸管壁與孔壁、頸管角隅與孔角隅是完全接合的。



圖一 單元孔頸示意圖；(a)封閉正立方體孔之透視圖；(b)單元孔頸之側視圖；(c)單元孔頸之上視圖。

假設符號 r_t 代表頸管的內切圓半徑,

小寫足標“ t ”代表“頸管(throat)”,頸管的長度 l_t 等於頸管的內切圓半徑 r_t 乘以一個簡稱為管長因子(length factor)的倍數 z_t ,則頸管的體積為:

$$V_t = 3\sqrt{3}r_t^3 \cdot z_t \quad (1)$$

假設連接到孔兩側的頸管中,管徑較小的頸管為“T2”,管徑較大的頸管為“T1”,則孔的體積為立方體體積間去與頸管重疊的三角錐形體積,為:

$$V_p = 8r_p^3 - \sqrt{6}r_{t1}^3 - \sqrt{6}r_{t2}^3 \quad (2)$$

小寫足標“ p ”代表“孔(pore)”。頸管的邊長 $2\sqrt{3}r_t$ 不能大於孔壁對角線長 $2\sqrt{2}r_p$,因此最小孔頸徑比值 r_p/r_t 不能小於 $\sqrt{3}/\sqrt{2} = \sqrt{1.5} \approx 1.225$ 。令 S_i 代表位於頸管 i 側的孔邊的長度, $i=1,2$,則 S_i 為:

$$S_i = 2r_p - \sqrt{6}r_{t,i} \quad (3)$$

假設令 $r_p = r_{t1} \cdot a_{sp1}$, 其中, a_{p1} 為孔徑與大頸管管徑的比值,則單元孔頸的總體積可以表示為:

$$V = (8a_{sp1}^3 + 3\sqrt{3}z_{t1} - \sqrt{6})r_{t1}^3 + (3\sqrt{3}z_{t2} - \sqrt{6})r_{t2}^3 \quad (4)$$

2.2 置換機制(displacement mechanisms)

置換機制是指二相流界面在孔頸元件中,因為毛細壓力 P_c 改變,導致界面移動,達成新的平衡位置的物理法則和數學表示方式。本研究參考 Lenormand et al.(1983) 以及李天浩與鄭安孺(2004)等人在孔頸網絡模型中所獲得的結論,以及經由理論推導後,歸納得二相流界面在「單元孔頸系集模型」中應有三種主要的置換機制,分別為:凸界面的入侵(invasion)與回縮(retraction)、頸管中角隅界面的攔斷(snap-off)、以及孔中角隅界面的脫離(breakaway)。其中,凸界面的入侵是發生在排退的過程中,而凸界面的回縮、攔斷、以及脫離是發生在汲取的過程中。當凸界面是在等徑的頸管中移動時,其置換又特稱為活塞型運動(piston-type motion);當凸界面是在孔中移動時,由於與界面移動方向垂直的孔斷面積不是常數,每個位置的毛細壓力皆異,與頸管中的活塞型運動不同。

模型的邊界條件,是假設單元孔頸的兩端是連接到孔,這些邊界孔隙在排

退的過程中會較頸管先發生排退，而在汲取的過程中則是較頸管晚發生汲取。

2.2.1 排退過程中的置換事件

在排退的過程中，非濕潤相以凸界面 (convex interface，如圖二) 的方式自頸管入侵是唯一的置換機制。排退發生前，假設單元孔頸中是充滿濕潤相流體。排退過程中，毛細壓力是由低向高逐漸增加，所以大頸管會先發生活塞型置換。

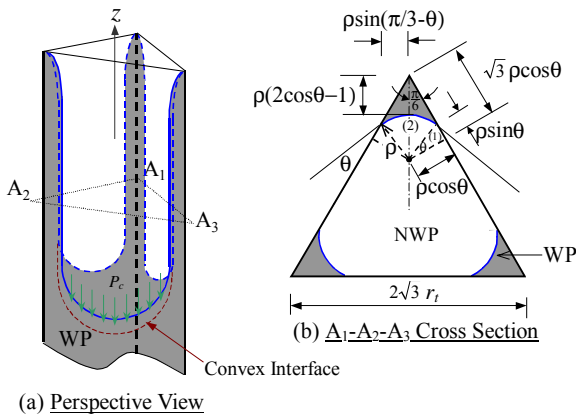
頸管中的活塞型運動

凸界面在等徑元件(頸管)中的移動是可逆的(reversible)，並且類似活塞的方式推移，因此這類型的置換機制被稱之為活塞型運動(Lenormand et al., 1983)。活塞型運動在排退和汲取的過程中均可能發生。

圖二所示為三角稜柱形頸管中的凸界面活塞型運動示意圖。以排退為例，當凸界面通過原先充滿濕潤相流體的頸管後，頸管的中心部分為非濕潤相，但在角隅處則仍有部分濕潤相存留(如圖二之 A₁-A₂-A₃ 剖面圖所示)。若假設頸管長度遠大於頸管管徑，則頸管角隅的二相流界面會大致平行於管的軸向，角隅界面的兩個主半徑分別為： ρ (垂直於濕潤相流線方向並且指向頸管中心的半徑) 和 ∞ (無限大，沿流線方向的半徑)。由毛細壓力的拉普拉斯方程式 (Laplace formula for capillary pressure) 可導出：

$$\rho = \frac{\sigma}{P_c} \quad (5)$$

其中， σ 為二流體的界面張力。



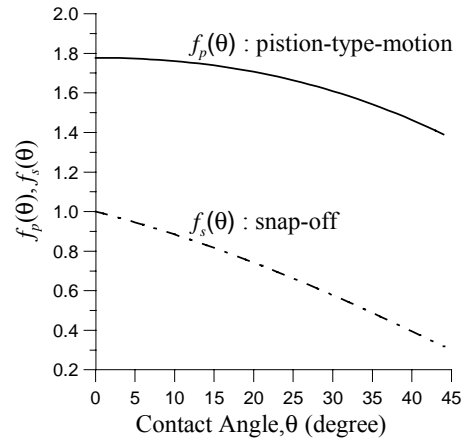
圖二 三角稜柱形頸管中的凸界面活塞型運動示意圖。

活塞型運動的門檻壓力值 $P_{cl,pt}$ ，可由

對作用在圖二(a)z 軸方向界面上的力取力平衡而求得(Lenormand et al., 1983 ; Legait, 1983)，為：

$$P_{cl,pt} = \frac{\sigma}{r_t} \left[\frac{\sqrt{3} \cos^2 \theta - \cos \theta \sin \theta - (\pi/3 - \theta)}{\sqrt{3} \cos \theta - \sqrt{\sqrt{3} \cos \theta \sin \theta + \sqrt{3}(\pi/3 - \theta)}} \right] \quad (6)$$

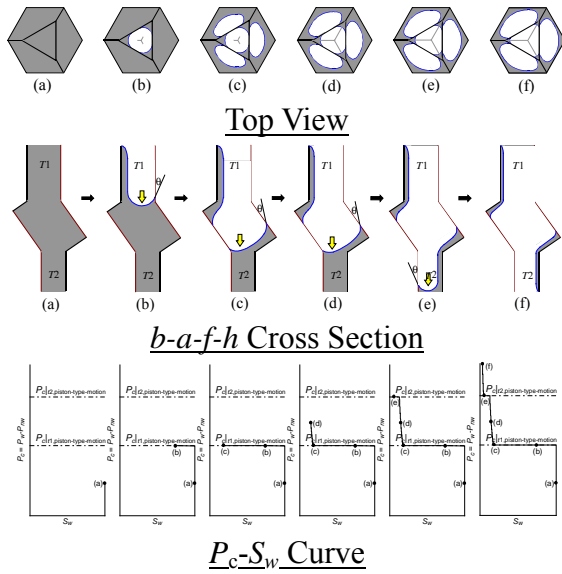
小寫足標“pt”代表“活塞型運動(piston-type motion)”。 $P_{cl,pt}$ 與頸管內切圓半徑 r_t 成反比，並且為接觸角 θ 的函數。以函數 $f_p(\theta)$ 表示(6)式等號右側的中括號內的子項，則函數 $f_p(\theta)$ 隨接觸 θ 的變化關係為如圖三所示。當 $\theta = 0^\circ$ 時， $f_p(0^\circ) \approx 1.778$ ；而當 $\theta = 30^\circ$ 時， $f_p(30^\circ) \approx 1.609$ 。 $f_p(\theta)$ 隨 θ 的增加而遞減。



圖三 函數 $f_p(\theta)$ 與 $f_s(\theta)$ 隨 θ 的變化關係。

圖四所示為單元孔頸中濕潤相流體的排退過程。圖中最上層為自大頸管 T1 向孔方向看的上視圖；中層為圖一中的 b-a-f-h 剖面圖；最下層則為毛細壓力 濕潤相飽和度曲線圖。深色部分代表濕潤相流體，白色部分則代表非濕潤相流體。當毛細壓力等於或大於大頸管 T1 的活塞型置換毛細壓力門檻值 $P_{cl,pt}$ 時，大頸管 T1 中會先發生活塞型置換，非濕潤相流體隨著凸界面的移動而入侵單元孔頸置換濕潤相流體。因為孔的斷面積是大於頸管的斷面積，因此當大頸管 T1 中發生活塞型置換、凸界面通過 T1 後，界面會繼續向前推進，通過孔中心，停留在孔與小頸管 T2 交界面附近的平衡位置。其後，隨著毛細壓力的繼續增加，凸界面會持續向小頸管 T2 的方向推進，並且角隅濕潤相厚度會減小。當毛細壓力達到小頸管 T2 的毛細壓力門檻值 $P_{cl,pt}$ 時，小頸管 T2 也會發生活塞型置

換，使得整個單元孔頸的中心部分均為非濕潤相流體。



圖四 單元孔頸中濕潤相流體排退過程示意圖。圖中深色部分代表濕潤相流體，白色部分代表非濕潤相流體，毛細壓力自左向右遞增。

2.2.2 汲取過程中的置換事件

汲取過程是毛細壓力遞減、濕潤相飽和度增加的過程。假設汲取是由極高的毛細壓力開始減壓，單元孔頸中二流體相的初始狀態是只有角隅處有濕潤相流體存在，汲取初期，濕潤相流體主要是經由增厚角隅流的方式擴充濕潤相飽和度。

在汲取過程中，除了頸管中發生凸界面回縮的活塞型置換外，會有另外二種不同的置換機制，分別為：頸管中的攔斷置換、和孔中的脫離置換。以下將先說明此二機制發生的毛細壓力條件，再由單元孔頸的幾何結構，分析單元孔頸中各置換機制的發生幾何條件。

頸管中的攔斷置換

單元孔頸模型中的攔斷機制是發生在頸管中。假設三角稜柱形頸管，在中心部分為非濕潤相流體，而角隅處為濕潤相(為方便說明起見，將其稱之為非濕潤相頸管)，二流體界面的曲率半徑分別為 $\rho = \sigma / P_c$ 以及 ρ 。角隅濕潤相厚度會隨著毛細壓力的下降而增厚，如圖五(a)-(c)所示，當頸管中的角隅界面達到如圖五(c)所示之臨界位置時，三個角隅的界面會相接觸。其後若再降低毛細壓力，界面已無法

再藉由調整曲率的方式與壓力達成新的平衡，此時，由於三角稜柱不同角隅的二流體界面相互接觸，使得非濕潤相必須脫離管壁， $A_1-A_2-A_3$ 斷面上的二流體界面傾向形成一個圓形，其半徑會小於比圖五(c)中的界面半徑。根據毛細壓力拉普拉斯方程式，在相同的毛細壓力下，當弧形界面一個方向上的曲率半徑變小，與其正交方向上的曲率半徑要變大。但是原先原先沿 z 軸方向上的界面曲率已為 ∞ ，因此，沿 z 軸方向上的界面曲率會由 ∞ 變為負值，同時曲率亦變為負值。曲率一正、一負的弧形界面為類似馬鞍形的軸對稱曲面。

從曲面脫離稜柱壁的橫斷面開始發展出的馬鞍形軸對稱曲面，是個不穩定的型態，其鞍部位置的正、負曲率半徑的絕對值都有變小的傾向，即中心部份的非濕潤相斷面積逐漸變小，最終被濕潤相給攔斷，非濕潤相向三角形稜柱頸管兩端排出，此攔斷過程可以在毛細壓力為定值時發生，該定值稱為攔斷現象的毛細壓力門檻值， $P_{c|t,sf0}$ 。由圖五(c)之 $A_1-A_2-A_3$ 剖面圖的幾何關係可知，攔斷的臨界條件為：

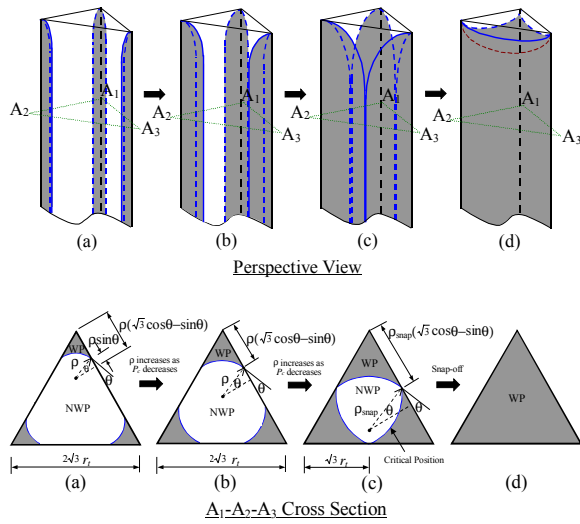
$$\rho(\sqrt{3} \cos \theta - \sin \theta) = \sqrt{3} r_t \quad (7)$$

(7)式等號的右側 $\sqrt{3} r_t$ 為三角形的半邊長。因此，三角稜柱形頸管中發生攔斷的臨界毛細壓力 $P_{c|t,sf}$ 為

$$P_{c|t,sf} = \frac{\sigma}{r_t} [\cos \theta - \sqrt{3} \sin \theta] \quad (8)$$

小寫足標“sf”代表“攔斷(snap-off)”。以函數 $f_s(\theta)$ 表示(8)式等號右側的中括號內的子項，當 $\theta = 0^\circ$ 時， $f_s(0^\circ) = 1.0$ ；而當 $\theta = 30^\circ$ 時， $f_s(30^\circ) \approx 0.577$ ， $f_s(\theta)$ 會隨接觸 θ 的增加而遞減。將函數 $f_s(\theta)$ 與 $f_p(\theta)$ 比較(圖三)，可發現對於所有的 θ ， $f_p(\theta)$ 均大於 $f_s(\theta)$ 。這表示無論流體的接觸角為何，同一頸管的活塞型置換毛細壓力門檻值必定大於攔斷置換毛細壓力門檻值。

一旦頸管中發生攔斷後，管中會完全為濕潤相流體所佔據，管中原先的非濕潤相流體會由管的兩端排出管外。頸管 T2 有較小的管徑，所以在一單元孔頸中，頸管 T2 中的攔斷是在汲取的過程中首先出現的置換機置。



圖五 攔斷置換發生前後三角稜柱形頸管內之角隅濕潤相的成長過程，圖中深色部分代表濕潤相流體，白色部分代表非濕潤相流體。(a)毛細壓力較高時的初始狀態；(b)中間狀態；(c)攔斷將發生時的臨界狀態；(d)攔斷發生後頸管中會完全為濕潤相流體所佔據。

孔中的脫離置換

當小頸管發生攔斷後，在孔頸交接處會有新的凸界面生成，孔中各點的界面將會連結成如圖六(a)所示之情形。隨著毛細壓力的下降，孔中界面會向孔中心推進。當界面聚合成如圖六(b)所示之球面狀態時，界面已達到最小曲率，其後若繼續降低毛細壓力，球形界面已無法再藉由穩定的調整界面曲率形成新的平衡曲面，因此界面會在瞬間脫離孔壁，使得濕潤相迅速入侵佔據整個孔體。此現象稱之為脫離置換。

由圖六(c)之 $b-c-f-g$ 剖面圖的幾何關係可知，脫離的臨界條件為：

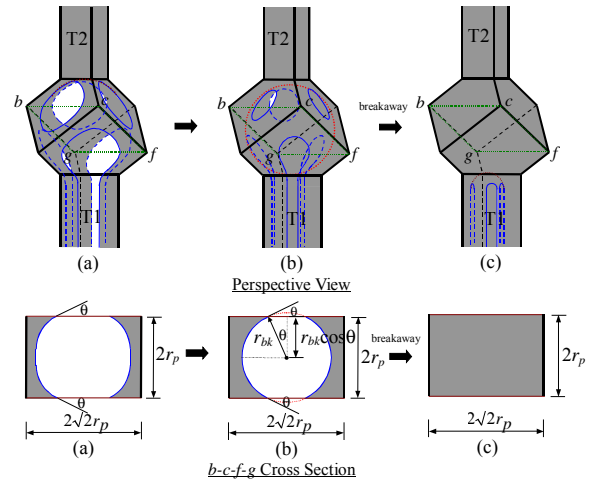
$$r_{bk} \cdot \cos \theta = r_p \quad (9)$$

其中， r_{bk} 代表脫離現象恰要發生時的球形界面的曲率半徑，則由拉普拉斯方程式可導出孔中發生脫離的臨界毛細壓力 $P_{c|p,b}$ 為

$$P_{c|p,bk} = \frac{\sigma}{r_p} [2 \cos \theta] \quad (10)$$

小寫足標“bk”代表“脫離(breakaway)”。

使孔中發生脫離置換的條件，除了系統的毛細壓力需等於或小於(10)式的門檻值外，還必須滿足以下條件：



圖六 脫離置換發生前後孔內之角隅濕潤相的成長過程，圖中深色部分代表濕潤相流體，白色部分代表非濕潤相流體。(a)毛細壓力較高時的初始狀態；(b)脫離將發生時的臨界狀態；(c)脫離發生後孔中會完全為濕潤相流體所佔據。

- (1) 小頸管 T2 必須已經發生攔斷。若是頸管 T2 的管徑很大，以至於頸管 T2 的攔斷置換毛細壓力門檻值 $P_{c|t2,sf}$ 小於孔的脫離置換毛細壓力門檻值 $P_{c|p,bk}$ 時，則即使系統的毛細壓力已經達到(10)式的壓力門檻值，脫離置換仍然不可能發生，因為此時孔中的界面並非為最小曲率的球形，必須等到頸管 T2 發生攔斷後，脫離才會隨之發生。
- (2) 大頸管 T1 尚未發生攔斷置換。否則孔中的非濕潤相會被入陷在其中而無法排出，則脫離不可能發生。換言之，使濕潤相入陷發生的條件是，頸管 T1 的攔斷置換毛細壓力門檻值必須要大於孔的脫離置換毛細壓力門檻值，亦即

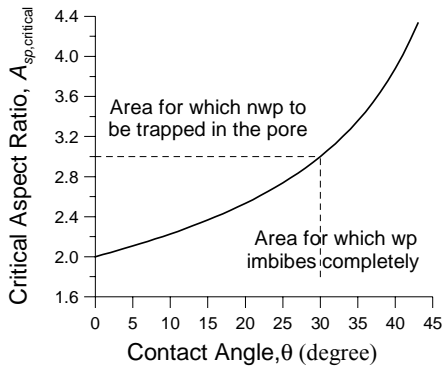
$$\frac{\sigma}{r_p} [2 \cos \theta] > \frac{\sigma}{r_{t1}} \left[\frac{\sqrt{3} \cos \theta - \sin \theta}{\sqrt{3}} \right]$$

定義孔頸徑比值(aspect ratio) a_{sp1} 為孔內切球半徑 r_p 除以大頸管 T1 的內切圓半徑 r_{t1} ， $a_{sp1} = r_p/r_{t1}$ ，則將上式移項重新整理後可得到使非濕潤相入陷的幾何條件為：

$$a_{sp1} < A_{sp,critical} = \frac{2\sqrt{3} \cos \theta}{\sqrt{3} \cos \theta - \sin \theta} \quad (11)$$

圖七所示為以 $A_{sp,critical}$ 對接觸角 θ 繪圖的結果，當 $\theta = 0^\circ$ ，臨界孔頸徑比值為 $A_{sp,critical}(0^\circ) = 2.0$ ；而當 $\theta = 30^\circ$ ，臨界孔頸徑比值為 $A_{sp,critical}(30^\circ) = 3.0$ 。由此可知，在

同樣的「單元孔頸系集模型」中，接觸角愈大，非濕潤相的入陷量愈少。此「接觸角愈大，非濕潤相的入陷量愈少」的結論與相關理論推導和 Wardlaw(1982)的實驗結果相符合。



圖七非濕潤相入陷的臨界孔頸徑比值隨接觸角變化的情形

單元孔頸中有另一個孔頸徑比值 $a_{sp2} = r_p/r_{t2}$ 然而孔中的非濕潤的入陷與否，是與 a_{sp2} 的大小無關的。

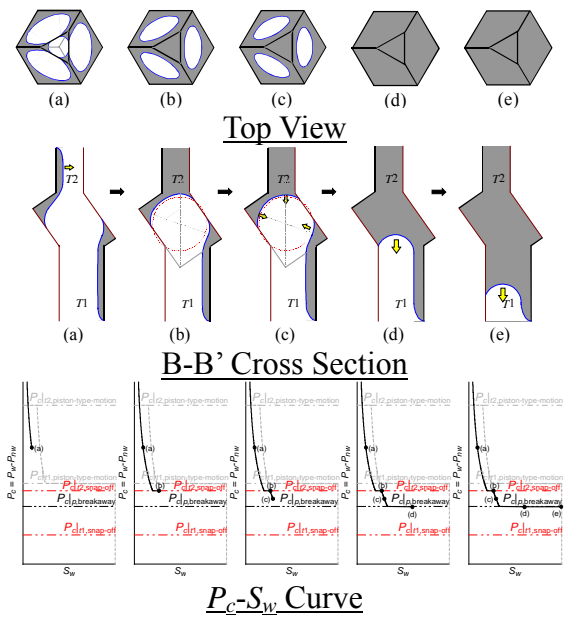
根據幾何條件，單元孔頸中的最小孔頸徑比值為 $\sqrt{1.5} \approx 1.225$ ，可知頸管中的活塞型置換壓力門檻值必定大於孔中脫離置換壓力門檻值。因此，一旦孔中發生脫離置換之後，另一根管徑較大的頸管 T1 中會隨之立即發生活塞型置換。孔中的非濕潤相流體會經由頸管 T1 而排出。

根據單元孔頸的幾何型態的不同，可以歸納出在單元孔頸中會有三種不同可能的汲取過程：

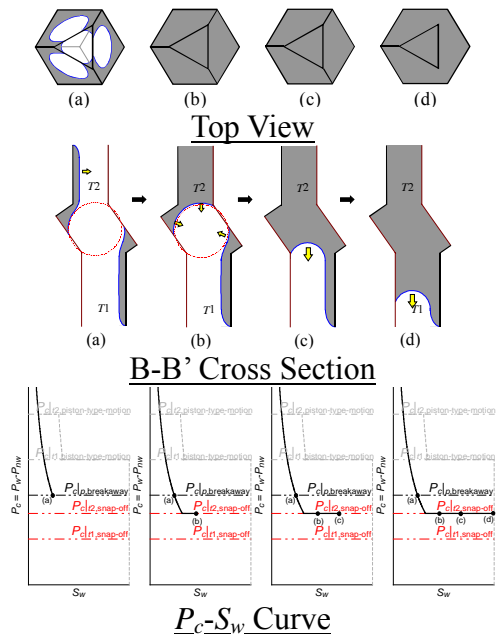
Case IA：當 $a_{sp2} > A_{sp,critical} \geq a_{sp1}$ 時， $P_{c|t2,sf} > P_{c|p,bk} \geq P_{c|t1,sf}$ ，在此情況下，單元頸管中濕潤相流體汲取過程為如圖八所示：小頸管 T2 先發生攔斷，其次為孔中發生脫離，而脫離發生後大頸管 T1 會立即發生活塞型置換。

Case IB：當 $A_{sp,critical} \geq a_{sp2} \geq a_{sp1}$ 時， $P_{c|p,bk} \geq P_{c|t2,sf} \geq P_{c|t1,sf}$ 。如前所述，脫離置換發生的必要條件之一是小頸管必須已發生攔斷。因此在此案例中，雖然 $P_{c|p,bk}$ 是大於 $P_{c|t2,sf}$ ，但是濕潤相汲取的置換過程與 Case IA 相似，為：小頸管 T2 發生攔斷，孔中發生脫離，大頸管 T1 發生活塞型置換。以上三種機制是在相同的毛細壓力 $P_{c|t2,sf}$ 下連續發生的，如圖九所示。Case IA 與 Case IB 的 P_c-S_w 曲線形式的主要差異

為，Case IA 的曲線上(圖九)有兩個飽和度劇烈變化段；而 Case IB 的曲線上(圖九)卻只有一個飽和度劇烈變化段。以上的兩案例中均不會有非濕潤相的入陷發生。



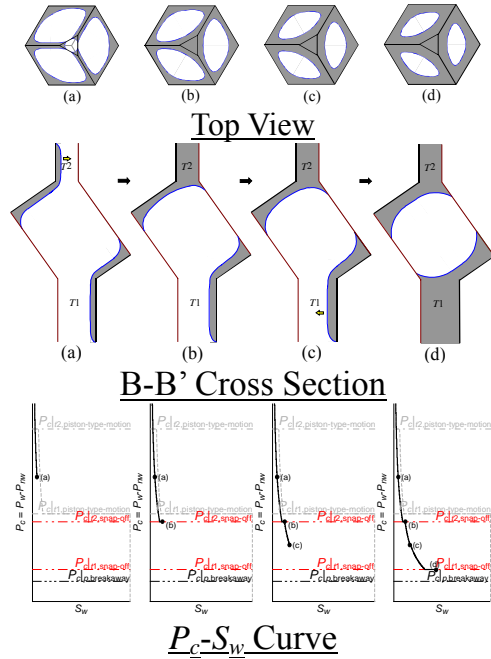
圖八 Case IA 的濕潤相流體汲取過程示意圖，圖中深色部分代表濕潤相，白色部分代表非濕潤相，毛細壓力自左向右遞減。



圖九 Case IB 的濕潤相流體汲取過程示意圖，圖中深色代表濕潤相，白色代表非濕潤相，毛細壓力自左向右遞減。

Case II：當 $a_{sp2} \geq a_{sp1} > A_{sp,critical}$ 時， $P_{c|t2,sf} \geq P_{c|t1,sf} > P_{c|p,bk}$ 。單元頸管中濕潤相流體汲取過程如圖十所示為：小頸管 T2 中先發生攔斷，其次是大頸管 T1 中發生攔斷。

孔中的非濕潤相會被入陷。



圖十 Case II 的濕潤相流體汲取過程示意圖，圖中部分代表濕潤相，白色代表非濕潤相，毛細壓力自左向右遞減。

2.3 單元孔頸中濕潤相體積估計法

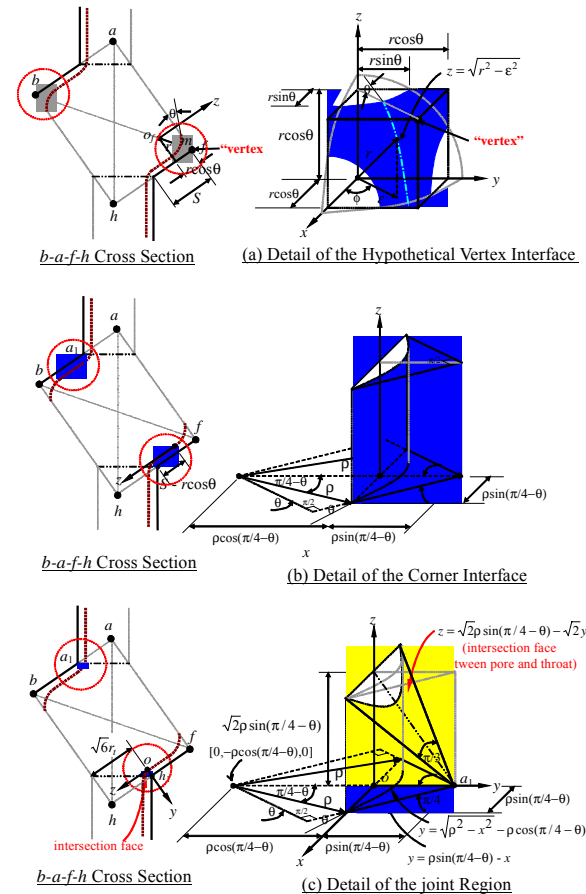
當三角稜柱形頸管充滿濕潤相流體時，可由(1)式求得頸管中的濕潤相體積。若頸管中同時有兩流體存在時，頸管中心部分為非濕潤相，而角隅處為濕潤相。頸管角隅的二相流界面大致上是平行於管軸的方向，其兩個主半徑分別為 $\rho \approx \sigma/p_c$ 和 (為方便說明，以下直接以「角隅界面」來稱呼此類型之位於角隅處、兩個主半徑分別為 ρ 和 的二相流界面)，頸管中的濕潤相體積可以濕潤相斷面積乘以頸管長度估計之。

當立方體孔是充滿濕潤相流體時，可由(2)式求得孔中的濕潤相體積。若孔中同時有二流體相存在時，孔中二相流界面上各點的實際平衡位置並無法由簡單的幾何分析獲得。因此，本研究是以概估界面平衡位置的方式來估計孔中濕潤相飽和度。其做法是將孔中的濕潤相體積分為以下三部分概估之：

(1) 頂點濕潤相：如圖十一(a)所示，為界於頂點界面(假設靠近頂點 f 的界面以 $o_f m$ 為對稱軸的球面)與孔壁的濕潤相體積。

(2) 角隅濕潤相：如圖十一(b)所示，為界於角隅界面與孔壁間的濕潤相體積。角隅濕潤相體積可由角隅濕潤相斷面積乘以角隅濕潤相總長度而求得。角隅濕潤相的總長度為孔的總邊長減去頂點濕潤相的邊長。

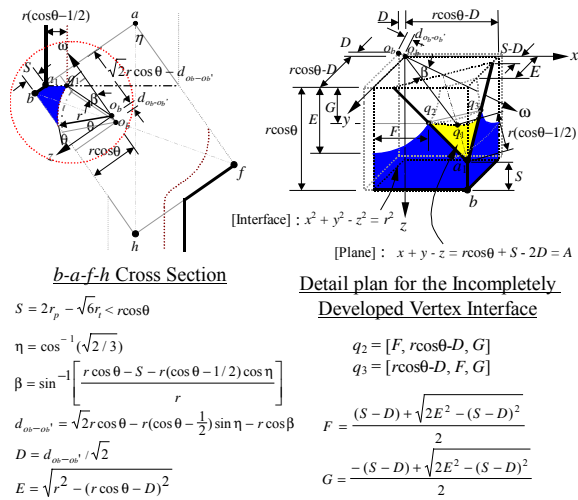
(3) 連結區域：如圖十一(c)所示，為前兩個部分以外，位於孔頸交接處的濕潤相體積。



圖十一 孔中(a)頂點界面、(b)角隅界面、以及(c)連結區域示意圖。

以上假設頂點界面的半徑 r 在三正交的孔邊上的投影長度均為 $r \cos \theta$ ，因此孔邊長 S 必須大於等於 $r \cos \theta$ (如圖十一(a)所示)。然而，若遇到頸管的管徑太大，以致於孔邊長小於 $r \cos \theta$ 時，則頂點界面將無法充分發展成如圖十一(a)的形狀。此時，必須修正頂點界面的假設。以下將其稱之為「未完全發展之頂點界面」(incompletely developed vertex interface)。估計未完全發展的頂點界面的方法，是假設鄰近頂點的未完全發展頂點界面是接近於圖十二所示之情形。

孔中濕潤相體積的推導過程非常複雜(詳見鄭安孺, 2004), 在此僅列出進入推估體積的原理, 詳細的公式請參考鄭安孺(2004)。



圖十二 未完全發展之頂點界面示意圖。

2.4 由 P_c - s 曲線反演單元孔頸細集模型

由實際土壤之毛細壓力(P_c) - 飽和度(s)反演單元孔頸系集模型的過程, 首先是選取「頸管管徑」(R_t)以及「孔頸徑比值」(A_{sp1})為基本變數, 然後由首次退水曲線推估頸管管徑機率密度函數參數, 由主進水以及二次退水曲線推估孔頸徑比值機率密度函數參數。圖十三所示典型的「水 - 空氣」毛細壓力 - 有效飽和度曲線, 由圖中預先分析到一些有利於推導管徑分布以及孔頸徑比值分布的資訊:

- (1) 根據 Brooks and Corey(1966), 在首次退水實驗中可觀察到 $\log(P_c)$ 和 $\log(s_{ew})$ 之間會呈現線性變化關係, 水飽和度隨毛細壓力的變化過程可以下列的參數化曲線來描述:

$$s_{ew} = \frac{s_w - s_{rw}}{1 - s_{rw}} = \begin{cases} \left(\frac{P_d}{P_c}\right)^\lambda & \text{for } P_c \geq P_d \\ 1 & \text{for } P_c < P_d \end{cases} \quad (12)$$

其中, s_{ew} 和 s_{rw} 分別為水的有效飽和度以及殘餘飽和度; λ 為在 $\log(P_c)$ - $\log(s_{ew})$ 平面上, 由退水資料所迴歸得之直線的斜率, 稱之孔徑分布指數 (pore-size distribution index); P_d 為將直線外延到 $S_{ew} = 1$ 時所對應的毛細壓力值, 如圖十三。考慮 P_d 與模型參數的關聯, 則 P_d

相當於使模型中最大頸管恰可發生活塞型置換的毛細壓力門檻值。假設水 - 空氣 - 固體間的接觸角為 0° , 則由(6)式可反推得模型的最大頸管管徑值, 即頸管管徑分布的上限值, $r_{t,max}$ 為:

$$r_{t,max} = \frac{\sigma_{w-a}}{P_d} \left[\frac{\sqrt{3} - \pi/3}{\sqrt{3} - \sqrt{\sqrt{3}(\pi/3)}} \right] \quad (13)$$

其中, σ_{w-a} 為水 - 空氣的界面張力, 在 20°C 時, $\sigma_{w-a} = 72.5 \text{ dyne/cm}$ 。

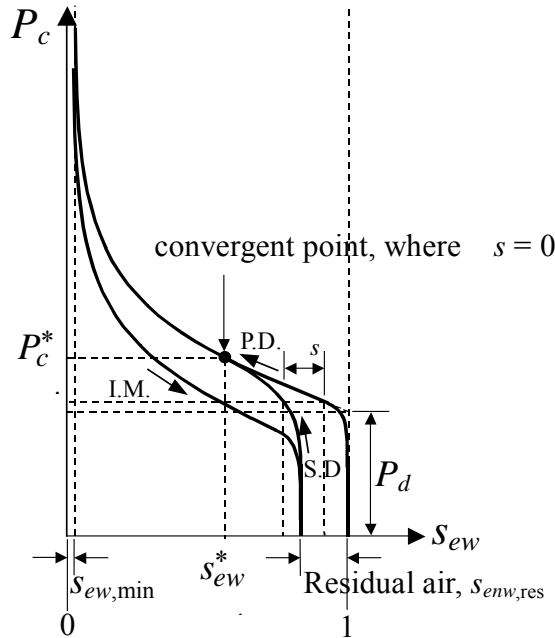
- (2) 汲取結束後, 水有效飽和度不會回復到 1.0, 減少的飽和度 $s_{enw,res}$ 是由於在汲取的過程中有空氣被入陷在土壤中。在首次退水的過程中, 土壤的初始條件為完全飽和、沒有空氣; 二次退水的初始條件, 在土壤中有空氣殘留, 因此在低毛細壓力時, 二次退水的飽和度會低於在相同的 P_c 下首次退水的飽和度。令首次退水與二次退水兩曲線間的飽和度差值為 Δs , Δs 會隨著毛細壓力的增加而變小, 這是由於部分原先被入陷在土壤中的空氣泡隨著毛細壓力的增加, 與入侵空氣形成連續通路, 入陷空氣飽和度逐漸減少的結果。當毛細壓力 P_c 增至某個壓力 P_c^* 時, $\Delta s = 0$, 二次退水曲線與首次退水曲線會重合, 表示此時土壤中已沒有非連續的空氣氣泡存在。由此可以研判, 在汲取過程中, 只有當 $P_c < P_c^*$ 才会有空氣的入陷發生; 並且當 $P_c \geq P_c^*$ 時, 退水與汲取間的飽和度差異完全是由於墨水瓶效應所造成; 而當 $P_c < P_c^*$ 時, 退水與進水間的飽和度差是由於墨水瓶效應與空氣入陷共同所造成的。令 r_t^* 為當毛細壓力為 P_c^* 時, 恰可發生活塞型置換的頸管管徑, 則由(6)式可反推得:

$$r_t^* = \frac{\sigma_{w-a}}{P_c^*} \left[\frac{\sqrt{3} - \pi/3}{\sqrt{3} - \sqrt{\sqrt{3}(\pi/3)}} \right] \quad (14)$$

在「單元孔頸系集模型」中, 所有的單元孔頸均為獨立的, 根據前述的分析, 在所有大頸管管徑 r_{t1} 小於 r_t^* 的單元孔頸中, 均不應有非濕潤相入陷的情形發生。根據(11)式, 當二相流的接觸角約

為 0° 時，臨界孔頸徑比值 $A_{sp,critical}$ 為 2.0，這表示在所有 r_{t1} 小於 r_t^* 的單元孔頸中，孔頸徑比值 a_{sp1} 均應小於 2.0

- (3) 對任一大於 r_t^* 的管徑 r_t ，均可以由(6)式計算得其發生活塞型置換的毛細壓力門檻值，並且可由圖十三查得在該毛細壓力下的 Δs 。對應於「單元孔頸系集模型」， Δs 所表示的意義為：在進水的過程中被入陷在大頸管管徑 r_{t1} 介於 r_t^* 與 r_t 之間、且孔頸徑比值 a_{sp1} 大於 2.0 的孔中的空氣體積百分比。空氣殘餘飽和度 $s_{enw,res}$ 是所有大頸管管徑 r_{t1} 大於 r_t^* 、且孔頸徑比值 a_{sp1} 大於 2.0 的單元孔頸的空氣入陷量總和。



圖十三 典型的首次退水、主進水、以及二次退水毛細壓力 水有效飽和度示意圖。

以首次退水曲線推導頸管管徑分布，必須先對模型作一些基本限制。假設對於所有的單元孔頸，均滿足「大頸管+孔」體積與小頸管體積比為 $r_{t1}^3 : r_{t2}^3$ ，亦即

$$8a_{sp1}^3 + 3\sqrt{3}z_{t1} = 3\sqrt{3}z_{t2} = 3\sqrt{3}w \quad (15)$$

其中， z_1 和 z_2 分別為大頸管與小頸管的管長因子， w 為定值。在暫不考慮角隅濕潤相飽和度的情況下，首次退水曲線可以用以下的積分公式來表示：

$$S_{ew}(R) = \frac{\int_{r_{t,min}}^R r_t^3 \cdot h(r_t) dr_t}{\int_{r_{t,min}}^{r_{t,max}} r_t^3 \cdot h(r_t) dr_t} \quad (16)$$

其中， R 代表當毛細壓力為 P_c 時，恰可發生活塞型置換的頸管管徑； $h(r_t)$ 為頸管管徑分布。比較(12)與(16)式後，可導出頸管管徑分布為

$$h(r_t) = \frac{(-k/r_{t,min})(r_t/r_{t,min})^{k-1}}{1 - (r_{t,max}/r_{t,min})^k} \quad (17)$$

其中， $r_{t,max}$ 與 $r_{t,min}$ 分別為最大與最小頸管管徑，理論上 $r_{t,min} \rightarrow 0$ ，實際計算時，可取一個足夠小的有效飽和度，例如，令 $s_{ew,min} = 0.002$ ，所對應的毛細壓力為壓力上限，將其代入(6)式中，以其反推得的頸管管徑為 $r_{t,min}$ ；參數 $k = \lambda - 3$ 。當納入角隅濕潤相體積後，要以試誤方式微調 k 值，得到最小估計誤差參數。

孔頸徑比值，經本研究測試後，可取為頸管管徑的一對一指數型函數。根據由圖十三所得到的分析結果，當單元孔頸的大頸管管徑大於 r_t^* 時，其所對應的孔頸徑比值是大於 2.0，而當單元孔頸的大頸管管徑是小于 r_t^* 時，其所對應的單元孔頸徑比值是小于 2.0，因此孔頸徑比值函數的形式可假設為：

$$a_{sp1}(r_t) = c_0 + c_1 \exp\left[-\frac{(r_{t,max} - r_t)}{a}\right] \quad (18)$$

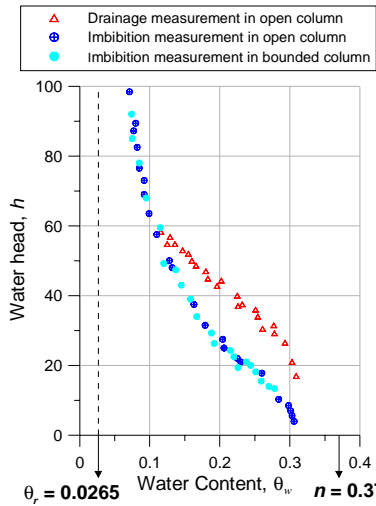
上式會滿足 $a_{sp1}(r_t^*) = 2.0$ ，並且 $a_{sp1}(r_{t,min}) \geq \sqrt{1.5}$ 。同時，對於大頸管管徑大於 r_t^* 的單元孔頸的孔體積積分後再除以所有單元孔頸的總體積後，其值應接近於土壤的殘餘空氣飽和度 $s_{enw,reso}$

一旦選取了一組管徑以及孔頸徑比值率密度函數後，下一個步驟是將連續的管徑與孔頸徑比值機率密度函數離散為有限的區間，計算各區間的平均管徑值和平均孔頸徑比值，然後以這些平均值為隨機變數的樣本來組合模型，再由模型模擬退水與進水毛細壓力 飽和度曲線。將模擬得到的結果與實驗資料比較，若模擬結果的誤差過大，則調整參數後再次重複步驟離散變數、組合模型、以及模擬的過程，直到得到有最小估計誤差、令人滿意的模擬結果為止。而此時所對應的函數參數應為

最佳估計參數。

三、文獻案例研究分析

本研究採用 Touma and Vauclin(1986)的進水和退水的實測資料來測試「單元孔頸系集模型」理論的可行性。圖十四所示 Touma and Vauclin(1986)實驗的原始量測資料，其中，符號 Δ 代表在開放土柱中所量測到的退水資料；而 \circ 和 \bullet 則分別代表在開放以及在封閉土柱中所量測到的入滲資料，殘餘含水量 θ_r 約為 $0.0265 \text{ cm}^3/\text{cm}^3$ ，最大量測含水量 $\theta_{w,\max}$ 約為 $0.312 \text{ cm}^3/\text{cm}^3$ ，其小於孔隙率 $n=0.37 \text{ cm}^3/\text{cm}^3$ ，這是由於空氣入陷所致(Touma and Vauclin, 1986)。Touma and Vauclin(1986)的報告指出，邊界條件對入滲實驗的結果並無顯著的影響。



圖十四 Touma and Vauclin(1986)原始張力水頭 含水量實驗資料(重繪自 fig. 2, Touma and Vauclin, 1986)。

根據 Touma and Vauclin(1986)的說明，可知其實驗所量測得的數據是分屬於進水與二次退水的資料。由於沒有首次退水的資料，因此本研究必須要自行研判首次退水曲線可能的形式。分析的方法，首先是將所有資料點的含水量 θ_w 換算成有效飽和度 $s_{ew} = (\theta_w - \theta_r)/(n - \theta_r)$ ，然後將所有 (h, s_{ew}) 資料點繪在對數座標平面上，如圖十五(a)所示。由圖上可觀察到，在二次退水前段，張力水頭尚低時， $\log(h)$ 與 $\log(s_{ew})$ 之間是呈現非線性關係，當 h 大於 36cm 之後， $\log(h)$ 與 $\log(s_{ew})$ 之間會轉變為近似線性關係。由此可以推論，首次退水曲線與二次退水曲線應該會在 $(h, s_{ew}) = (36, 0.645)$ 點重

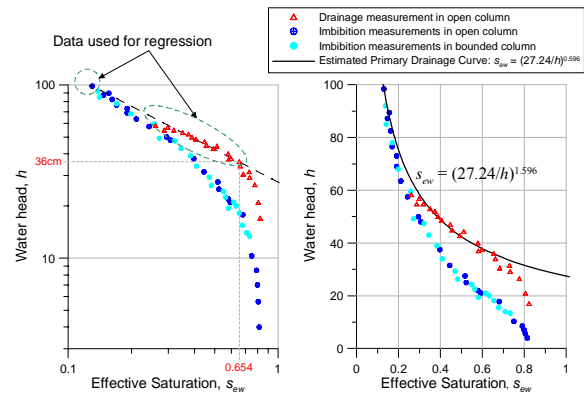
和，首次退水曲線會通過 h 大於 36cm 的資料點之間。因此，本研究以圖十五(a)所圈選第 8 點到第 23 點的退水資料(由低張力水頭向高張力水頭的方向計數)，以及第 1 點的進水資料(由高張力水頭向低張力水頭的方向計數)，以最小二乘法來迴歸首次退水曲線。得到首次退水曲線為，

$$s_{ew} = \begin{cases} \left(\frac{27.24}{h}\right)^{1.596} & \text{for } h \geq 27.24\text{cm} \\ 1 & \text{for } h < 27.24\text{cm} \end{cases} \quad (19)$$

其中， $\lambda = 1.596$ ； $h_d = 27.24\text{cm}$ 。 $P_d = \rho g h_d = (1)(980)(27.24) \approx 26695.2 \text{ g/cm.s}^2$ 。將 P_d 代入(13)式中，可估計得 $r_{t,\max} \approx 48.28 \mu\text{m}$ 。令 $s_{ew,\min} = 0.2\%$ ，則 $r_{t,\min} \approx 0.43 \mu\text{m}$ 。

首次退水與二次退水曲線重合點的張力水頭為 $h^* = 36\text{cm}$ ，因此 $P_c^* = \rho g h^* = (1)(980)(36) \approx 35280 \text{ g/cm.s}^2$ 。將 P_c^* 代入(6)式中，可估計得 $r_t^* = 35.54 \mu\text{m}$ 。

最大空氣殘餘飽和度為 $s_{enw,\text{res}} = 1 - (\theta_{w,\max} - \theta_r)/(n - \theta_r) = (n - \theta_{w,\max})/(n - \theta_r) = (0.37 - 0.312)/(0.37 - 0.0265) \approx 0.169$ 。



(a) Data plotted on log scale plane (b) Primary Drainage Curve Estimation

圖十五 Touma and Vauclin(1986)實驗資料分析：(a)資料在 $\log(s_{ew})-\log(h)$ 平面上的分布情形；(b)首次退水張力水頭 有效水飽和度曲線估計。

3.1 演型推行

已知模型管徑分布是界於 $r_{t,\max} = 48.28 \mu\text{m}$ 到 $r_{t,\min} = 0.43 \mu\text{m}$ 之間，將 $r_{t,\max}$ 以及 $r_{t,\min}$ 代入(17)式中，可得到頸管管徑機率密度函數為：

$$h(r_t) = \frac{-2.314 \cdot (2.314 \cdot r_t)^{k-1} \cdot k}{1 - 111.71^k}$$

其中，參數 k 的初估值是取為 $k = \lambda - 3 = 1.596 - 3 = -1.404$ ，經多次的測試後，將 k 修正為 $k = (-1.404)(0.9) \approx -1.264$ 。

估計孔頸徑比值機率密度函數的做法，首先是將(15)式中的常數 w 取為：

$$w = \sqrt{2} + (8/3\sqrt{3}) \cdot a_{sp1}^3(r_{i,max})$$

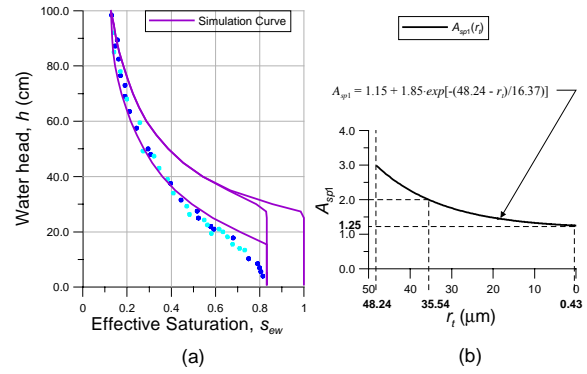
並且令 $a_{sp1}(r_{i,min}) = a_{sp1}(0.43) = 1.25$ ，然後以空氣殘餘飽和度 $s_{enw,res}$ 的估計誤差小於 1%，且以最小飽和度估計誤差為目標，以試誤法尋找最佳 $a_{sp1}(r_i)$ 。最後得到：

$$a_{sp1}(r_i) = 1.15 + 1.85 \cdot \exp\left[-\frac{(48.28 - r_i)}{16.37}\right]$$

其中， $0.43 \mu\text{m} \leq r_i \leq 48.28 \mu\text{m}$ ，如圖十六(b)所示。

圖十六(a)所示為本組模型所模擬得的 P_c-s 曲線，將模擬結果與實驗資料比較，可發現到本組模型的模擬效果相當良好。模擬與實驗誤差較大之處，是發生在低飽和度時的進水曲線。由於模型的本身已限制進水曲線必須收斂到 $(h_s, 1-s_{enw,res})$ 的位置，其中， h_s 為使最大管徑恰發生攔斷所需的張力水頭，在本模型中 $h_s = 15.50 \text{ cm}$ ； $1-s_{enw,res} = 1 - 0.169 = 0.831$ ，因此任何「單元孔頸系集模型」均無法近似的模擬得在低張力水頭時的 Touma and Vauclin(1986) 入滲實驗資料。

另一方面，模型也無法近似的模擬得到張力水頭小於 h_p 的退水實驗資料，因為模型所模擬得到的二次退水曲線必須經過 $(h_p, 1-s_{enw,res})$ 的位置，其中， h_p 為使最大管徑恰發生活塞型置換所需的張力水頭。理論上，首次退水與二次退水曲線應該有相同的進入壓力，然而在本案例中並未得到這樣的現象，其原因可能是本研究對實驗資料的解讀不盡完善，也可能是 Brooks and Corey(1990)的參數曲線並不能表現低毛細壓力時的實際退水狀況。



圖十六 單元孔頸系集模型之：(a)張力水頭有效水飽和度曲線模擬結果；(b)孔頸徑比值條件分布。

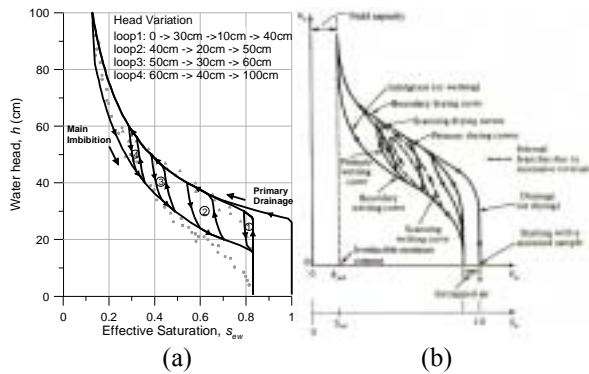
根據以上的分析可知，圖十六(a)已是「單元孔頸系集模型」可以得到的最佳模擬結果。

3.2 模擬掃描迴路(scanning loops)

假設上述模型是足以代表 Touma and Vauclin(1986)實驗中所使用之砂土的等價模型，利用此模型模擬退水與進水間的掃描迴圈。模擬的過程首先是令模型充滿水，模擬首次退水以及進水曲線後，令：

- (1) 張力水頭由 0 增加到 30 cm 進行退水，接著降低至 10 cm 進行進水，然後再增加到 40 cm 進行退水，得到第一個掃描迴圈；
- (2) 張力水頭由 40 cm 降低至 20 cm 進行進水，然後再增加到 50 cm 進行退水，得到第二個掃描迴圈；
- (3) 張力水頭由 50 cm 降低至 30 cm 進行進水，然後再增加到 60 cm 進行退水，得到第三個掃描迴圈；
- (4) 張力水頭由 60 cm 降低至 40 cm 進行進水，然後再增加到 100 cm 進行退水，得到第四個掃描迴圈。

以上的模擬過程中，張力水頭升降的幅度取為 1cm，以避免因為點數過少而無法觀察到掃描曲線的變化。圖十七(a)所示為整個掃描迴路的模擬結果。將圖十七(a)與圖十七(b)由 Bear and Verruijt(1987)書中所摘錄之「水-空氣」在粗顆粒土壤中的磁滯張力水頭-水飽和度 $(h-s_w)$ 關係示意圖比較，可觀察到模擬結果與理論圖形有相近的形式，顯示模擬結果應屬合理。



圖十七 (a)以單元孔頸系集模型所模擬得「水 空氣」在砂土中的磁滯張力水頭有效水飽和度曲線；(b)「水 空氣」在粗顆粒土壤中的磁滯張力水頭 飽和度關係示意圖(摘自 Bear and Verruijt, 1987, Fig.5-10)。

3.3 模擬其他流體對的毛細壓力 有效飽和度曲線

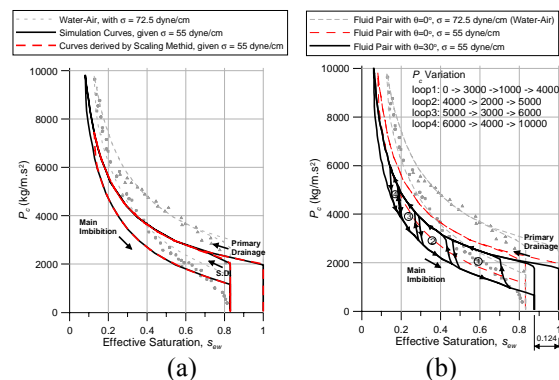
利用上述模型模擬「水 空氣」以外，其他流體對(例如，水 NAPL)毛細壓力有效飽和度曲線。假設第一組流體對與固體間的接觸角同樣為 0° ，界面張力為 $\sigma_{w-o} = 55 \text{ dyne/cm}$ ，則由模型中可模擬得到其首次排退、主汲取、以及二次排退 $P_c - s_{ew}$ 曲線如圖十八(a)中之紅色虛線所示，其中，毛細壓力變化為由 0 到 9800 kg/cm.s^2 。圖十八(a)中的黑色實線是為將原模型中所模擬得到的退水和進水 $h - s_{ew}$ 曲線以比例化技術(scaling skill; Parker, 1987)轉換後的結果，轉換的方式是飽和對可對應到一新的毛細壓力，其為，

$$P_c = (\rho gh) \cdot \left(\frac{\sigma_{w-a}}{\sigma_{w-o}} \right) \quad (20)$$

比較圖十八(a)的兩組分別由模擬以及由公式運算所得到的曲線，可觀察到兩組曲線幾乎一致，此結果支持比例化技術可以用於具相同的接觸角的不同流體對間的 $P_c - s_{ew}$ 曲線的轉換上的想法。

第二組流體對的界面張力同樣假設為 $\sigma_{w-o} = 55 \text{ dyne/cm}$ ，但是改變濕潤相流體非濕潤相流體 固體間的接觸角為 30° ，則此流體對的首次排退、主汲取、二次排退曲線、以及部分中間的掃描迴路將如圖十八(b)所示。與前組流體對的模擬結果比較，可觀察到，如所預期，在相同的毛細

壓力下，本組流體對有較低的有效飽和度，這是因為模型中的元件對於接觸角為 30° 的流體，有較低的置換毛細壓力門檻值的緣故。汲取結束後，接觸角為 30° 的非濕潤相殘餘飽和度約剩下 12.4%，其小於接觸角為 0° 時 16.9%。雖然由於缺乏實測資料，本研究無法驗證單元孔頸系集模型模擬接觸角不為零的流體對之 $P_c - s_{ew}$ 曲線的準確性，然而根據 Wardlaw(1982)的由微模型實驗以及 Blunt(1997)的由網絡模型模擬所得到之「接觸角愈大，非濕潤相入陷量愈少」的結論，此處的模擬結果應屬合理。



圖十八(a)由模型所模擬得之接觸角為 0° ，界面張力為 55 dyne/cm 流體對的毛細壓力飽和度關係。(b)由模型所模擬得之接觸角為 30° ，界面張力為 55 dyne/cm 流體對的毛細壓力 飽和度關係。

四、結果與討論

本研究建立「單元孔頸系集模型」，要由實際土壤中的「水 - 空氣」的首次退水、主進水、以及二次退水的毛細壓力 - 飽和度實驗資料，不經由實驗，推估在相同土壤中任意二相流體對、包含掃描迴路在內的磁滯毛細壓力 - 飽和度曲線。研究方法，是假設土壤孔隙可比擬為許多大小不同、平行排列的單元孔頸聚合體，根據二相流在模型中的置換原則，由「水 - 空氣」的退水與進水毛細壓力 - 飽和度試驗資料，反演模型孔、頸元件大小的分布函數，建立可以替代土壤的水力等價模型；再由模型模擬其他二相流體對的毛細壓力 - 飽和度曲線。單元孔頸系集模型，是以微觀的角度來分析二相流問題，運用流體力學的原理決定界面平衡位置和置換條件，改進 Brooks and Corey(1966)、

Mualem(1976)和 van Genuchten(1980)等參數化模型，必須以參數統計或是經驗公式來另行處理模型所不能解釋的部分（例如非濕潤相流體的入陷量）。

本研究的內容與貢獻可分為兩大部份，第一部份是建構「單元孔頸系集模型」，以利進行正向問題演算毛細壓力 - 飽和度關係。此部份從研究構想、模型單元與幾何設計、脫離置換機制推衍、界面位置與兩流體相飽和度計算等，均為本研究所獨創。第二部份是應用實際土壤的水 - 空氣二相毛細壓力 - 飽和度曲線，開發「單元孔頸系集模型」逆向演算估計孔頸單元大小分布參數的步驟，最後推估相同土壤任意二相流體的毛細壓力 - 飽和度曲線。整個研究構想具有原創性，開創了一個全新的研究領域。第一部份的主要特色與研究結論為：

- (1) 在幾何型態上，「單元孔頸系集模型」具有與孔頸網絡模型類似的擴張與收縮的「孔 - 頸」結構；三角形頸管與立方體頂角銜接的簡單幾何形狀，使得角隅濕潤相能夠相互連結，有利於未來計算單元孔頸傳導度。
- (2) 在力學機制上，「單元孔頸系集模型」是完全由微觀流體界面力學平衡原理，計算在某特定毛細壓力下，二流體相界面的形狀、位置、飽和度，以及流體界面幾何形狀與飽和度達到臨界狀態，發生置換的門檻毛細壓力條件。其中，脫離置換機制的推衍，更是研究上的創新。
- (3) 在正向分析上，「單元孔頸系集模型」可以模擬微觀墨水瓶效應與汲取過程中的非濕潤相入陷，可以實現巨觀上的磁滯現象，同時可以表現不同接觸角對於毛細壓力 - 飽和度曲線的影響。
- (4) 在逆向演算時，「單元」和「系集」的設計，避免網絡模型的尺寸效應和聯合機率密度問題，孔頸大小分布參數和退水、進水毛細壓力 - 飽和度曲線的連結關係較為直接。

本研究第二個部份，逆向演算估計孔頸單元大小分布參數的步驟，推估相同土壤任意二相流體的毛細壓力 - 飽和度曲線的部份。利用 Touma and Vauclin (1986)的

首次與二次退水和進水的毛細壓力 - 有效飽和度曲線試驗資料，測試「單元孔頸系集模型」的模擬效果後，得到以下結論：

- (1) 使用「頸管管徑」與「孔頸徑比值」為基本變數，有利於反演孔隙分布的計算。選取「頸管管徑」 - 「孔頸徑比值」兩變數為一對一的聯合機率密度函數，即管徑愈大的「大頸管」配置愈大的「孔頸徑比值」，模式便可以得到良好的擬合結果。
- (2) 在管長因子與孔頸徑比值符合大小頸管管徑三次方比例的假設條件下，孔隙分布可分為兩部分來單獨反演：由首次退水的實驗資料逆向推估頸管管徑的機率密度函數參數；由主進水和二次退水曲線逆向推估頸徑比值的條件分布和管長因子。
- (3) 正向演算證實本微模型基於幾何模型和物理原理，確實具有實現巨觀上磁滯現象以及表現不同接觸角對於毛細壓力 - 飽和度影響的能力。這是以往比例化技術所無法達成的，也是現今「單元孔頸系集模型」最大的貢獻。唯本模型無論在正向或逆向演算上均非常繁複，目前尚不能正向演算三相流體的毛細壓力 - 飽和度曲線。

五、參考資料

1. Bear, J. and A. Verruijt, "Modeling Groundwater Flow and Pollution", D. Reidel Publishing Company, 1st print, Dordrecht, Boston, 1987.
2. Blunt, M. J., "Effects of Heterogeneity and Wetting on Relative Permeability Using Pore Level Modeling", *SPE Journal*, vol. 2, pp. 70-87, March, 1997.
3. Brooks, R. H. and A. T. Corey, "Properties of Porous Media Affecting Fluid Flow", *Journal of Irrigation and Drainage Engineering*. ASCE, IR2. vol.92, pp. 61-88, 1966.
4. Hughes, R. G. and M. J. Blunt, "Network Modeling of Multiphase Flow in Fractures", *Advances in Water Resources*, 24, pp.409-421, 2001.
5. Legait, B., "Laminar Flow of Two Phases through a Capillary Tube with Variable Square Cross Section", *Journal of*

- Colloid and Interface Science*, vol.96, no.1, pp.28-38, 1983.
6. Lenormand, R., C. Zarcone and A. Sarr, "Mechanism of the Displacement of One Fluid by Another in A Network of Capillary Ducts", *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 135, pp.337-353, 1983.
 7. Lenhard, R. J. and J. C. Parker, "Measurement and Prediction of Saturation-Pressure Relationships in Three-Phase Porous Media Systems", *Journal of Contaminant Hydrology*, vol.1, pp.407-424, 1987a.
 8. Lenhard R. J. and J. C. Parker, "A Model for Hysteretic Constitutive Relations Governing Multiphase Flow: 2. Permeability-Saturation Relations", *Water Resource Research*, vol.23, no.12, pp.2197-2204, 1987b.
 9. Mogenson, K. and E.H. Stenby, "A Dynamic Two-Phase Pore-Scale Model of Imbibition", *Transport in Porous Media*, 32, pp.299-327, 1998.
 10. Mualem, Y. "A New Model for Predicting the Hydraulic Conductivity of Unsaturated Porous Media", *Water Resource Research*, vol.12, no.3, pp.513-522, 1976.
 11. Parker, J. C. and J. R. Lenhard, "A Model for Hysteretic Constitutive Relations Governing Multiphase Flow: 1. Saturation-Pressure Relations", *Water Resource Research*, vol.23, no.12, pp.2187-2196, 1987.
 12. Parker, J. C., "Multiphase Flow and Transport in Porous Media", *Reviews of Geophysics*, vol. 27, no. 3, pp. 311-328, 1989.
 13. Touma, J. and M. Vauclin, "Experimental and Numerical Analysis of Two Phase Infiltration in a Partially Saturated Soil", *Transport in Porous Media*, vol.1, pp.27-55, 1986.
 14. van Genuchten, M. Th. "A Closed Form Equation for Predicting the Hydraulic Conductivity of Unsaturated Soils", *Soil Science Society of America Journal*, vol. 44, pp.892-898, 1980.
 15. Wardlaw, N. C., "The Effects of Geometry, Wettability, Viscosity and Interfacial Tension on Trapping in Single Pore-Throat Pairs", *Journal of Canadian Petroleum Technology*, pp.21-27, 1982.
 16. 李天浩、鄭安孺, "孔頸網絡模型模擬孔隙介質二相流特徵曲線之研究 I. 毛系壓力曲線", *土木與水利工程學刊*, 2004, 複印中。
 17. 鄭安孺, "建構單元孔頸系集模型推估毛細壓力與飽和度關係之研究", *國立台灣大學土木工程學研究所博士論文*, 2004。