行政院國家科學委員會專題研究計畫成果報告

台灣一等一級水準網之重新平差計算

Re-adjustment of the first-order (class I) leveling network of Taiwan

計畫編號：NSC 92-2211-E-002-094

執行期間：92 年 8 月 1 日至 93 年 7 月 31 日

主持人：許榮欣　台灣大學土木系教授

一、 摘要

利用疊代近乎無偏估計法與定常相關加權模式進行重新平差計算，並利用 Theil 模式對 TWVD2001 進行各測線內水準標石高程估計。研究結果顯示 IAUE 法(平均點位精度為 1.079 mm^2)與定常相關加權模式(平均點位精度為 1.041 mm^2)都比傳統平差模式(平均點位精度為 1.095 mm^2)更能獲得較好的精度；特別是定相關加權模式可估得每公里之觀測精度約為 0.77*mm*，非常接近於依據全網測段閉合差所估得之精度 0.71*mm*，此項事實顯示定相關加權模式幾乎已消除網中殘留之系統誤差影響。

ABSTRACT

Two weight schemes, IAUE (Iterated Almost Unbiased Estimation) and the error model of constant correlation, were employed to re-adjust the leveling network. The Theil model was used to estimate the elevations of bench-marks within individual leveling lines. The computations showed that the mean precisions due to the IAUE and constant correlation model were 1.079mm2 and 1.041mm2 respectively, both were more reliable than that due to the conventional one (1.095mm2). In particular, the standard deviation of unit weight produced by the constant correlation was 0.77mm, which is nearly equal to 0.71 as computed from the network using all section discrepancies. This fact seems to indicate that the constant correlation model has eliminated all systematic effects remained in the network.

二、 研究目的

水準測量易受多種系統誤差的影響，諸如：大氣折射、儀器下陷、標尺刻劃誤差、重力……等等。通常野外觀測時皆以各種規範要求測量員遵行，期能消除系統性誤差，室內作業時經對野外所獲的觀測高差施加一系列的改正後，剩下的系統誤差概假設已不顯著，完全視為偶然誤差。於是，觀測高差的方差與測線長成正比：

$$M^2 = m^2 S \tag{1}$$

式中 M^2 為觀測高差的方差，S 為公里為單位的觀測距離，m^2 為每一公里的方差。惟從以往的經驗可知：野外觀測無論怎麼小心謹慎、內業系統誤差的移除再怎麼細密，觀測高差或多或少仍會有系統誤差殘留。全世界各地區的一等水準網平差結果，幾乎皆有下列現象存在(Lucht 1983, Hsu 1996b)：

$$m_l \le m_S \le m_A \tag{2}$$

式中 m_l 表以測段往返觀測閉合差所估得的每公里標準差，m_S 表以測線往返觀測閉合差所估得的每公里標準差，m_A 表以(1)式為加權模式平差後所得的每公里標準差。式(2)暗示網中殘留的系統誤差仍不可忽視，依(1)式做為加權模式仍不符實際。

既然傳統平差導致(2)式存在，加上消除系統誤差的技術幾乎已到極限階段，那麼我們所能做的就剩改正平差數學模式了。改善方法有兩種方法：一是建立新的觀測方程式，另一方法是改良加權模式(Hsu R. 1996b)。

改正觀測方程式方面，(2)式隱含現行之觀測高差等於兩點高程之差是不具函數相等性，即函數之自變數(高程)與應變數(高差)之間有不符。所以，於觀測方程式中加上一些未剔除的系統誤差可以讓觀測高差與高程更具一致性。將這些未知的系統誤差與高程視為未知參數，一起進行平差計算，即可估出系統誤差值。惟此法有個缺點，就是必須要有確定的系統誤差函數，否則加入的系統誤差可能會被

其他未知參數吸收，導致未知參數估計值扭曲。此法另一個缺點是：增加了未知參數後，將使得網的自由度減少，這問題在水準網平差方面更是嚴重，因為水準網的自由度通常都很小，如果加入太多未知參數，勢必要加入一些額外的觀測高差來保持足夠的自由度。

改良現行之加權模式(即依(1)式，權與距離倒數成正比)，使殘留的系統性誤差反應在新的加權模式似乎是較可行的方法，本研究以此方式進行台灣一等一級水準網(TWVD2001)之重行平差計算。民國 90 年 12 月完成的 TWVD2001 除了水準測量外，還引入 GPS 及重力測量，可求得各水準點的正高與橢球高，進而估得大地起伏。惟網的平差計算仍採傳統加權模式，估得每公里標準差 0.86mm（註此數值為作者所算得）。如（2）式之不合理現象仍存在，又經作者以統計分析結果顯示 TWVD2001，內仍有四條測線有系統誤差殘留。此等事實表明採傳統加權模式的平差結果不適當。就學術觀點而言，TWVD2001 的平差計算尚有改進之空間。

本研究利用疊代近乎無偏估計法(IAUE, Iterated Almost Unbiased Estimation)與定常相關誤差模式(Error model of constant correlation)決定觀測高差的權數，對 TWVD2001 分別實施平差計算。研究結果顯示 IAUE 法與定常相關加權模式所獲得的平均點位精度都高於比傳統平差結果，而定常相關誤差模式所獲的點位平均精度又優於 IAUE 法。另外，定常相關加權模式估得之每公里標準差非常接近於依據全網測段閉合差所估得者，即 $m_S \approx m_A$，於是(2)式已不復存在，此等事實顯示定常相關加權模式幾乎已消除網中殘留之系統誤差影響，其平差結果是最為合理的，應予接受。當網內各節點依定常相關加權模式高程估定後，才利用 Theil 模式進行各測線內水準標石高程估計。

三、 研究方法及成果

（一）疊代近乎無偏估計法(IAUE)

疊代近乎無偏估計法是一種估計觀測量方差的統計方法，其基本理論如下：

設網的觀測方程式為

$$V = AX - L \quad (L = L_b - L_o; L_o = AX_o) \quad (3)$$

式中 V 表改正數向量，L_b 表觀測值向量，A 表網的設計矩陣，X 表未知參數近似值 X_o 的改正向量。假設所有觀測量間互不相關，且所有觀測量依特定之方法分為 k 組，每一組的方差為 $m_i(i = 1,2,\cdots,k)$，於是 L_b 的方差矩陣可表成

$$\Sigma_L = \sum_{i=1}^{k} m_i^2 C_i \quad (4)$$

式中，C_i 為已知的對稱矩陣。若方差 m_i^2 $(i = 1,2,\cdots,k)$ 與其近似值 $\widetilde{m}_i^2$ 可表成

$$m_i^2 = f_i \widetilde{m}_i^2 \qquad (i = 1,2,\cdots,k) \quad (5)$$

式中 f_i 表未知的尺度因子(scale factor)，則 L_b 的方差矩陣可進一步表成

$$\Sigma_L = \sum_{i=1}^{k} f_i \widetilde{m}_i^2 C_i = \sum_{i=1}^{k} f_i H_i$$

$$= diag\lfloor f_1\widetilde{h}_1 \quad f_2\widetilde{h} \quad \cdots \quad f_k\widetilde{h}_k \rfloor \quad (6)$$

上式中 $\widetilde{h}_i = \widetilde{m}_i I_i (i = 1,2,\cdots,k; I_i$ 是單位矩陣) 是一個由數個 $n_i \times n_i$ 組成的對稱矩陣，n_i 是各組之成員數。未知方差因子 f_i 的估計式為 (Hsu 1999, 2001)

$$f_i = \frac{L^T W H_i W L}{[r]_i} = \frac{V^T W H_i W V}{[r]_i} \quad (7)$$

$$i = 1,2,\cdots,k$$

式中 $W = \Sigma_L^{-1} - \Sigma_L^{-1} A N^{-1} A^T \Sigma_L^{-1}$(3) $(N = A^T \Sigma_L^{-1} A)$，$[r]_i$ 為 i 組內各觀測量多餘觀

測數之和。計算各組的 f_i 時必須採疊代運算(Iteration)方式，直到各組 f_i 數與平差後之後驗單位權方差都收斂到 1 為止。

（二）定常相關加權模式

定相關加權模式認為水準網中每一測線的觀測精度與殘留的系統誤差程度都不相同，但假設每一測線中所有測段的長皆相等、各測段的方差相等及各測線內測段間之相關係數具有定常性(Constancy)，每條測線之觀測高差的方差可以下式表示(Hsu 1996b)：

$$M_S^2 = aS + bS^2 \tag{8}$$

其中 M_S^2 是測線之方差(mm^2)，S 是測線長(km)，$a = m_l^2(1-r)$，$b = m_l^2 r / l \approx m_l^2 r$，$m_l^2$ 是測段之每公里方差(mm^2)，r 為該測線內測段間之相關係數，l 為測段長。任一測線觀測高程差的權以其 M_S^2 之倒數定之。本研究中令 l 等於 1 公里以方便計算，r 則以 lag-1 自相關係數(lag-1 autocorrelation coefficient)估計之。lag-k 之自相關係數計算式為(Hsu 1996a)：

$$r_k = \frac{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}[d_j - \hat{\mu}][d_{j+k} - \hat{\mu}]}{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}[d_j - \hat{\mu}]^2} \tag{9}$$

其中 d_j 代表測段 j 的閉合差，n 代表該測線內的測段數，k 代表 lag 數。$\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} d_j$ 是該測線之平均閉合差。

在定常相關加權模式中，每條測線的 r 值代表該測線內各測段閉合差間的相關係數，r 越大表示測段閉合差間之相關性高，也就是說殘留的系統性誤差越顯著。因此，由 r 值是否具統計顯著性，便可順便判斷測線內是否還殘留有系統性誤差。

（三）加密網之 Theil 模式

Theil 模式是參數含有約制條件的一種平差模式，此模式中未知數不論其數值或方差皆可受約制，而約制條件則以虛擬觀測方式表現之，因此特別適用於網之加密平差。若網中有 u 個參數，其中 c 個參數的值及其方差屬已知，平差時必須保持固定不變，令外有 t 個未知參數待估計($t + c = u$)。為此目的，我們可將含有已知方差之參數與其他待求的未知參數分開。上述之情況即是網之加密平差所處理的課題之一。Theil 模式於此種情行之加密平差計算可寫成(Hsu 2002)

$$V_c = A_1\hat{X}_1 + A_2\hat{Y} - L \qquad P = \sigma^2 \Sigma_L^{-1} \tag{10}$$

$$V_y = \hat{Y} - L_y \qquad P_y = \Sigma_y^{-1} \tag{11}$$

式中，$c\times 1$ 的向量 $\hat{Y}$ 表已知參數，其方差已知為 Σ_y，$t\times 1$ 的向量 $\hat{X}_1$ 表待求的未知參數，A_1 是秩為 t 的 $n\times t$ 矩陣，A_2 是 $n\times c$ 矩陣，n 為觀測量總數，σ^2 為先驗單位權方差。式(10)部分表真實觀測方程式，式(11)部分是虛擬觀測方程式。上述模式的最小平方解為(Hsu 2002)

$$\hat{X}_1 = (A_1^T \overline{P} A_1)^{-1} A_1^T \overline{PL} = \overline{N}_1^{-1} A_1^T \overline{PL} \tag{12}$$

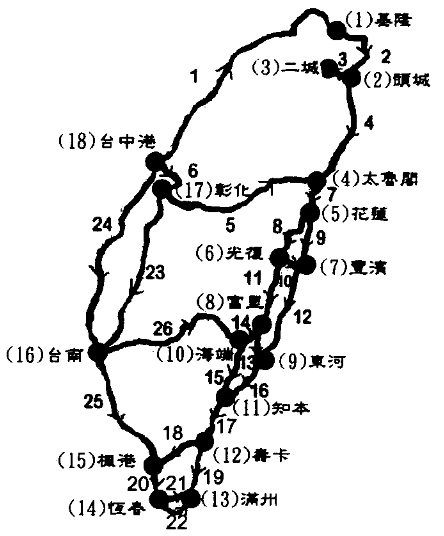
式中 $\overline{P} = (\sigma^2 P^{-1} + A_2 P_Y^{-1} A_2^T)^{-1}$，$\overline{L} = L - A_2 L_Y$。$\hat{X}_1$ 的協方差矩陣為 $\Sigma_{\hat{X}_1} = \overline{N}_1^{-1}$。先驗方差 σ^2 的驗後估值為 $\overline{\sigma}^2 = \overline{V}^T \overline{P}\,\overline{V}/(n-t)$，式中 $\overline{V} = A_1\hat{X}_1 - \overline{L}$。

（四）台灣一等一級水準網之重新平差計算

根據「一等一級水準網測量督導查核工作總報告書」(曾清涼 2001)，TWVD 2001 水準網共有 1033 筆觀測高差、1020 個水準點，以基隆市民族英雄公墓內之 K999 水準點

(5.66883m)為基準點，觀測數據處理時對所有可能的系統誤差皆加以改正。

為了實驗方便，本研究將 1033 筆觀測高差、1020 個水準點建構成 26 條測線、17 個待定高程節點的水準網，並依總報告書之數據固定基隆市民族英雄公墓內之 K999 水準點之高程為 5.66883m。水準網之示意如圖一。表一顯示各測線的長度、每公里方差、觀測高差、測段數，其中每公里方差依 $m_l^2 = \frac{1}{4n}\sum d_i^2/l_i$ 算得，式中 n 為該測線內之測段數，l_i 為測段長(km)，d_i 為測段之閉合差(mm)。



圖一　台灣一等一級(2001)水準網路線示意圖

表一　台灣一等一級(2001)水準網各測線資料

測線	S(km)	m_l^2	高差(m)	測段數	測線	S(km)	m_l^2	高差(m)	測段數
1	233.18	0.6950	1.21382	117	16	47.28	0.7660	-2.17479	27
2	73.68	0.7149	0.47899	39	17	63.84	0.7582	430.02466	33
3	3.92	0.5815	3.18854	2	18	21.06	0.7475	-441.33590	14
4	113.1	0.6345	51.88491	62	19	53.29	0.7560	-433.20309	28
5	200.98	0.8993	37.06653	108	20	23.47	0.3497	7.17840	11
6	38.23	0.4180	16.53202	18	21	34.25	0.5957	0.95568	15
7	28.75	0.7075	-37.18020	14	22	8.79	0.3164	0.94981	5
8	43.42	0.5211	98.37958	21	23	161.21	0.5919	-7.82572	78
9	51.00	0.7784	8.23778	26	24	178.00	0.6594	8.68237	88
10	18.81	0.5843	-90.14947	11	25	136.39	0.3658	-1.80882	68
11	66.98	0.7081	124.76708	32	26	212.84	0.7901	263.58523	107
12	84.48	0.5251	-4.26915	45					
13	45.07	0.7372	-219.17461	23					
14	13.90	1.0323	32.73412	7					
15	66.49	0.7207	-254.10433	33					

1. IAUE 法實驗

IAUE 法的實驗依照：測線每公里方差及地形兩種分組方式實施之。

1.依測線每公里方差分類：

(1)2 組：

方差介於 0~0.7(mm^2/km)的測線分為第一組，以 0.291 (mm^2/km)為起始值；方差 0.7(mm^2/km)以上的分為第二

組，其起始值為 0.5260(mm^2/km)。

(2)3 組：

方差介於 0~0.6 (mm^2/km)的測線分為第一組，其起始值為 0.4849 (mm^2/km)； 方差介於 0.6~0.75(mm^2/km)的測線分為第二組，起始值為 0.7025(mm^2/km)；方差在 0.75(mm^2/km)以上的分為第三組，起始值為 0.8257(mm^2/km)。

2.依地形分類：

(1)分高山、非高山 2 組。屬高山者計有測線編號為 5,18,26 等三條。

(2)分高山、丘陵、平地 3 組。屬丘陵者計有 3,4,8,10,11,13~15,19,21,22 等測線。屬平地者計有 1,2,6,7,9,12,16,17,20,23~25 等測線。

各分類組平差後，網的點位平均精度如表二，由表可知依測線每公里方差分 2 組與依地形分 3 組的點位平均精度幾乎相等(分別為 1.075cm 與 1.079cm)。

表二　IAUE 各種分類法之點位平均精度比較

分類方式	$\overline{M}$ (cm)
依 m_l 分 2 組	1.075
依 m_l 分 3 組	1.412
依地形分 2 組	1.115
依地形分 3 組	1.079
傳統權模式	1.095

1. $\overline{M}=\sqrt{tr(\Sigma_{\hat{X}})/u}$ 表所有待定節點方差平均值的平方根。

2. 傳統權模式為測線的權以 1/S 定之。

2. 定常相關加權模式實驗

定常相關加權模式是用 lag-1 自相關法估計(8)式中之相關係數 r。若一測線所得之 lag-1 相關係數為值很小($|r|\le 0.3$)且不具統計顯著性，則該測線的 r 值定為 0，於是其權以 $1/m_l^2S$ 訂定之，式中 m_l^2 表每公里方差、S 表測線長，其值皆可由表一取得。

若一測線的$|r|\ge 0.3$，則逕用(8)式訂定其權。TWVD 2001 共有三條測線的 lag-1 r 值為正且大於 0.3（測線編號：01、18、21），有一條（測線 22）r=-0.4296，顯示網中仍有顯著性的系統誤差殘留。其中測線 22 內之測段何以會有中度負相關發生，頗有深入探究之必要，蓋依理論推定，殘留之系統誤差應有共同性，從而使測段間產生正相關才是。本研究仍逕以 r=-0.4296 帶入（8）式計算其權。表三為定常相關權模式與傳統權模式間的比較。

表三　定常相關權模式與傳統權模式的比較

方法	$\overline{M}$ (cm)	m_A (cm)
定常相關（Lag-one）	1.041	0.077
傳統權模式	1.095	0.086

m_A ：驗後單位權標準差

3. 各測線內水準標石高程估計

將 IAUE 依地形分三組和定常相關（lag-one）模式求出的網點平均精度（即表二與表三中之 $\overline{M}$ ）施以比較，可看出定常相關（lag-one）所獲之精度較 IAUE 為優。另外，定常相關模式所估得的驗後單位權標準差(0.077cm)非常接近依全網之測段閉合差所算得的每公里標準差(0.071cm)，此事實顯示(2)式所代表的矛盾現象已被消除。依據以上二點，本研究將定常相關（lag-one）模式求出的各測線端點高程及其方差做為約制條件，依 Theil 模式為各測線施以加密平差計算，求取各測線內任一水準標石的高程與方差。

四、討論與結論

實驗證明，水準測線內的各測段間或多或少還是殘留著系統誤差，本研究利用了 IAUE 和定常相關加權模式對台灣一等一級水準重

新平差之後，確實可獲得較傳統平差加權模式為佳之成果，在學術上有它的價值，尤其定常相關加權模式確能將殘留之系統誤差的影響予以降低，蓋當某測線之相關係數r特別高時，式(8)中 a 值減小而b 值增大，其權數會相對的減小，代表定常相關加權模式具有降低系統性誤差影響的功用。

雖然本研究所認為IAUE法於台灣一等一級水準網平差運用時，可獲得幾乎與定常相關加權模式相匹配的結果，然而在網中仍有系統誤差殘留的情形下，IAUE 法顯然不適用，蓋其理論(即（7）式)建立在無系統參數存在的條件下。有鑒於此，以 lag-one 自相關的加權模式來實施台灣一等一級水準網平差是較合理的方法。

對於帶有系統參數的IAUE模式之最小平方法解算，將是作者未來研究活動重點之一。

五、參考文獻

Hsu R., 1996a, "Application of statistical techniques to the first order levelling network of taiwan for detecting remained non-random effects", Survey Review 33:316-324

Hsu R., 1996b, "Converge of the variance of unit weight in a levelling network adjustment", Survey Review 33:404-410

Hsu R., 1999, "An alternative expression for the variance factor in using iterated almost unbiased estimation", J. of Geodesy, 73:173-179.

Hsu R, 2001, "Helmert method as equivalent of iterated almost unbiased estimation ", J. of Surveying Engineering, Vol.127 No.3, 79-89.

Hsu R., 2002, "Application of Theil model to adjustments of network densifications ", J. of Surveying Engineering, Vol.128 No.3, 144-156.

Lucht ,H., 1983 ,"Neighbourhood correlations among observations in leveling networks ", Precise leveling, 38 Contribution to the Workshop on Precise Levelling, Hannover, pp.315-326.

曾清涼，2001，"一等一級水準網測量督導查核工作總報告書"。