

行政院國家科學委員會專題研究計畫 成果報告

從移動車輛反應擷取橋梁振動頻率(I)

計畫類別：個別型計畫

計畫編號：NSC93-2211-E-002-046-

執行期間：93 年 08 月 01 日至 95 年 07 月 31 日

執行單位：國立臺灣大學土木工程學系暨研究所

計畫主持人：楊永斌

報告類型：精簡報告

報告附件：出席國際會議研究心得報告及發表論文

處理方式：本計畫可公開查詢

中 華 民 國 95 年 4 月 13 日

行政院國家科學委員會補助專題研究計畫成果報告

從移動車輛反應擷取橋梁振動頻率 (I)

計畫類別：☒ 個別型計畫 ☐ 整合型計畫

計畫編號：NSC 93-2211-E-002-046

執行期間：93 年 08 月 01 日至 94 年 07 月 31 日

計畫主持人：楊永斌 教授

E-mail: ybyang@ntu.edu.tw

本成果報告包括以下應繳交之附件：

- ☒ 赴國外出差或研習心得報告一份
- ☐ 赴大陸地區出差或研習心得報告一份
- ☒ 出席國際學術會議心得報告及發表之論文各一份
- ☐ 國際合作研究計畫國外研究報告書一份

執行單位：國立台灣大學土木工程學系

中 華 民 國 95 年 4 月 15 日

從移動車輛反應擷取橋梁振動頻率 (I)

計畫編號：NSC 93-2211-E-002-046

執行期間：93 年 08 月 01 日至 94 年 07 月 31 日

主持人：楊永斌 國立台灣大學土木工程系

E-mail: ybyang@ntu.edu.tw

一、中文摘要

本計畫只在研究移動車輛和承載橋梁間之動力互制，假定車輛/橋梁之質量比為很小時，採用振態疊加法，可以求得橋梁和移動車輛的近似（但極為精準）的垂直振動反應，經過比較後，證實只考慮橋梁第一個振態所得的振動反應，不論是車輛或橋梁，都相當準確。橋梁的位移、速度和加速度是由不同範圍的兩組頻率所控制，即車子的驅動頻率和橋梁的振動頻率。從橋梁位移的反應譜可知，車子速度與某些低頻尖峰有關。另一方面，車子的反應是由五種不同的頻率所控制，也就是驅動頻率、車子頻率、以及平移過的橋梁頻率。從車子的加速度反應譜可知，橋梁的第一個頻率（平移過的）有很高的可見度，因此可以很容易被鑑別出來。有關本研究的可能應用，以及未來的研究方向，都是本報告關心的重點。

關鍵詞：橋梁、頻率、頻率量測、車—橋互制動力、移動車輛

Abstract

The dynamic interaction between a moving vehicle and the sustaining bridge is studied in this project. By the method of modal superposition, approximate but highly accurate closed-form solutions are obtained for the vertical responses of both the bridge and moving vehicle, assuming the vehicle/bridge mass ratio to be small. For

both the bridge and vehicle responses, it is confirmed that rather accurate solutions can be obtained by considering only the first mode. The displacement, velocity, and acceleration of the bridge are governed at different extents by two frequency sets pertaining to the driving frequency of the vehicle and natural frequencies of the bridge. From the spectrum for the bridge displacement, the vehicle speeds can be shown to be associated with some low-frequency pikes. On the other hand, the vehicle responses are governed by five distinct frequencies that appear as driving frequencies, vehicle frequency, and bridge frequencies with shift. From the vehicle's acceleration spectrum, the first bridge frequency (with shift) is shown to have rather high visibility and can be easily identified. Potential applications of the present results, as well as further researches required, are also indicated in the project.

Keywords: Bridge, Frequency, Frequency Measurement, Vehicle-Bridge Interaction Dynamics, Moving Vehicle

二、緣由與目的

移動車輛通過橋梁是交通工程上經常遭遇的問題，當一個車輛通過橋梁時，會在橋梁上引起某種衝擊或動力放大效應，這是在橋梁設計時所必須考慮的問題。有關此一問題，早在十九世紀中葉就被注意

到了[1,2]，過去有非常多的學者都曾研究此類的問題，他們將車輛簡化為移動載重[3,4]、質量[5,6]、或彈跳質量模型[7-9]。移動載重是最簡單的車輛模型，但無法考慮車輛的慣性作用，移動質量雖可考慮此一作用，但無法考慮車輛的彈跳作用，因此，如欲考慮車輛與橋梁間的互制作用，則應以移動彈跳質量來模擬車輛的行為，如圖 1 所示。

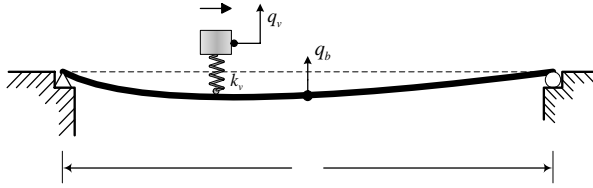


圖 1. 移動彈跳質量模型

傳統有關移動車輛的研究，泰半多是集中在橋梁的反應，對於車輛的行為較不注意。本計畫的目的在於研究車輛和橋梁間兩者的相互作用，因此，對於車輛和橋梁的反應都是一樣的重視。我們研究的重點將集中在以下兩項：（1）如何從行進中車輛的反應，去擷取橋梁的動力特性。（2）如何從移動車輛所引起的橋梁反應，去偵測移動車輛的行為。從本計畫所獲致的成果，我們可以發現一些有趣的現象，有些是具有進一步研究的潛能。針對上述第一項，Yang 等人曾進行了初步的理論和實驗的研究[10]。

三、理論研究

圖 1 示一簡化之彈簧質量模型，設車體質量为 m_v ，彈簧勁度常數為 k_v ，並假設車輛以等速度 v 通過跨距為 L 之簡支橋樑，在此將忽略橋樑之阻尼。首先，我們可以個別建立車輛和橋梁的微分運動方程式如下：

$$m_v \ddot{q}_v + k_v q_v = k_v u|_{x=vt} \quad (1)$$

$$\bar{m} \ddot{u} + EI u'''' = p(x, t) \quad (2)$$

此處 q_v 表示車輛之垂直位移， u 為橋梁之垂直位移， \bar{m} 為橋梁單位長度之質量， EI 為橋梁之撓曲勁度， p 為橋梁之作用力：

$$p(x, t) = f_c(t) \cdot \delta(x - vt) \quad (3)$$

此處 $f_c(t)$ 表示車橋間之接觸力：

$$f_c(t) = -m_v g + k_v (q_v - u|_{x=vt}) \quad (4)$$

此處 g 表重力加速度，接觸力之值與車輛變位 q_v 及橋梁機處點之變位 $u|_{x=vt}$ 有關，即因此故，車—橋之間存有偶合作用。

為求解上述問題，此處將採用振態疊加法，將橋梁的位移表示為 n 個正弦波的組合：

$$u(x, t) = \sum_n \left[\sin \frac{n\pi x}{L} \cdot q_{bn}(t) \right] \quad (5)$$

此處 q_{bn} 為廣義或振態座標，採用 Galerkin 的方法，將(5)式分別代入(1)式，可以得到橋梁在振態空間的方程式。

在車輛質量遠比橋梁為小的假設下，橋梁在振態空間的方程式，與移動載重的情況相同。採用零起始條件，可以解得橋梁在振態空間的位移解，代回(5)式即得橋梁之位解，經微分後，可得速度和加速度解。從上述解可以看出，橋梁的反應主要由兩組頻率所控制，即車輛的驅動頻率 $n\pi v/L$ 和橋梁的頻率 ω_{bn} ，經過數值比較，發現採用第一個振態所得的橋梁反應已經相當精確了。橋梁位移主要是由車輛的驅動頻率所控制，如圖 2 所示，橋梁速度則是由橋梁頻率和驅動頻率所共同控制，如圖 3 所示，而橋梁加速度則是由橋梁頻率所控制，如圖 4 所示。

既然已經求得橋梁 m, EI 將橋梁與車輛接觸點的位移代入車輛方程式，即可解得車輛的反應，經微分後，求得其速度和加速度。因為上述的橋梁反應是以近似的方法得到，因此這裡的車輛反應也是屬於近似的，只考慮到車輛—橋梁間的一階效應，唯經後面的有限元素分析結果比較後，發現此一近似解已經相當精確。採用此種近似解的優點是，我們可以輕易的找出影響車橋互制的主要控制參數及其物理意義。

從上述解可以看出車輛反應是由五個頻率所控制，可以區分成下列三組：(1) 驅動頻率 $(n-1)\pi v/L$ 和 $(n+1)\pi v/L$ ；(2) 車輛頻率 ω_v ；(3) 橋梁（含平移效應）頻率 $\omega_{bn} - n\pi v/L$ 和 $\omega_{bn} + n\pi v/L$ ，此處 n 代表橋梁的振態個數。上述的第三組表示橋梁

頻率出現在車輛反應中時，總是會伴隨著一個平移量 $\pm n\pi v/L$ ，這也就是通稱的都卜勒效應。在實務上，我們希望能從車輛反應找出橋梁的頻率 ω_{bn} ，這也就是橋梁頻率的間接量測技術。

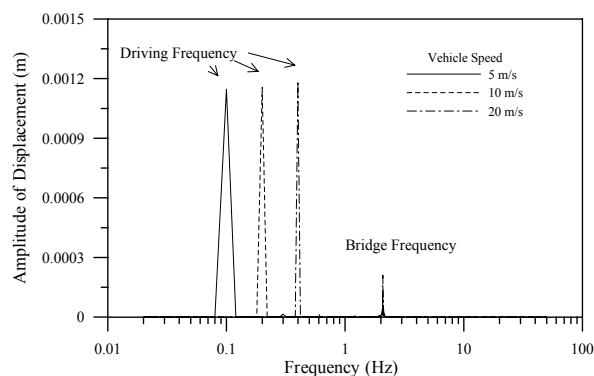


圖 2. 橋梁位移反應頻譜圖

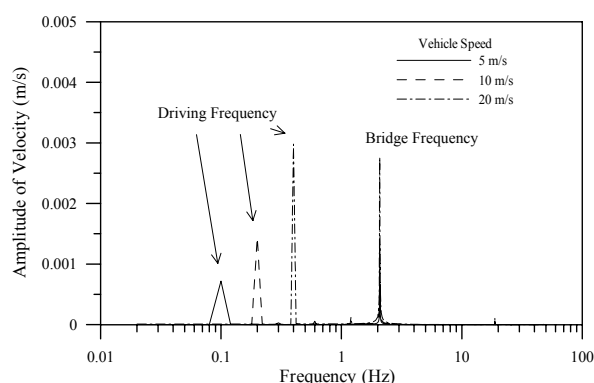


圖 3. 橋梁速度反應頻譜圖

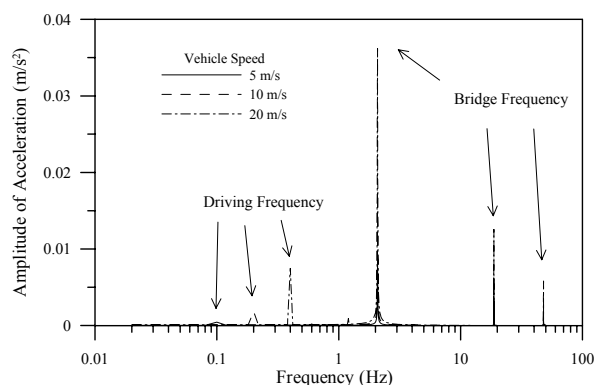


圖 4. 橋梁加速度反應頻譜圖

四、數值分析

採用以下的資料： $A = 2.0 \text{ m}^2$, $I = 0.12 \text{ m}^4$, $E = 2.75 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$, $L = 25 \text{ m}$, $\bar{m} = 4,800 \text{ kg/m}$, $m_v = 1,200 \text{ kg}$, $k_v = 500 \text{ kN/m}$, 可以算出車輛的頻率為 $\omega_v = 20.41 \text{ rad/s} = 3.25 \text{ Hz}$ ，橋梁的前三個頻率 ω_b 為 $13.09 \text{ rad/s} = 2.08 \text{ Hz}$, $52.36 \text{ rad/s} = 8.33 \text{ Hz}$, 117.81

$\text{rad/s} = 18.75 \text{ Hz}$ 。假定車輛是以 $v = 10 \text{ m/s}$ 的速度通過橋梁。

圖 5 至圖 7 分別為車輛之位移和加速度圖，從上述圖形可以發現，採用單一振態所獲得的結果已經相當準確，即使是和有限元素分析的結果互相比較也是如此。

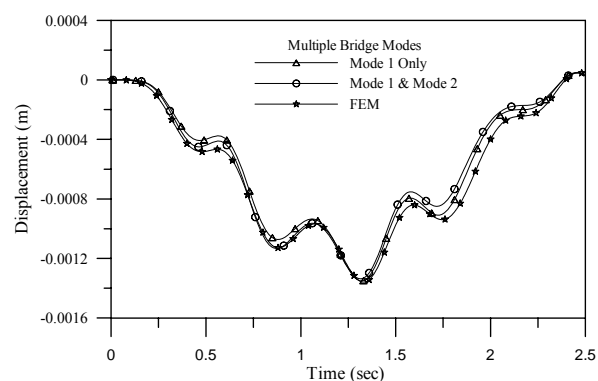


圖 5. 車輛位移反應圖

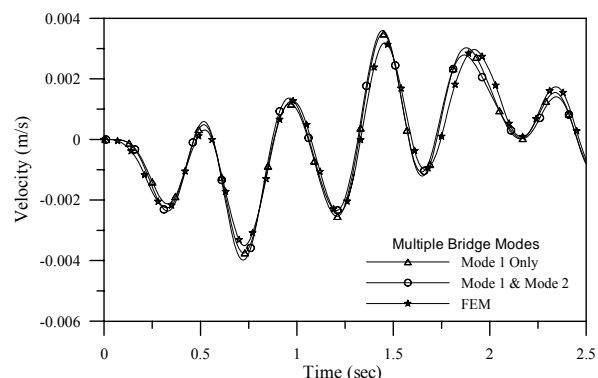


圖 6. 車輛速度反應圖

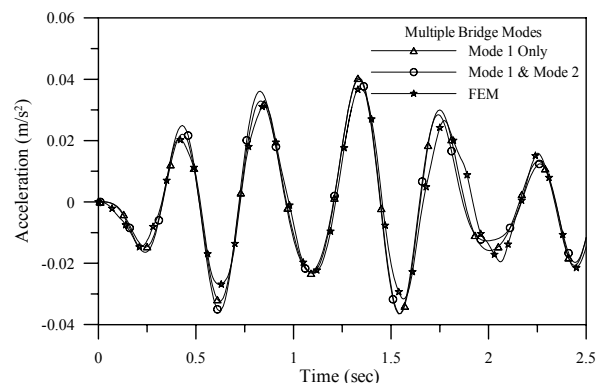


圖 7. 車輛加速度反應圖

如果將上述車輛加速度的解析解和有限元素解做富立葉轉換，則可獲得 8 和圖 9 的反應頻譜圖。從此二圖形中，可以看到幾個尖峰所對應的頻率都相當一致，此點顯示採用單一振態的可靠度相當高。圖中的第一個尖峰對應的是車輛的驅動頻率，第二和第三個尖峰對應的是橋梁經平移後

的頻率，最右邊的兩個小尖峰，則與橋梁的第二個振態有關。最重要的是，本研究顯示橋梁的第一個振態是可以從車輛的反應譜中分析出來。

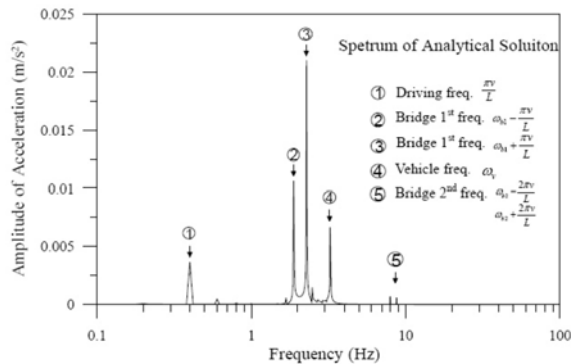


圖 8. 車輛加速度的反應頻譜圖（解析解）

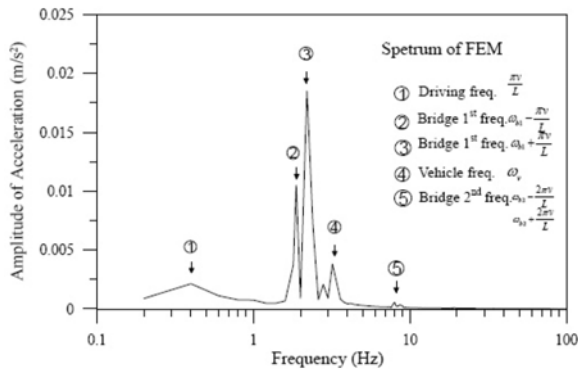


圖 9. 車輛加速度的反應頻譜圖（數值解）

五、結論

本研究採用振態疊加法，分析車輛和橋梁間的互制作用。在車輛質量遠比橋梁微小的假設下，本研究可以獲得近似解析解，嚴格來說，這是一個一階的近似理論。經有限元素分析的比較，發現採用單一振態所得到的結果已經相當精準。重要的結論有二點：（1）從橋梁的動態位移反應中，可以找到車輛的驅動頻率，此點有進一步研究的必要，或許能夠發展成為偵測超速的技術。（2）從車輛的加速度反應頻譜中，可以分析出橋梁的第一個振態的頻率，此點若再進一步的研究，可望發展成為間接量測橋梁頻率的技術。基於上述兩點理由，本主題有繼續研究之必要。

六、參考文獻

- [1] R. Willis, *Appendix to the Report of the Commissioners Appointed to Inquire into the Application of Iron to Railway Structures*. London, UK: H.M. Stationary Office, 1849.
- [2] G. G. Stokes, Discussion of a differential equation relating to the braking of railway bridges, *Transactions of the Cambridge Philosophical Society* **8**(5), 707-735, 1849.
- [3] S. P. Timoshenko, On the forced vibrations of bridges, *Philosophical Magazine, Series 6*, **43**, 1018-1019, 1922.
- [4] C. P. Tan and S. Shore, Response of horizontally curved bridge to moving load, *Journal of Structural Engineering, ASCE* **94**(9), 2135-2151, 1968.
- [5] H. H. Jeffcott, On the vibration of beams under the action of moving loads, *Philosophical Magazine, Series 7*, **8**, 66-97, 1929.
- [6] S. Sadiku and H. H. E. Leipholz, On the dynamics of elastic systems with moving concentrated masses, *Ingenieur-Archiv*, **57**, 223-242, 1987.
- [7] L. Fryba, *Vibration of Solids and Structures under Moving Loads*. Noordhoff International Publishing, Groningen, Netherlands, 1972.
- [8] Y. B. Yang and J. D. Yau, Vehicle-bridge interaction element for dynamic analysis, *Journal of Structural Engineering, ASCE* **123**(11), 1512-1518, 1997. (Errata: **124**(4), 479)
- [9] J. M. Biggs, *Introduction to Structural Dynamics*. New York: McGraw-Hill, 1964.
- [10] Yang, Y. B., Lin, C. W., and Yau, J. D., "Extracting the Bridge Frequencies from the Dynamic Response of a Passing Vehicle," *J. Sound & Vibr.*, 272(3-5), 471-493, 2004.