LAMBDA 法中週波未定值二維低相關化演算策略之研究

Explorations of the 2-D Decorrelation Strategies for the LAMBDA

計畫編號：NSC 93-2211-E-002-053

執行期限：93/08/01～94/07/31

主持人：許榮欣　　台灣大學土木系 教授

（精簡報告）

摘要

藉由目標函數之達成爲準則，本研究提出六種週波未定值二維低相關化演算方法，並比較其計算效率。實驗數例顯示最小方差法、最大相關法和最小目標函數法是當中表現最佳的三個方法。然而，最小方差法的程式流程最簡單，不僅容易覓得低相關化元素所在之位置，且完成計算的時間最短。

ABSTRACT

By fulfilling an objective function, six approaches to the 2-D decorrelation transformation for the LAMBDA are discussed and their efficiencies compared. The numerical experiments indicated that the minimum variance approach, maximum correlation approach, and minimum objective function approaches were the three better ones in terms of computational time to complete the decorrelation transformation of the ambiguity-covariance matrix to its final form. However, the minimum variance approach was the best because it had the advantage of easy-locating the entries of covariance matrix to start a decorrelation transformation and hence least time-consumption.

關鍵詞	Keywords
二維低相關化轉換	2-D decorrelation transformation
最小平方週波未定值低相關化平差	LAMBDA

一、 前言

全球衛星定位系統（GPS）是現今最廣爲接受的衛星資訊技術，GPS 依所接收觀測量之不同，可以分爲虛擬距離觀測與載波相位觀測兩種。在載波相位觀測法中，欲得到精確之定位成果，必定要求解出整數週波未定值方能達成。Teunissen (1995)年提出最小平方週波未定值低相關化平差(the Least–squares AMBiguity Decorrelation Adjustment, LAMBDA)；這是一種非連續性的搜尋技巧，將週波未定值低相關化，再進行最小平方估計之方法。簡單的說，就是一個未知數具有整

數約制的平差方法，有別於一般未知數爲實數解的平差計算。在 Teunissen(1995) 所提出之二維低相關化方法中，只闡述了每一次的低相關化操作是在二維空間內進行，對於如何去選擇二維空間操作的對象卻沒有界定；然而，實驗中發現選取不同之方差、協方差組合，對於低相關化之疊代運算效率影響甚鉅。本文所探討的便是利用整數最小平方法求解週波未定值時，如何選取不同方法以進行降低週波未定值相關性，加快搜尋到整數週波值的演算策略。

二、 週波未定值最小平方整數估計

進行週波未定值最小平方整數平差時，採用的模式爲(Teunissen，1997)：

$$\mathbf{e} = \mathbf{A}\mathbf{a} + \mathbf{B}\mathbf{b} - \mathbf{L} \qquad (1)$$

$\mathbf{L}$ ：GPS 的觀測資料，維度爲 $n \times 1$

$\mathbf{a}$ ：週波未定值的參數，維度爲 $m \times 1$

$\mathbf{b}$ ：其他未定參數，維度爲 $t \times 1$

$\mathbf{A}$ ，$\mathbf{B}$ 爲維度 $n \times m$、$n \times t$ 的滿秩設計矩陣

因爲必須在週波未定值 $\mathbf{a}$ 爲整數的條件下進行最小平方估計，故有：

$$(\mathbf{L} - \mathbf{A}\breve{\mathbf{a}} - \mathbf{B}\breve{\mathbf{b}})^T \mathbf{Q}_L^{-1} (\mathbf{L} - \mathbf{A}\breve{\mathbf{a}} - \mathbf{B}\breve{\mathbf{b}}) = \min \text{，} \quad \breve{\mathbf{a}} \in \mathbf{Z}^m, \breve{\mathbf{b}} \in \mathbf{R}^t \qquad (2)$$

$\mathbf{Z}^m$ 表示一個 m 維整數空間向量，$\mathbf{R}^t$ 表示一個 t 維實數空間向量，整數向量 $\breve{\mathbf{a}}$ 爲實數向量 $\hat{\mathbf{a}}$ 之最小平方整數平差解，$\breve{\mathbf{b}}$ 則爲相應於整數解 $\breve{\mathbf{a}}$ 之實數解；式（2）的意義可以解讀爲在滿足 $\breve{\mathbf{a}} \in \mathbf{Z}^m, \breve{\mathbf{b}} \in \mathbf{R}^t$ 之前提下，改正數加權平方和爲最小之條件。根據（1）與（2）式，可以列加權出改正數平方和之關係式：

$$\mathbf{e}^T \mathbf{P} \mathbf{e} = \hat{\mathbf{e}}^T \mathbf{Q}_L^{-1} \hat{\mathbf{e}} + (\hat{\mathbf{a}} - \breve{\mathbf{a}})^T \mathbf{Q}_{\hat{a}}^{-1} (\hat{\mathbf{a}} - \breve{\mathbf{a}}) \qquad (3)$$

式中，$\hat{\mathbf{e}}$ 爲無約制條件時之改正數向量，等式右邊第二項表約制條件 $\breve{\mathbf{a}} \in \mathbf{Z}^m$ 對加權改正

數平方和之影響。求解(2)式的步驟，可分解爲以下三個動作：

1.由觀測方程式，依最小平方平差法求得 $\mathbf{a}$ 、$\mathbf{b}$ 之實數估計 $\hat{\mathbf{a}}$ 、$\hat{\mathbf{b}}$ ，也稱爲浮點解（float-solution），其協方差矩陣爲 $\begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{\hat{a}} & \mathbf{Q}_{\hat{a}\hat{b}} \\ \mathbf{Q}_{\hat{b}\hat{a}} & \mathbf{Q}_{\hat{b}} \end{bmatrix}$。

2.利用浮點解 $\hat{\mathbf{a}}$ ，以下式來估計其整數解 $\breve{\mathbf{a}}$ ，又稱爲固定解（fixed-solution）。

$$(\hat{\mathbf{a}}-\breve{\mathbf{a}})^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_{\hat{a}}^{-1}(\hat{\mathbf{a}}-\breve{\mathbf{a}}) = \min \quad ,\breve{\mathbf{a}} \in \mathbf{Z}^{m} \tag{4}$$

在（4）式中，利用 $\breve{\mathbf{a}}$ 爲整數當作約制條件，再經由最小平方法去計算滿足改正數加權平方和爲最小之整數解。

3.在滿足固定解 $\breve{\mathbf{a}}$ 的情況下，依浮點解 $\hat{\mathbf{b}}$ 進行平差計算，以獲得新實數估計 $\breve{\mathbf{b}}$ 。

三、 二維低相關化轉換

二維低相關化轉換，就是對整週波未定值之協方差矩陣 $\mathbf{Q}_{\hat{a}}$ 反覆進行二維的空間轉換操作，以求得一整數轉換矩陣 $\mathbf{Z}$，俾便將原週波未定值協方差矩陣低相關化，其操作過程可簡單表示如下(Teunissen，1995)：

協方差矩陣 $\mathbf{Q}_{\hat{a}}$

$$\text{轉換矩陣 } \mathbf{Z} = \mathbf{Z}_{m\times m}(j,i) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \mathbf{Z}_{j,i} & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{5}$$

$$\text{其中，} \mathbf{Z}_{j,i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -[\sigma_{j,i}\sigma_{i,i}^{-1}] & 1 \end{bmatrix}，\sigma_{i,i} < \sigma_{j,j} \tag{6}$$

$\sigma_{i,i}$ 是協方差矩陣 $\mathbf{Q}_{\hat{a}}$ 中的第 (i,i) 項元素，其值爲 σ_i^2 。$\sigma_{j,j}$ 是協方差矩陣 $\mathbf{Q}_{\hat{a}}$ 中的第 (j,j) 項元素，其值爲 σ_j^2 。$\sigma_{j,i}$ 是協方差矩陣 $\mathbf{Q}_{\hat{a}}$ 中的第 (j,i) 項元素。$[\sigma_{j,i}\sigma_{i,i}^{-1}]$ 則是 $\sigma_{i,i}$ 除 $\sigma_{j,i}$ 之商數值小數部分四捨五入，爲一整數值。然而 Teunissen 對於該如何選取

二維整數轉換矩陣 $\mathbf{Z}_{j,i}$，並沒有明確的界定；因爲不同之選取規則會造成不同之演算次數和演算時間，這部分之探討便是本文之研究課題。轉換後的協方差矩陣

$$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{z}}} = \mathbf{Z}_{j,i}\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{a}}}\mathbf{Z}_{j,i}^{T} \tag{7}$$

除了將週波未定值低相關化外，也意味把超橢球從狹長形轉變爲接近圓球形，但超橢球之容積維持不變（Teunissen，1995）。爲了瞭解低相關化之品質優劣，可依 $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{z}}}$ 所構成之相關係數矩陣 $\mathbf{R}$，求其行列式值來判斷，其定義爲 $r^2 = \det(\mathbf{R})$。理想之低相關化成果爲 $r = 1$，越不理想之低相關化，其 r 值將越趨近於 0（ibid.）。

四、 週波未定值之唯一性

以兩種不同低相關化方法對協方差矩陣 $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{a}}}$ 進行操作，可得到兩個整數變換矩陣 $\mathbf{Z}_{\mathrm{d}}$ 與 $\mathbf{Z}_{\mathrm{e}}$，轉換後協方差矩陣爲 $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{z}}}^{\mathrm{d}}$ 和 $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{z}}}^{\mathrm{e}}$，轉換前後之關係式爲(Hsu，2004)：

$$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{z}}}^{\mathrm{d}} = \mathbf{Z}_{\mathrm{d}}\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{a}}}\mathbf{Z}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{T}} \quad ; \quad \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{z}}}^{\mathrm{e}} = \mathbf{Z}_{\mathrm{e}}\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{a}}}\mathbf{Z}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{T}} \tag{8}$$

式中 $\mathbf{Z}_{\mathrm{d}} \neq \mathbf{Z}_{\mathrm{e}}$，$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{z}}}^{\mathrm{d}} \neq \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{z}}}^{\mathrm{e}}$，但是行列式值 $\det(\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{z}}}^{\mathrm{d}}) = \det(\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{z}}}^{\mathrm{e}})$。則 $\mathbf{Z}_{\mathrm{d}}$ 與 $\mathbf{Z}_{\mathrm{e}}$ 以及 $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{z}}}^{\mathrm{d}}$ 和 $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{z}}}^{\mathrm{e}}$ 之間的關係可由下二式表示：

$$\mathbf{Z}_{e} = \pm\mathbf{U}\mathbf{Z}_{d} = \overline{\mathbf{U}}\mathbf{Z}_{d} \tag{9}$$

$$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{z}}}^{\mathrm{e}} = \mathbf{U}\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{z}}}^{\mathrm{d}}\mathbf{U}^{\mathrm{T}} = \overline{\mathbf{U}}\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{z}}}^{\mathrm{d}}\overline{\mathbf{U}}^{\mathrm{T}} \tag{10}$$

其中 $\mathbf{U}$ 爲一整數矩陣，$\det(\overline{\mathbf{U}}) = \pm 1$。則使用不同低相關化方法所得到之週波未定值整數解 $\breve{\mathbf{a}}_{\mathrm{e}}$ 與 $\breve{\mathbf{a}}_{\mathrm{d}}$ 必相等，因爲

$$\breve{\mathbf{a}}_{\mathrm{e}} = \mathbf{Z}_{\mathrm{e}}^{-1}\breve{\mathbf{z}}_{\mathrm{e}} = (\mathbf{Z}_{\mathrm{d}}^{-1}\mathbf{U}^{-1})(\mathbf{U}\breve{\mathbf{z}}_{\mathrm{d}}) = \mathbf{Z}_{\mathrm{d}}^{-1}\breve{\mathbf{z}}_{\mathrm{d}} = \breve{\mathbf{a}}_{\mathrm{d}} \tag{11}$$

意即不論使用什麼方法進行低相關化操作，最終都可以得到唯一的整數週波未定值解答，差別僅在於搜尋空間(超橢球)之形狀、大小與方位。(註：本節亦屬本計畫研究課題之一，研究成果已先發表於 2004, Journal of the Chinese Institute of Engineers, Vol.27, No.5, pp.689-694)

五、目標函數

根據低相關以後超橢球轉變成接近圓球狀的現象，可以列出：

$$f_i = \lambda_j / \lambda_{min} \tag{12}$$

此處 λ_j 代表 $\mathbf{Q}_{\hat{z}}$ 的特徵值($j = 1,2,...,m$)，每個 f_i 將會隨著低相關化的進行而漸趨於 1，因此 Σf_i 也將會收斂到一個最小值，亦即是：

$$tr(\mathbf{Q}_{\hat{z}}) = \sum \lambda_i = \min \tag{13}$$

由上式知，協方差矩陣 $\mathbf{Q}_{\hat{z}}$ 之對角線元素總和為最小：

$$\sum \sigma^2_{\hat{z}_i} = \min \tag{14}$$

（14）式在每一個對角線元素皆為最小值時成立，此時協方差矩陣 $\mathbf{Q}_{\hat{z}}$ 已經過完整的低相關化動作，獲得其最終形式。而根據（11）式，只要達到最低度相關，所求出來之週波未定值是唯一的；意即不論使用何種低相關化的演算策略，只要能達到最低度相關，都將會符合（14）式。因此，二維低相關化操作之目標函數便可以訂為：

$$\mathbf{\Phi} = \mathrm{tr}\left(\mathbf{\Sigma}_{\hat{z}}\right) = \min \tag{15}$$

六、低相關化演算方法

根據低相關化計算過程以及低相關化操作之諸多特性，本文訂定了六個演算方法，分別敘述如下（因篇幅之限，略去公式推演）：

1. 最小方差法

以(5)式進行低相關化後，$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{z}}}$ 的 i 與 j 二列(或行)的元素成爲

$$\begin{bmatrix} \bar{\sigma}_{ii} & \bar{\sigma}_{ij} \\ \bar{\sigma}_{ji} & \bar{\sigma}_{jj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{i,i} & \sigma_{i,j} - \sigma_{i,i}[\sigma_{j,i}\sigma_{i,i}^{-1}] \\ \sigma_{j,i} - \sigma_{i,i}[\sigma_{j,i}\sigma_{i,i}^{-1}] & (\sigma_{j,j} - 2\sigma_{j,i}[\sigma_{j,i}\sigma_{i,i}^{-1}] + \sigma_{i,i}[\sigma_{j,i}\sigma_{i,i}^{-1}]^2) \end{bmatrix} \tag{16}$$

由上式，可以看出 $-2\sigma_{j,i}[\sigma_{j,i}\sigma_{i,i}^{-1}] + \sigma_{i,i}[\sigma_{j,i}\sigma_{i,i}^{-1}]^2$ 爲轉換後方差的變化。令 $[\sigma_{j,i}\sigma_{i,i}^{-1}]$ $= \sigma_{j,i}\sigma_{i,i}^{-1} + \delta_{j,i} = \theta_{j,i} + \delta_{j,i}$, $|\delta_{j,i}| < 0.5$，則

$$S_{j,i} = 2\sigma_{j,i}[\sigma_{j,i}\sigma_{i,i}^{-1}] - \sigma_{i,i}[\sigma_{j,i}\sigma_{i,i}^{-1}]^2 = (\theta_{j,i}^2 - \delta_{j,i}^2)\sigma_{i,i} \tag{17}$$

因 $S_{j,i}$ 恆爲正值，即經過二維低相關化操作後，方差將會縮減。當 $|\theta_{j,i}|$ 越大時，$S_{j,i}$ 越大。因此，以「方差削減最快」之原則來進行低相關化時，應先挑選出每一行中最大之 $|\theta_{j,i}|$，再分別計算其 $S_{j,i}$ 值，接著取出其中最大之 $S_{j,i}$ 所對應之元素以進行低相關化。

2. 最小相關法

經過低相關化轉換後，二個 $\hat{z}$ 元素間的相關係數值會較轉換前減小，因而可選取能獲得相關係數最小之 i 與 j 二列以進行轉換，依此現象所擬出的演算法，稱爲最小相關法。若令 $[\theta_{j,i}] = \theta_{j,i} + \delta_{j,i}$，則經低相關轉換後的相關係數，可寫成：

$$\bar{r}_{j,i} = \frac{-\delta_{j,i}\sigma_i^2}{\left(\sigma_i^2 - S_{j,i}\right)^{1/2}} \tag{18}$$

要使上式爲最小，則選擇之 $S_{j,i}$ 必須爲最小值，且 σ_i^2 與 $\delta_{j,i}$ 也同時爲最小值（$S_{j,i}$ 也是 σ_i^2 之函數）。若要選擇 σ_i^2 及 $\delta_{j,i}$ 爲最小值，只需要找出每一行最大之 $S_{j,i}$ 值。根據這條件，擬訂了搜尋策略：首先取出每一行最大之 $|\theta_{j,i}|$，再由每行最大之 $|\theta_{j,i}|$ 當中，挑選會使 $\bar{r}_{j,i}$ 出現最小值所對應之方差與協方差組合即可。

3. 最大相關法

轉換後之矩陣對角線元素$\bar{\sigma}_j^2$可寫成：

$$\bar{\sigma}_j^2 = \sigma_j^2 - S_{j,i} = \sigma_j^2\left(1 - r_{j,i}^2 + \delta_{j,i}^2\,\sigma_i^2/\sigma_j^2\right) \tag{19}$$

由上式知，轉換後方差之削減，主要是來自於括弧內唯一的負號項$-r_{j,i}^2$，選定相關係數後，$\delta_{j,i}^2\,\sigma_i^2/\sigma_j^2$項即固定下來。當選定之相關係數越大，方差之削減也越大。將$S_{j,i}$拆解成

$$S_{j,i} = r_{j,i}^2\sigma_j^2 - \delta_{j,i}^2\sigma_i^2 = \frac{\sigma_{j,i}^2}{\sigma_i^2} - \delta_{j,i}^2\sigma_i^2 \tag{20}$$

顯然相關係數$r_{j,i}$與$S_{j,i}$之間的關係，其實與σ_j^2無涉。雖然將範圍縮小至兩個變數，但是仍然無法以單一簡單的指標去決定出正確之$S_{j,i}$（此處顯現出，當σ_i愈小及$\sigma_{j,i}$愈大時，$S_{j,i}$愈大）。由(19)式也可發現$\delta_{j,i}^2\sigma_{i,i}\sigma_{j,i}^{-1}$對於$S_{j,i}$仍然有影響，因此，即使以(20)式中之$\sigma_{j,i}^2\sigma_{i,i}^{-1}$作爲指標，仍然不能保證$S_{j,i}$能夠被正確的預測。在無法以簡單指標去解析的前提下，最大相關係數法之運作流程爲：首先計算精度矩陣之相關係數矩陣，由其中挑選出最大之相關係數$r_{j,i}$，以相應之i與j二列進行低相關化。

4. 最近似球形法

因二維低相關化之操作只對二維空間發生影響，因此，此處僅以二維矩陣來舉例：經過低相關轉換後，矩陣$\mathbf{Q}_{\hat{z}}$的特徵值方程式爲：

$$\lambda^2 - (\bar{\sigma}_{i,i} + \bar{\sigma}_{j,j})\lambda + (\bar{\sigma}_{i,i}\bar{\sigma}_{j,j} - \bar{\sigma}_{i,j}^2) = 0 \tag{21}$$

因低相關化處理後，搜尋空間會往「圓球形」趨近，即方程式的二根趨近於重根，因此可得兩個條件：

$$\sigma_{i,i} - \sigma_{j,j} + S_{j,i} \to 0 \;\; ; \;\; \sigma_{j,i} - \sigma_{i,i}[\frac{\sigma_{j,i}}{\sigma_{i,i}}] \to 0 \qquad (22)$$

將式(22)之前式拆解爲兩個部分：$(\sigma_{i,i} - \sigma_{j,j}) \to 0$與$S_{j,i} \to 0$。其中$(\sigma_{i,i} - \sigma_{j,j}) \to 0$代表應選取之兩個方差，其值應接近。而$S_{j,i} \to 0$與後式合併得條件：

$$-\frac{1}{2}\sigma_{i,i}[\sigma_{j,i}\sigma_{i,i}^{-1}] \to 0 \qquad (23)$$

可以看出當$-[\sigma_{j,i}\sigma_{i,i}^{-1}]$趨近於零，也就是$\sigma_{i,i}$越大則(23)式可成立。綜合(22)及(23)二式，得最近似球形法的演算策略：選取矩陣當中最大與次大之方差進行低相關化操作。

5. 最接近整數法

低相關化操作目的，在於消除矩陣元素間的相關性，而一最理想的獨立不相關矩陣，其非對角線元素值應該爲零。依(16)式，理想的狀況是：

$$\sigma_{j,i} - \sigma_{i,i}[\sigma_{j,i}\sigma_{i,i}^{-1}] = 0 \qquad (24)$$

上式成立的條件是$\sigma_{j,i}\sigma_{i,i}^{-1}$爲一整數（即不受取四捨五入的影響），因此決定了演算策略：挑選$\sigma_{j,i}\sigma_{i,i}^{-1}$值爲最接近整數的組合。當然，$\sigma_{j,i}\sigma_{i,i}^{-1}$必須爲絕對值大於 0.5 的數。根據這個概念發展出搜尋的演算流程：

(1).將$\mathbf{Q}_{\hat{a}}$每一行元素，皆除以該行之對角線元素，得矩陣$\boldsymbol{\theta}$。

(2).對$\boldsymbol{\theta}$內的元素求取其四捨五入之值，記爲$round(\boldsymbol{\theta})$。

(3).求$\mathbf{M} = \boldsymbol{\theta} - round(\boldsymbol{\theta})$，並指派$\mathbf{M}$之對角線元素值皆等於 1。

(4).選取$\mathbf{M}$矩陣之元素其絕對值最小者。

6. 最小目標函數法

每一次二維低相關化轉換，$\mathbf{Q}_{\hat{z}}$ 對角線元素和的變化可表爲：

$$tr(\mathbf{Q}_{\hat{z}}) = \sigma_1^2 + \ldots + \sigma_i^2 + \ldots. + (\sigma_j^2 - S_{j,i}) + \ldots. + \sigma_n^2 \tag{25}$$

因此，若能在每一次的低相關化計算中，找出能使得該次計算得到最小對角線元素和的 i 與 j 二列，則預期反覆這樣的步驟，將使低相關化操作之次數爲最少。於是，最小目標函數法之運作流程：先算出各個 $|\theta_{j,i}|$ ，並計算其所對應之 $S_{j,i}$ ，再分別計算 $(\sigma_j^2 - S_{j,i})$ 並加總所對應之對角線元素和，最後挑選使對角線元素和爲最小者所對應之 i 與 j 二列，以進行低相關化處理。

七、 實驗

實驗數據取自(劉格非，2001)，由點號 227 與 228 所構成之長度約 100 公尺的短基線。採用靜態觀測，觀測時間由 2000 年 9 月 7 日 16:20 至 9 月 7 日 16:25，共 5 分鐘，每 5 秒鐘接收一筆觀測量，合計 60 筆資料。觀測 6 顆衛星編號爲 21、30、29、25、5、6，測站 228 爲固定點，其 WGS84 三維坐標如表 1 所示。

表 1 點 228 之 WGS84 三維坐標

坐標（單位：公尺）		
X	Y	Z
-299956966.5600	4952759.2380	2670110.2240

過波未定值參數之協方差矩陣：

$$\mathbf{Q}_{\hat{a}} = \begin{bmatrix} 19292513 & & & & \\ 11784389 & 7322531 & & sym & \\ -8432825 & -4855314 & 4729998 & & \\ 29700819 & 18150524 & -12566477 & 46194169 & \\ 30798527 & 18422449 & -14054836 & 47791004 & 50744538 \end{bmatrix}$$

協方差矩陣 $\mathbf{Q}_{\hat{a}}$ 之相關係數矩陣 $\mathbf{R}$ 。

$$
\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1.000 & & & & \\ 0.991 & 1.000 & & sym. & \\ -0.883 & -0.825 & 1.000 & & \\ 0.995 & 0.987 & -0.850 & 1.000 & \\ 0.984 & 0.956 & -0.907 & 0.987 & 1.000 \end{bmatrix}
$$

以前述六個演算方法，針對協方差矩陣 $\mathbf{Q}_{\hat{a}}$ 進行低相關化操作，對角線元素和由 1.2828×10^{6} 降至 7264.9。相關係數矩陣行列式值平方根 r 由 4.188×10^{-6} 提高至 0.78493。最終之週波未定值協方差矩陣為：

$$
\hat{\mathbf{Q}}_{\hat{a}} = \begin{bmatrix} 2209.71 & & & & \\ 356.93 & 2049.68 & & sym. & \\ -11.18 & 23.26 & 1173.46 & & \\ 330.74 & 442.27 & 358.69 & 908.06 & \\ 274.88 & -138.11 & 26.88 & 252.80 & 923.94 \end{bmatrix}
$$

六種方法之對角線元素和之變化趨勢綜合整理如圖.1。

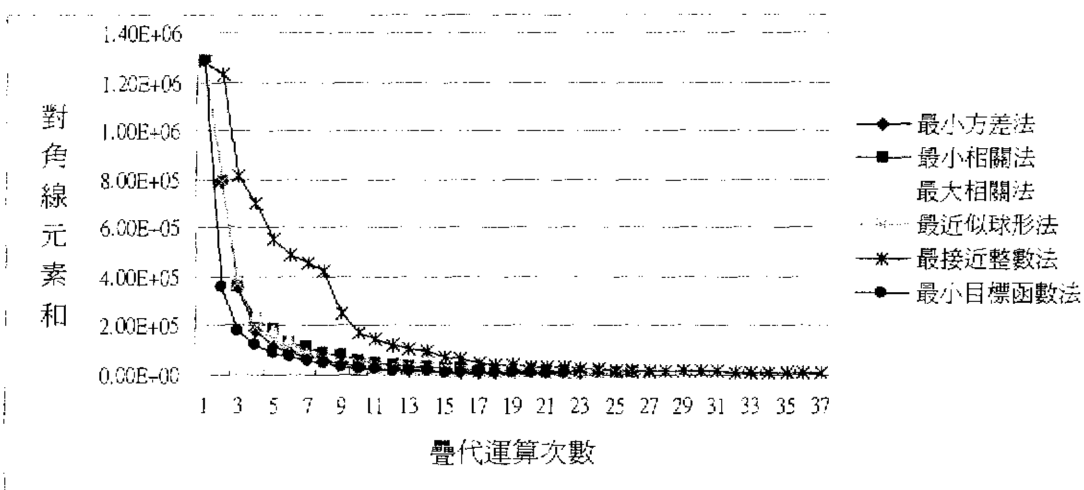

圖.1 六種演算法之對角線元素和變化圖

由 R 矩陣知，在進行低相關化操作前，協方差矩陣之各元素間高度相關。本研究以矩陣各元素相關係數絕對值全部降至 0.9 以下以及降至 0.7 以下，分別做為參考指標。另外，六個演算法執行時間、疊代運算總數以及對角線元素和減少 50%與 66.7%之疊代次數，亦做為參考指標，這些指標與演算法對應之關係整理成表 2。

表.2 六種演算法成果比較

名稱＼指標	方差和減少50%	方差和減少66.7%	相關係數低於0.9	相關係數低於0.7	疊代總數	執行時間
最小方差法	2	2	6	16	22	0.020
最小相關法	2	2	15	21	25	0.130
最大相關法	3	3	12	18	21	0.144
最近似球形法	2	2	11	23	26	0.248
最接近整數法	4	8	23	31	36	0.571
最小目標函數法	1	1	5	15	21	0.200

各演算法之協方差矩陣相關係數矩陣行列式值平方根 r 值變化可以整理成圖.2。r 值的變化可以視為搜尋空間超橢球形狀的變化；在圖.2 中可以看到最小方差法與最小目標函數法的折線幾乎是重疊在一起，最大相關法則比最小方差法及最小目標函數法更早一步達到較好的超橢球形狀，依序為最小相關法、最近似球形法及最接近整數法。就這一點來說，最大相關法優於最小目標函數法，最小目標函數法則是與最小方差法很接近。

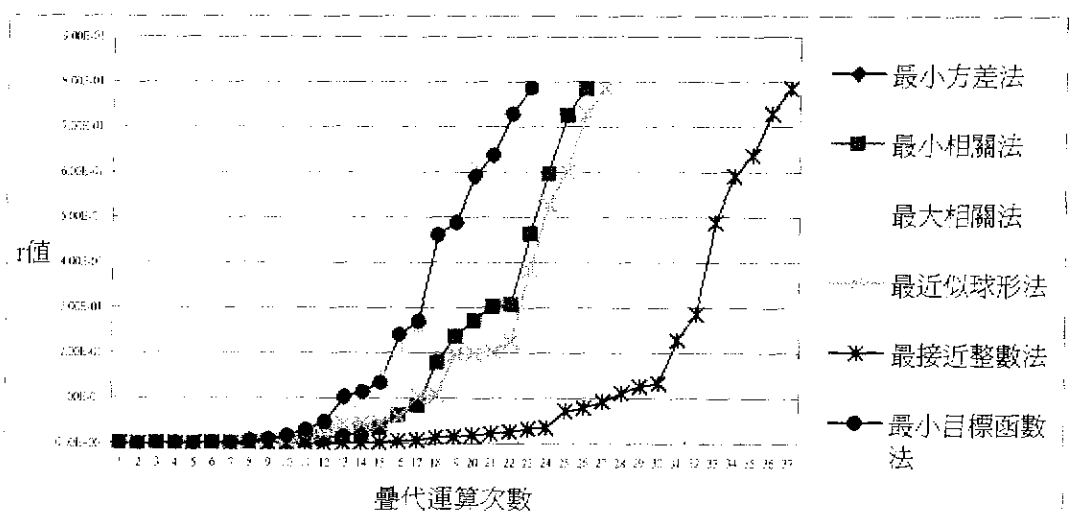

圖.2 各演算法之相關係數矩陣 r 值變化圖

八、 結論與建議

由實驗結果可以發現，不論是以計算之時間、疊代運算之次數與相關係數矩陣行列式值平方根 r 值之變化，抑或是對角線元素和削減之穩定度來看，最小方差法、最大相關法和最小目標函數法是表現最佳的三個方法。然而，最小方差法的程式流程最為簡單，且計算所耗時間最短，縱使其疊代運算比最小目標函數法及最大相關法多了一次，仍無損其優勢。因此依 LAMBDA 進行週波未定值求解時，建議採用最小方差法。

參考文獻

Hsu, R.S., 2004, An orientation-varying consideration in the least-squares ambiguity decorrelation adjustment, Journal of the Chinese Institute of Engineers, Vol.27, No.5, pp.689-694

Teunissen P.J.G., 1995, The least-squares ambiguity decorrelation adjustment: a method for fast GPS integer ambiguity estimation, Journal of Geodesy 70, pp. 65-82

Teunissen P.J.G., 1997, The least-squares ambiguity decorrelation adjustment: its performance on short GPS baselines and short observation spans, Journal of Geodesy 71, pp. 589-602

劉格非，2001，石門大圳幹渠管理自動化工程之規劃與設計，國立台灣大學土木工程研究所