

行政院國家科學委員會專題研究計畫 成果報告

在磁場及外力作用下含裂縫之半平面的分析

計畫類別：個別型計畫

計畫編號：NSC93-2212-E-002-043-

執行期間：93年08月01日至94年07月31日

執行單位：國立臺灣大學土木工程學系暨研究所

計畫主持人：葉超雄

計畫參與人員：徐文信

報告類型：精簡報告

報告附件：出席國際會議研究心得報告及發表論文

處理方式：本計畫可公開查詢

中 華 民 國 94 年 10 月 31 日

行政院國家科學委員會補助專題研究計畫 成果報告 期中進度報告

(計畫名稱)

在磁場及外力作用下含裂縫之半平面分析

計畫類別： 個別型計畫 整合型計畫

計畫編號：NSC 93-2212-E-002-043

執行期間：93年8月1日至94年7月31日

計畫主持人：葉超雄

計畫參與人員：徐文信

成果報告類型(依經費核定清單規定繳交)： 精簡報告 完整報告

本成果報告包括以下應繳交之附件：

- 赴國外出差或研習心得報告一份
- 赴大陸地區出差或研習心得報告一份
- 出席國際學術會議心得報告及發表之論文各一份
- 國際合作研究計畫國外研究報告書一份

處理方式：除產學合作研究計畫、提升產業技術及人才培育研究計畫、列管計畫及下列情形者外，得立即公開查詢
 涉及專利或其他智慧財產權， 一年 二年後可公開查詢

執行單位：國立台灣大學土木工程學系

中華民國 94 年 10 月 31 日

在磁場及外力作用下含裂縫之半平面的分析

中文摘要

本計畫擬研究半無限域之裂縫受力後，影響自由表面變形以及磁場分佈的情形。首先考慮無限域存在圓形空穴的狀況下，其附近之磁場必為不均勻分佈，透過 Maxwell 方程組可解得剛體態的解析解，其次建立電磁彈材料大變形變分原理，可求得材料之組成律及邊界條件，可作為進一步求得微擾彈性變形以及微擾電磁場分佈之依據。

英文摘要

A crack embedded in the half-space, the magnetoelastic interactions could be important for a soft ferromagnetic material. Considering a circular cavity in an infinite space affected by a uniform magnetic field, the deformed body may be divided into two parts: a rigid body state, and a perturbation one. The analytic solution can be obtained by applying Maxwell equations. The variational principle is developed by considering the interaction of the electromagnetics and deformed body, and the perturbed terms can be solved by applying FEM and BEM.

關鍵字：裂縫，磁彈固體，大變形變分原理

一、研究目的

由於磁彈理論的應用範圍趨於多元化，諸如地球物理、聲光效應等許多量測儀器方面的使用，因此近年來在連結電磁理論與彈性力學上有許多研究。考慮磁場與彈性體之耦合互制，加外磁感會造成彈性變形。即使無機械外力，磁彈性介質之內含缺陷(例如空穴或裂縫)還是會在強磁感作用下造成應力集中現象。探討缺陷上之應力集中現象，屬於邊界值問題。

相關邊界值問題之解析過程可分為下列步驟分別進行：

- (1) 推導磁彈性材料之大變形非線性動態耦合之御制方程、組成律與邊界條件(含 Maxwell 方程及運動方程)。
- (2) 將非線性邊值問題分解為下列兩個邊值問題分別求解：
 - (a) 在外加強磁感作用下(此時之彈性體假設為毫無變形之剛體，故此邊值問題之求解較為單純，純粹只解一 Maxwell 方程而已)，求解剛體態之非均勻磁感總場之空間分佈。
 - (b) 將剛體態中所求得之非均勻磁感總場當成已知場代入線性化之耦合運動方程中求解未知之微擾彈性變形及微擾電磁場分佈後，可計算空穴上之應力集中因子。

首先假設缺陷為圓形空穴，如圖一所示。其優點為在解剛體態之磁感總場分佈時，可求得解析解，未來可將圓形空穴推廣成橢圓形空穴或甚至為有限長之平直裂縫(crack)。運用 Maxwell 方程式，可求得剛體態之磁感分佈，其在空穴附近呈不均勻分佈，惟影響範圍不廣，故剛體態不均勻磁感之分佈區域可只限定在包含空穴附近之有限範圍內(此不均勻範圍即視為廣義之不均勻物體)，而在此有限範圍外，無限域中之磁感總場可視為均勻磁感場。

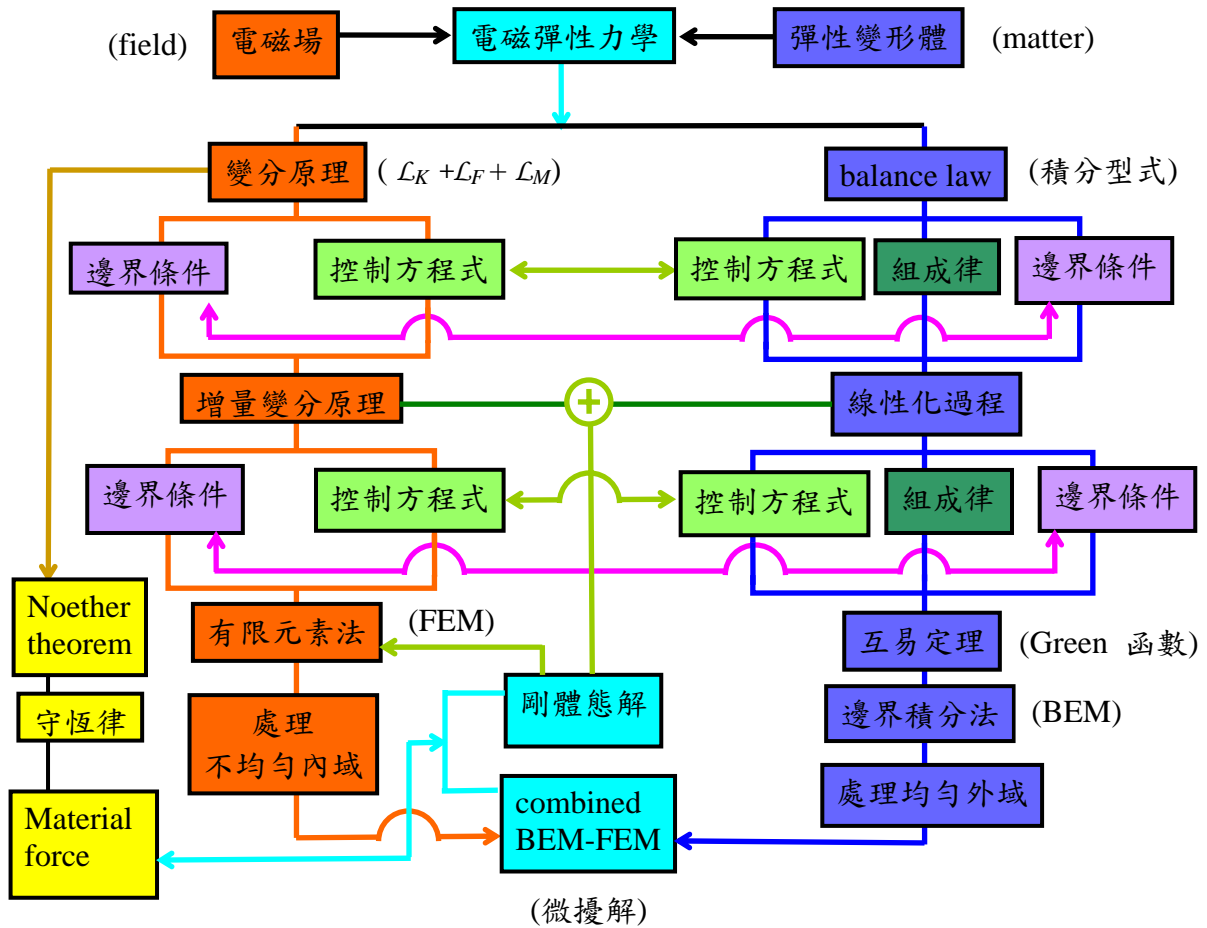
對於求解微擾場之邊值問題而言，由於在有限範圍外之無限域中的已知剛體態磁感總場可視為均勻場，故外域之場運動方程為一常係數線性耦合偏微分方程，此可建立其 Green 函數及互易定理後，得到邊界積分方程，而內域場為一不均勻的有限範圍，此可在建立適當之變分原理後用有限元素法離散，最後在有限

範圍之界面滿足連續的條件下，可解出所有的微擾場(combined BEM-FEM)。

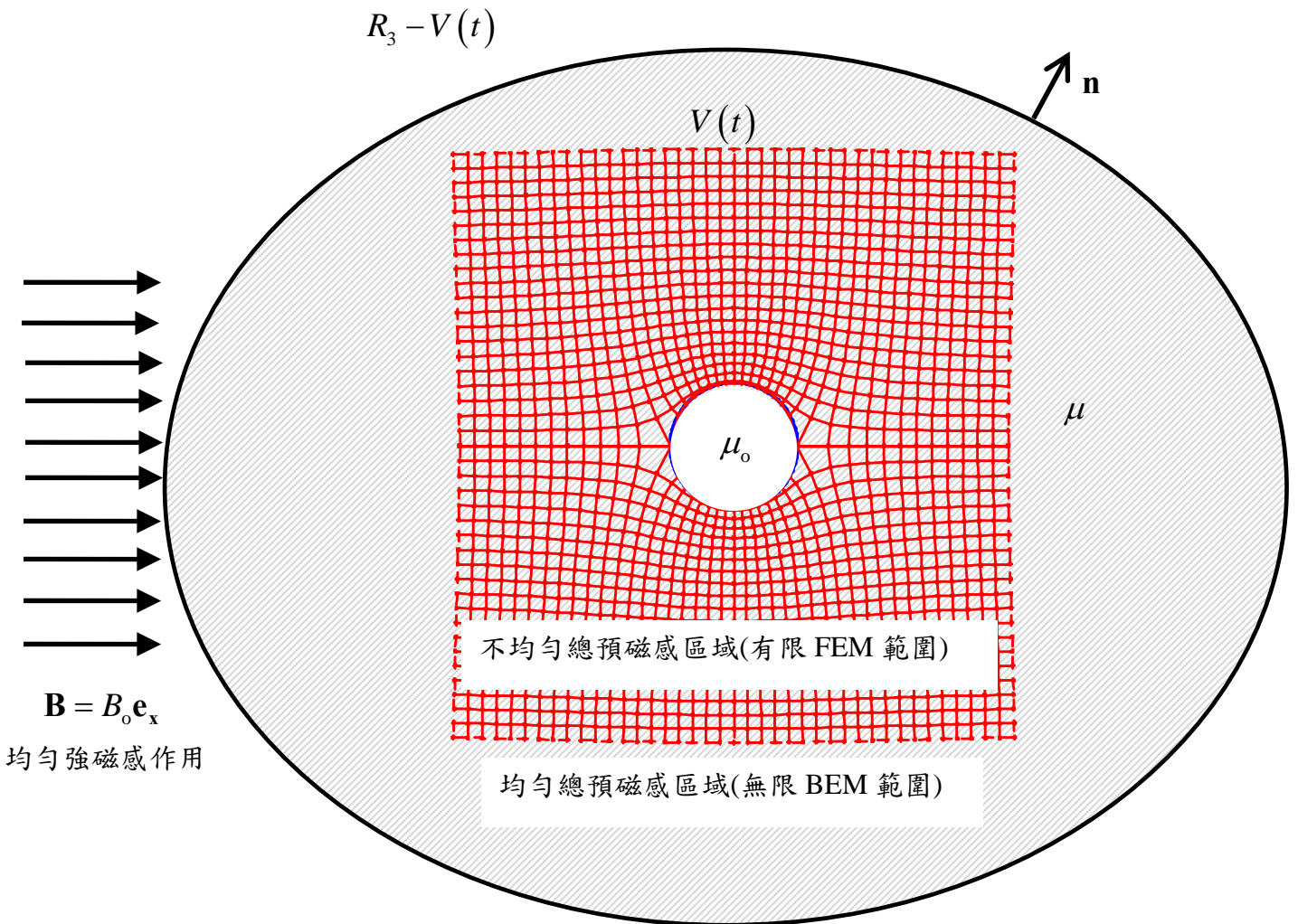
在求解內外域微擾場邊界值問題時，需建立以下之關鍵要素：

- (1) 建立外域微擾場之互易定理、邊界積分方程及格林函數。
- (2) 建立內域微擾場之變分原理以及有限元素法。

上述之邊界問題解題過程可用下圖之流程圖來表示：



非線性解 = 剛體態解 + 微擾解

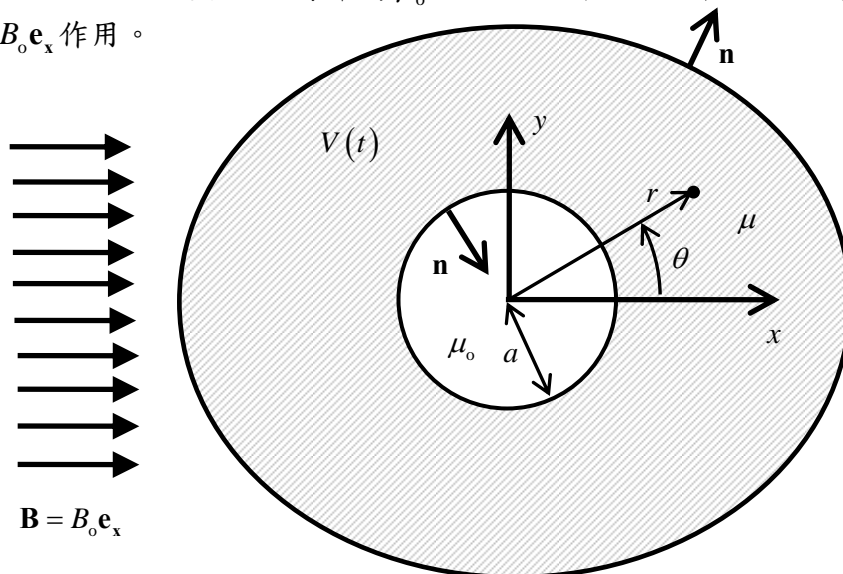


圖一 圓形空穴受均勻強磁感作用下之邊值問題示意圖

二、研究方法

(一) 剛體態解析解：

如圖二所示，考量一個無限域的軟磁材料，其磁導率為 μ 。內含一半徑為 a 的圓形空穴，空氣中的磁導率為 μ_0 。並且受到一沿水平方向的均勻磁感應強度 $\mathbf{B} = B_0 \mathbf{e}_x$ 作用。



圖二 圓形空穴受均勻強磁感作用下之示意圖

視空穴為內域部份，軟磁材料為外域部分，則內域的部分滿足 $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ ，外域的部分滿足 $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ ，其中 \mathbf{H} 為磁場強度。透過求解過程可將外域部份之磁場強度寫成：

$$\mathbf{H}^+ = -\nabla \phi = \left(\frac{B_0}{\mu} \cos \theta \right) \mathbf{e}_r - \left(\frac{B_0}{\mu} \sin \theta \right) \mathbf{e}_\theta - \left[\sum_{m=1}^{\infty} (-m) \frac{c_m \cos m\theta}{r^m} \right] \mathbf{e}_r - \frac{1}{r} \left[\sum_{m=1}^{\infty} (-m) \frac{c_m \sin m\theta}{r^m} \right] \mathbf{e}_\theta \quad (1)$$

內域部份之磁場強度可寫成：

$$\mathbf{H}^- = -\nabla \phi_0 = - \left[\sum_{m=1}^{\infty} m r^{m-1} a_m \cos m\theta \right] \mathbf{e}_r - \frac{1}{r} \left[\sum_{m=1}^{\infty} r^m (-m) a_m \sin m\theta \right] \mathbf{e}_\theta \quad (2)$$

$$\text{其中} \quad \nabla = \frac{\partial}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta \quad (3)$$

$$\text{代入邊界條件} \quad H_\theta^+ \Big|_{r=a} = H_\theta^- \Big|_{r=a} \quad ; \quad B_r^+ \Big|_{r=a} = B_r^- \Big|_{r=a} \quad (4)\sim(5)$$

可分別獲得外域以及內域之磁場強度，

$$\mathbf{H}^+ = \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \frac{\mu - \mu_0}{\mu + \mu_0} \right) \frac{B_0}{\mu} \cos \theta \mathbf{e}_r - \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \frac{\mu - \mu_0}{\mu + \mu_0} \right) \frac{B_0}{\mu} \sin \theta \mathbf{e}_\theta \quad (6)$$

$$\mathbf{H}^- = \left(\frac{2}{\mu + \mu_0} \right) B_0 \cos \theta \mathbf{e}_r - \left(\frac{2}{\mu + \mu_0} \right) B_0 \sin \theta \mathbf{e}_\theta \quad (7)$$

以及磁感應強度，

$$\mathbf{B}^+ = \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \frac{\mu - \mu_0}{\mu + \mu_0} \right) B_0 \cos \theta \mathbf{e}_r - \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \frac{\mu - \mu_0}{\mu + \mu_0} \right) B_0 \sin \theta \mathbf{e}_\theta \quad (8)$$

$$\mathbf{B}^- = \left(\frac{2\mu_0}{\mu + \mu_0} \right) B_0 \cos \theta \mathbf{e}_r - \left(\frac{2\mu_0}{\mu + \mu_0} \right) B_0 \sin \theta \mathbf{e}_\theta \quad (9)$$

假設存在一向量勢能 \mathbf{A} ，使得 $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ ，在二維的情況下可設定 $\mathbf{A} = A_z(x, y) \mathbf{e}_z$ ，且 $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ ，則，

$$B_x^+ = \frac{\partial}{\partial y} A_z^+ \quad ; \quad B_y^+ = \frac{\partial}{\partial x} A_z^+ \quad (10)\sim(11)$$

將極座標型式轉為卡式座標之後，可得到等磁感強度線為：

$$\frac{A_z^+}{aB_0} = \frac{y}{a} \frac{\mu - \mu_0}{\mu + \mu_0} \frac{1}{\left(\frac{x}{a} \right)^2 + \left(\frac{y}{a} \right)^2} \left(\frac{y}{a} \right) = C = \text{constant} \quad (12)$$

同理可得，

$$\frac{A_z^-}{aB_0} = \frac{2\mu_0}{\mu + \mu_0} \left(\frac{y}{a} \right) = C = \text{constant} \quad (13)$$

假設 $\mu = 9\mu_0$ ，依照前述推導可將等磁感應強度線繪出，如圖一所示。其中網格區域視為不均質的部分，其餘部分以均質材料視之。

$$\text{又 ponderomotive force } \mathbf{f}^{em} \text{ 為 } f_i^{em} = (\nabla \mathbf{B}) \cdot \mathbf{M} = B_{j,i} M_j \quad (14)$$

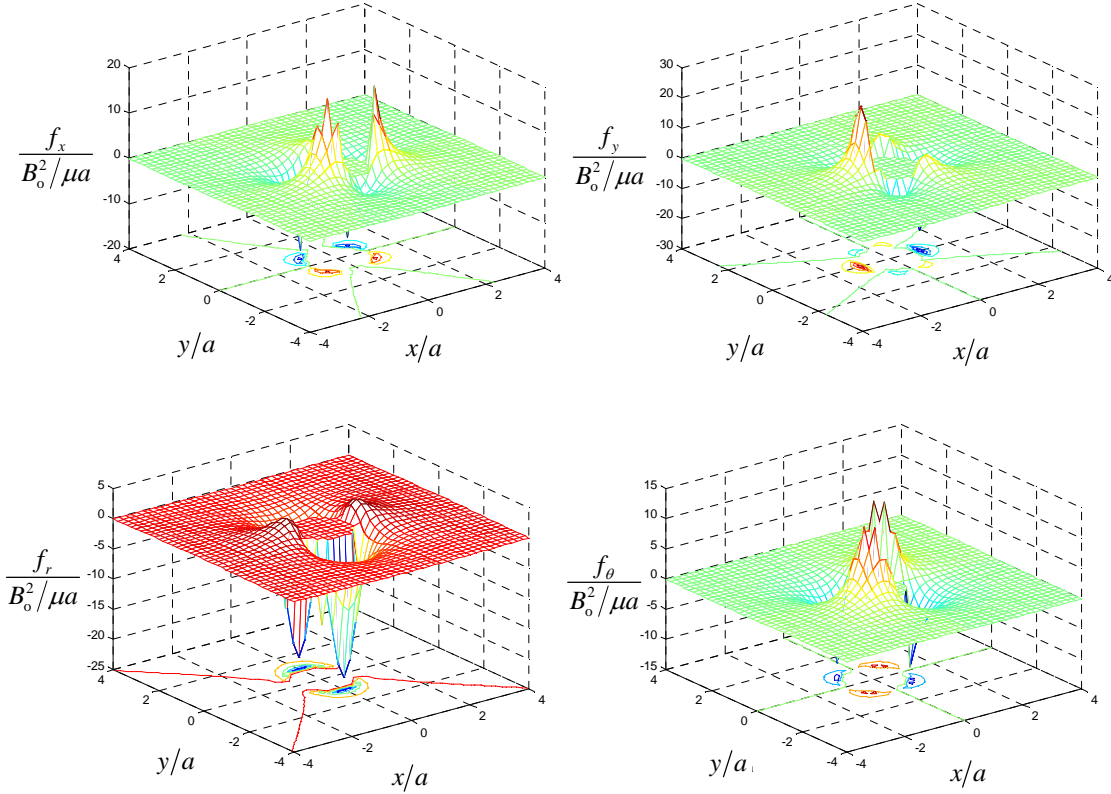
$$\text{Maxwell 應力為} \quad t_{ji}^{em} = B_j H_i - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\mu_0} B^2 - 2\mathbf{B} \cdot \mathbf{M} \right) \delta_{ji} \quad (15)$$

可得：

$$\begin{aligned}
 f_x^{em} &= \frac{\partial B_x}{\partial x} M_x + \frac{\partial B_y}{\partial x} M_y \\
 &= -\left(\frac{B_o^2}{\mu a}\right) \left(\frac{\mu - \mu_o}{\mu_o}\right) \left(\frac{\mu - \mu_o}{\mu + \mu_o}\right)^2 \frac{a^5 (2x)}{(x^2 + y^2)^3} \left[1 + \left(\frac{\mu + \mu_o}{\mu - \mu_o}\right) \frac{(x^2 + y^2) - 2(x^2 - y^2)}{a^2} \right]
 \end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned}
 f_y^{em} &= \frac{\partial B_x}{\partial y} M_x + \frac{\partial B_y}{\partial y} M_y \\
 &= -\left(\frac{B_o^2}{\mu a}\right) \left(\frac{\mu - \mu_o}{\mu_o}\right) \left(\frac{\mu - \mu_o}{\mu + \mu_o}\right)^2 \frac{a^5 (2y)}{(x^2 + y^2)^3} \left[1 - \left(\frac{\mu + \mu_o}{\mu - \mu_o}\right) \frac{(x^2 + y^2) + 2(x^2 - y^2)}{a^2} \right]
 \end{aligned} \tag{17}$$

再透過極座標的轉換，可以得到 f_r^{em} 以及 f_θ^{em} ，如圖三所示。



圖三 受均勻磁感應作用下之 Ponderomotive force 作用圖

同理可得 Maxwell 應力如下

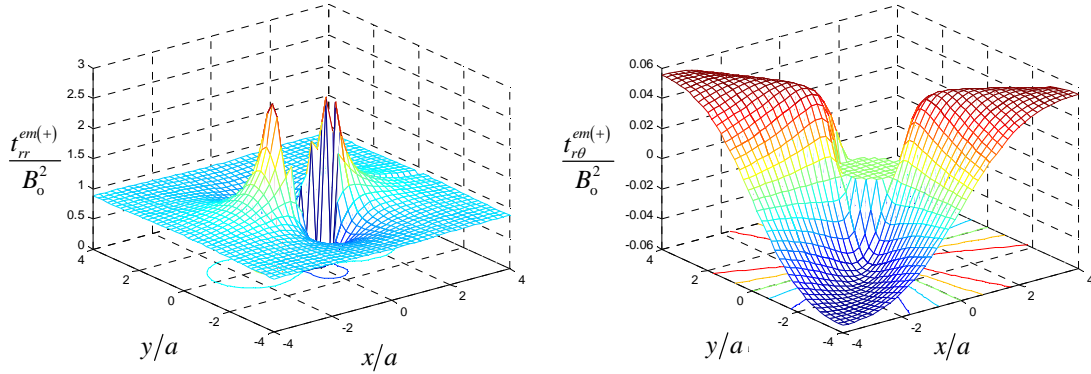
$$\text{外域部份} \quad t_{rr}^{em(+)} = B_r^+ H_r^+ - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\mu_o} (B_r^+ B_r^+ + B_\theta^+ B_\theta^+) - 2(B_r^+ M_r^+ + B_\theta^+ M_\theta^+) \right] \tag{18}$$

$$t_{r\theta}^{em(+)} = B_r^+ H_\theta^+ \quad ; \quad t_{\theta r}^{em(+)} = B_\theta^+ H_r^+ \tag{19} \sim (20)$$

$$\text{內域部份} \quad t_{rr}^{em(-)} = \mu_o H_r^- H_r^- - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\mu_o} (\mu_o^2 H_r^- H_r^- + \mu_o^2 H_\theta^- H_\theta^-) \right] \tag{21}$$

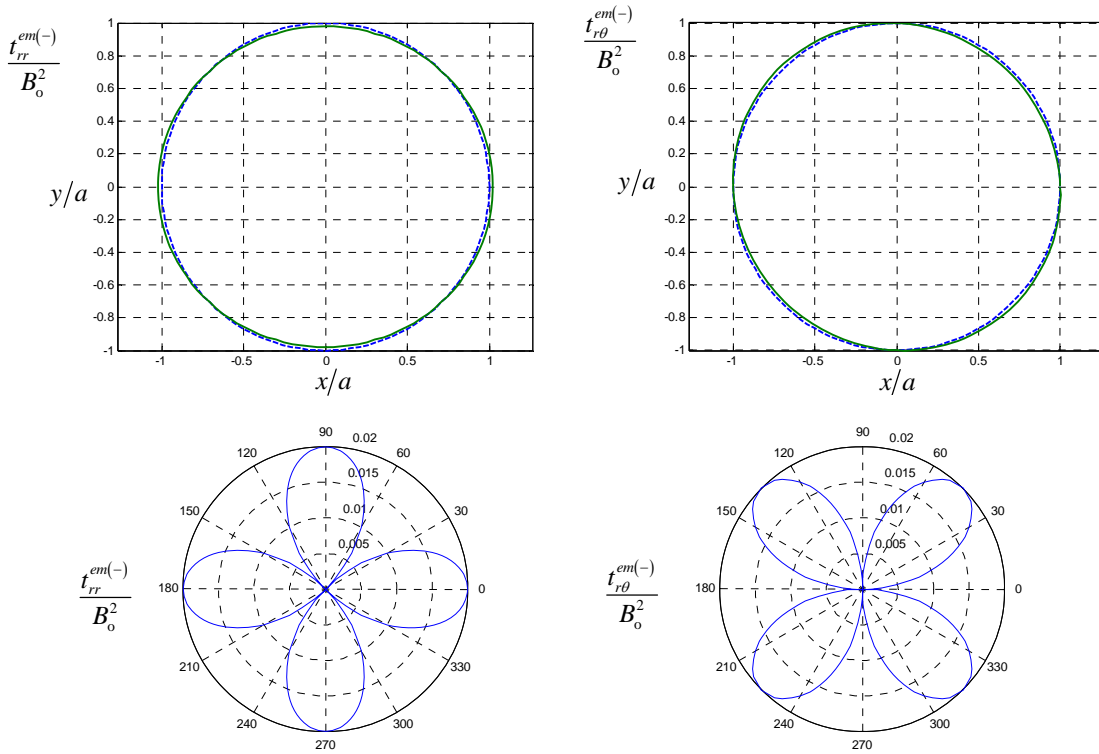
$$t_{r\theta}^{em(-)} = t_{\theta r}^{em(-)} = \mu_0 H_r^- H_\theta^+ \quad (22)$$

$t_{rr}^{em(+)}$ 以及 $t_{r\theta}^{em(+)}$ 圖形如圖四所示。



圖四 受均勻磁感應作用下之 Maxwell 應力作用圖

圓形空穴附近之 Maxwell 應力圖如圖五所示。



圖五 圓形空穴附近之 Maxwell 應力作用圖

(二) 電磁彈材料大變形變分原理：

針對系統進行體積分可獲得 Lagrangian L ，可表示為 $L = \int_V \mathcal{L} dV$ ，其中 \mathcal{L} 為 Lagrangian 密度。變分法由漢米頓原理(Hamilton's principle)開始，表示為

$$\delta \int_{\Delta t} \mathcal{L} dt = 0 \quad (23)$$

以下針對整個空間進行構建 Lagrangian 的工作，則 Lagrangian 密度包含真空部分以及物質部分，物質部分又包含動能 Lagrangian 密度 \mathcal{L}_K 、電磁場 Lagrangian 密度 \mathcal{L}_F 以及物質 Lagrangian 密度 \mathcal{L}_M ，則漢米頓原理可表示成

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \int_{V(t)} [\mathcal{L}_K + \mathcal{L}_F + \mathcal{L}_M] dVdt + \delta \int_{t_1}^{t_2} \int_{R_3-V(t)} \mathcal{L}_F dVdt = 0 \quad (24)$$

其中 R_3 表示整個空間， $V(t)$ 為物質在時刻 t 所佔據之體積，由第(30)式即可推導出控制方程式。定義

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_j^{\mathcal{C}} &= (\mathbf{E} + \mathbf{k} \times \mathbf{B})_i \frac{\partial x_i}{\partial X_j} ; \quad \mathcal{B}_j^{\mathcal{C}} = J_F \frac{\partial X_j}{\partial x_i} B_i ; \quad \mathcal{J}_k^{\mathcal{C}} = J_F \frac{\partial X_k}{\partial x_k} (J_k - \mathbf{k} \cdot \mathbf{q}_e) \\ \mathcal{Q}_e &= J_F q_e ; \quad \mathcal{P}_k^{\mathcal{C}} = J_F \frac{\partial X_k}{\partial x_j} P_j ; \quad \mathcal{M}_k^{\mathcal{C}} = \frac{\partial x_i}{\partial X_k} M_i^* \end{aligned} \quad (25) \sim (30)$$

上式加~者表示在物質座標下之物理量，而有*之量者表示有效量(effective quantities)，而且是伽利略不變(Galilean invariance)，為配合力學勢能，故將Maxwell方程式也改成伽利略變換，捨棄狹義相對論性不變的原則。(25)式至(30)式中，大寫下標表示材料座標體系(material coordinate system)，小寫下標則表示空間座標體系(space coordinate system)， \mathbf{E} 、 \mathbf{B} 、 \mathbf{P} 、 \mathbf{M} 、 \mathbf{J} 、 q_e 分別表示電場強度、磁感應強度、極化強度、磁化強度、電流以及電量， J_F 表示 Jacobian 行列式值， $(\mathcal{E}_k^{\mathcal{C}}, \mathcal{B}_k^{\mathcal{C}})$ 當狀態變量可知

$$\frac{\rho}{\rho_0} \delta U = \frac{\rho}{\rho_0} \left(\frac{\partial U}{\partial \mathcal{E}_{JK}^{\mathcal{C}}} \right) \delta \mathcal{E}_{JK}^{\mathcal{C}} + \frac{\rho}{\rho_0} \left(\frac{\partial U}{\partial \mathcal{E}_k^{\mathcal{C}}} \right) \delta \mathcal{E}_k^{\mathcal{C}} + \frac{\rho}{\rho_0} \left(\frac{\partial U}{\partial \mathcal{B}_k^{\mathcal{C}}} \right) \delta \mathcal{B}_k^{\mathcal{C}} \quad (31)$$

其中 $\mathcal{E}_{IJ}^{\mathcal{C}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial x_i}{\partial X_I} \frac{\partial x_j}{\partial X_J} - \delta_{IJ} \right)$ ，為格林應變張量(Green strain tensor)。

$$\text{或改寫成 } \frac{\rho}{\rho_0} \delta U = t_{ij} (\delta x_j)_{,i} - P_j \delta E_j^* - M_j^* \delta B_j \quad (31^*)$$

$$\text{其中 } t_{ij} \equiv \sigma_{ij} - P_i E_j^* + B_i M_j^* - B_k M_k^* \delta_{ij} \quad (32)$$

$$\sigma_{ij} \equiv -\frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial x_i}{\partial X_K} \frac{\partial U}{\partial \mathcal{E}_{JK}^{\mathcal{C}}} \frac{\partial x_j}{\partial X_K} ; \quad P_i \equiv -\frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial x_i}{\partial X_K} \frac{\partial U}{\partial \mathcal{E}_K^{\mathcal{C}}} \quad (33) \sim (34)$$

$$M_i^* \equiv -\frac{\partial X_K}{\partial x_i} \frac{\partial U}{\partial \mathcal{B}_K^{\mathcal{C}}} ; \quad \mathcal{E}_{ij}^{\mathcal{C}} \equiv J_F \frac{\partial X_j}{\partial x_i} \sigma_{ij} \frac{\partial X_k}{\partial x_j} = \frac{\partial U}{\partial \mathcal{E}_{JK}^{\mathcal{C}}} \quad (35) \sim (36)$$

$$\mathcal{P}_k^{\mathcal{C}} \equiv J_F \frac{\partial X_k}{\partial x_i} P_i = -\frac{\partial U}{\partial \mathcal{E}_k^{\mathcal{C}}} ; \quad \mathcal{M}_k^{\mathcal{C}} \equiv \frac{\partial x_i}{\partial X_k} M_i^* = -\frac{\partial U}{\partial \mathcal{B}_k^{\mathcal{C}}} \quad (37) \sim (38)$$

採用 $(\mathcal{E}_k^{\mathcal{C}}, \mathcal{B}_k^{\mathcal{C}})$ 當狀態變量時之變分原理，

$$\begin{aligned} & \delta \int_{t_1}^{t_2} \int_{V(t)} [\mathcal{L}_K + \mathcal{L}_F + \mathcal{L}_M] dVdt + \delta \int_{t_1}^{t_2} \int_{R_3-V(t)} \mathcal{L}_F dVdt \\ &= \delta \int_{t_1}^{t_2} \int_{V(t)} \left[\frac{1}{2} \rho v^2 + \frac{1}{2} \left(\epsilon_0 E^2 - \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) - \frac{\rho}{\rho_0} U(\mathcal{E}_{JK}^{\mathcal{C}}, \mathcal{E}_k^{\mathcal{C}}, \mathcal{B}_k^{\mathcal{C}}) \right] dVdt \\ &+ \delta \int_{t_1}^{t_2} \int_{R_3-V(t)} \left[\frac{1}{2} \left(\epsilon_0 E^2 - \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) \right] dVdt \quad (39) \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \int_{V(t)} \left[-\rho \bar{\mathbf{f}} \cdot \delta \mathbf{x} + \rho \delta \phi - \mathbf{J} \cdot \delta \mathbf{A} \right] dVdt \\ &+ \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Gamma(t)} \left[-t_k \delta x_k + \omega \delta \phi - \mathbf{k}_k \delta \mathbf{A}_k \right] da dt \end{aligned}$$

其中 $\mathcal{S}A_i = \frac{\partial X_K}{\partial x_i} \delta A_K$; $\mathcal{S}\phi = \delta\phi + v_i \mathcal{S}A_i$ (40)~(41)

$\bar{\mathbf{f}}$ 為微體力， \mathcal{H} 為總電量密度， \mathcal{J} 為總電流密度， \mathbf{t} 為表面曳引力， ω 為表面電量密度， \mathbf{K} 為表面傳導電流密度。經過整理之後，可得在物質與真空上之實質變分為：

$$\begin{aligned}
& \delta \int_{t_1}^{t_2} \int_{V(t)} [L_K + L_F + L_M] dV dt + \delta \int_{t_1}^{t_2} \int_{R_3-V(t)} L_F dV dt \\
& - \int_{t_1}^{t_2} \int_{V(t)} \left[-\rho \bar{f}_j \delta x_j + \mathcal{H} \mathcal{S}\phi - \mathcal{J}_i \cdot \mathcal{S}A_i \right] dV dt \\
& - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Gamma(t)} \left[-t_j \delta x_j + \omega \mathcal{S}\phi - \mathbf{K}_i \mathcal{S}A_i \right] dV dt \\
& = \int_{t_1}^{t_2} \int_{V_0} \left\{ \left(\frac{\partial \mathcal{D}_J^0}{\partial X_J} - \mathcal{H} \right) \delta\phi + \left[\frac{d}{dt} \mathcal{D}_K^0 - e_{KLM} \mathcal{H}_{M,L}^0 + \mathcal{J}_K^* \right] \delta A_K^0 \right. \\
& \quad + \left. \left\{ \mathcal{H}_j^0 + \left[\mathcal{D}_i^0 \mathcal{E}_j^0 + \mathcal{B}_i^0 \mathcal{H}_j^0 - \mathcal{B}_K^0 \mathcal{H}_K^0 \delta_{ij} \right] \frac{\partial X_J}{\partial x_i} \right\}_{,I} (\delta x_j) \right. \\
& \quad \left. + \left[\rho_0 \bar{f}_j - \rho_0 \frac{d\mathcal{X}_j}{dt} - \frac{d}{dt} \left(e_{JLM} \mathcal{D}_L^0 \mathcal{B}_M^0 \frac{\partial X_J}{\partial x_i} \right) \right] \right\} dV_0 dt \\
& + \int_{t_1}^{t_2} \int_{R_3-V_0} \left\{ \left(\frac{\partial \mathcal{D}_J^0}{\partial X_J} \right) \delta\phi + \left[\frac{d}{dt} \mathcal{D}_K^0 - e_{JLM} \mathcal{H}_{M,L}^{0a} \right] \delta A_K^0 \right. \\
& \quad \left. + \left[\mathcal{H}_{j,I}^0 - \frac{d}{dt} \left(e_{JLM} \mathcal{D}_L^0 \mathcal{B}_M^0 \frac{\partial X_J}{\partial x_j} \right) \right] (\delta x_j) \right\} dV_0 dt \\
& + \text{Boundary terms} \\
& = 0
\end{aligned} \tag{40}$$

假設無限域的情況下，邊界項趨近於 0，所以可得到真空中以及物質上的控制方程式如下：

真空中：

$$\mathcal{D}_{J,J}^0 = 0 \quad ; \quad \frac{d}{dt} \mathcal{D}_K^0 - e_{KLM} \mathcal{H}_{M,L}^{0a} = 0 \quad ; \quad \mathcal{H}_{j,I}^0 - \frac{d}{dt} \left(e_{JLM} \mathcal{D}_L^0 \mathcal{B}_M^0 \frac{\partial X_J}{\partial x_j} \right) = 0 \tag{41}~(43)$$

物質中：

$$\mathcal{D}_{J,J}^0 = \mathcal{H} \quad ; \quad \frac{d}{dt} \mathcal{D}_K^0 - e_{KLM} \mathcal{H}_{M,L}^0 + \mathcal{J}_K^* = 0 \quad ;$$

$$\begin{aligned}
& \left\{ \mathcal{H}_j^0 + \left[\mathcal{D}_i^0 \mathcal{E}_j^0 + \mathcal{B}_i^0 \mathcal{H}_j^0 - \mathcal{B}_K^0 \mathcal{H}_K^0 \delta_{ij} \right] \frac{\partial X_J}{\partial x_i} \right\}_{,I} \\
& + \rho_0 \bar{f}_j - \rho_0 \frac{d\mathcal{X}_j}{dt} - \frac{d}{dt} \left(e_{JLM} \mathcal{D}_L^0 \mathcal{B}_M^0 \frac{\partial X_J}{\partial x_i} \right) = 0
\end{aligned} \tag{44}~(46)$$

$$\text{其中} \quad \varepsilon_o E_i = D_i^a \quad ; \quad \overset{\circ}{D}_K^e = J_F \frac{\partial X_K}{\partial x_j} D_j^a \quad (47)\sim(48)$$

$$\frac{1}{\mu_o} B_k = H_k^a \quad ; \quad H_k^{a*} = H_k^a - (\mathbf{v} \times \mathbf{D}^a)_k \quad ; \quad H_J^{a*} = \frac{\partial x_k}{\partial X_J} H_k^{a*} \quad (49)\sim(51)$$

$$\overset{\circ}{F} \overset{\circ}{H}_J^e = \overset{\circ}{D}_I^e \overset{\circ}{E}_J^e + \overset{\circ}{B}_I^e \overset{\circ}{H}_J^{e^a} - \overset{\circ}{B}_K^e \overset{\circ}{H}_K^{e^a} \delta_{IJ} - \frac{1}{2} (\overset{\circ}{D}_K^e \overset{\circ}{E}_K^e - \overset{\circ}{B}_K^e \overset{\circ}{H}_K^{e^a}) \delta_{IJ} \quad (52)$$

$$\overset{\circ}{F} \overset{\circ}{H}_J^e = \overset{\circ}{F} \overset{\circ}{H}_J^e \frac{\partial X_J}{\partial x_j} \quad (53)$$

$$\overset{\circ}{D}_J^e = \overset{\circ}{D}_J^e + \overset{\circ}{B}_J^e = J_F \frac{\partial X_J}{\partial x_i} D_i \quad (54)$$

$$\overset{\circ}{H}_J^e = H_J^{a*} - \overset{\circ}{M}_J^e = \frac{\partial x_k}{\partial X_J} (\overset{\circ}{H}_k^{e^a} - M_k^*) \quad (55)$$

$$\overset{\circ}{\mathcal{H}} = J_F \overset{\circ}{\mathcal{H}} \quad (56)$$

$$\overset{\circ}{\mathcal{H}}_K^* = J_F \frac{\partial X_K}{\partial x_i} (\overset{\circ}{\mathcal{H}}_i^*) = J_F \frac{\partial X_K}{\partial x_i} (\overset{\circ}{\mathcal{H}}_i - \overset{\circ}{\mathcal{H}}_i^*) \quad (57)$$

四、結論

透過 Maxwell 方程式求解圓形空穴的磁感應分佈，可視為理論解。可觀察得在空穴附近的磁感應確實形成不均勻的分佈，同時可求得其微體力以及 Maxwell 應力分佈，由圖形上可知確實會有應力集中的現象。其次建立 Lagrangian，透過漢米頓原理可獲得無限域之下的材料座標之組成律，之後可依此建立增量變分原理，求得微擾場之解，則可獲得全解。

參考文獻

- [1] Brown, W. F., Jr., *Magnetoelastic Interactions*. Springer-Verlag. New York, 1966
- [2] Eringen AC., Maugin GA., *Electrodynamics of Continua*, Vol. 1, Spring-Verlag, 1989
- [3] Grot R. A., "Relativeistic Continuum Physics : Electromagnetic Interactions," *Continuum Physics*, Vol. III 1976, Edited by A. C. Eringrn, 130-221.
- [4] Lin, C. B. and Yeh, C. S. "The magnetoelastic problem of a crack in a soft ferromagnetic solid," *Int. J. of Solids and Structures*, 2002, 39, 1-17.
- [5] Moon, F. C. and Pao. Y. H. "Magnetoelastic bucking of a thin plate.," *J. of Applied Mechanics* 1968, 35, 53-58.
- [6] Nelson D. F., *Electric, Optic, and Acoustic Interactions in Dielectrics*, John Wiley & Sons, New York, 1979.
- [7] Pao. Y. H. and Hutter. K. "Electrodynamics for moving elastic solids and viscous fluids." *Proc. IEEE*. 1975, 63, 1011.
- [6] Pao. Y. H. and Yeh. C. S. " A linear theory for soft ferromagnetic solids." *Int. J. Engng Sci.* 1973, 11, 415.
- [7] Pao. Y. H. "Electromagnetic forces in deformable continua." *Mechanics Today*, Printed in Great Britain by Pit man, Bath, 1978
- [8] Shindo, Y., "The linear magnetoelastic problem for a soft ferromagnetic elastic

- solid with a finite crack,” *ASME J. of Applied Mechanics*, 1977, 44, 47-51.
- [9]Tiersten, H. F. “Variational principle for saturated magnetoelastic insulators,” *J. of Mathematical Physics*, 1965, 5, 779-787.
- [10]Yeh. C. S., “Magnetic fields generated by a mechanical singularity in a magnetized elastic half plane,” *ASME J. of Applied Mechanics*, 1989, 56, 89-95.
- [11]Yeh C. S., “A linear theory and related reciprocal theorem for soft ferromagnetic predeformed elastic solids,” *The Chinese Journal of Mechanics*, **5**(2), 1989.