《國立臺灣大學哲學論評》第五十一期（民國一〇五年三月），35-70

DOI: 10.6276/NTUPR.2016.03.(51).02

自然演繹法系統之比較

鄧敦民*

摘　要

自然演繹法（natural deduction）是大多數基礎邏輯課程中所教的證明系統，然而不同的教科書所採用的自然演繹法系統不盡相同，造成了教學與學習上的困擾。特別是在量詞推論規則上，我們有兩套完全不同的系統。其中一個系統（本文稱之為「Gentzen 系統」）使用了一條看起來較為複雜的「存在個例化規則」（existential instantiation），而另一個系統（本文稱之為「Copi-Kahane 系統」），則是用了一條看起來較為簡單的存在個例化規則。雖然目前大部分中文邏輯教科書都採用了「Copi-Kahane 系統」的規則，然而也有少數中英文基礎邏輯或中階邏輯教科書是採用「Gentzen 系統」。這造成了教學上的一些問題，例如它也許會造成基礎邏輯與中階邏輯課程銜接上的一些難度。在本文中，我將從邏輯教學的觀點來比較「Gentzen 系統」與「Copi-Kahane 系統」的優劣，並對於我們應該採用哪一個系統來教學提出我的建議。

關鍵詢：自然演繹法、存在個例化規則、全稱通則化規則、妥當性、邏輯教學

---

* 鄧敦民，臺灣大學哲學系助理教授。
投稿：105 年 01 月 07 日；修訂：105 年 02 月 16 日；接受刊登：105 年 3 月 10 日。

A Critical Comparison of Natural Deduction Systems

Duen-Min Deng*

Abstract

Natural deduction is the logical system most commonly used in teaching elementary logic. However, different textbooks may adopt different versions of the natural deduction system, which can be quite annoying to many teachers and students of logic. More precisely, with regard to the inference rules for quantifiers, there are two completely different systems of natural deduction. One system (which I shall call the "Gentzen system") has a rule of "existential instantiation" that looks pretty complicated, whilst the other system (which I shall call the "Copi-Kahane system") has a much simpler rule for existential instantiation. Although most of the Chinese textbooks for elementary logic use the rules of the Copi-Kahane system, there are still some textbooks for elementary logic or intermediate logic which use the Gentzen system. This leads to some problems especially in teaching logic, as students may find it somehow difficult to learn intermediate logic (which usually use the Gentzen system) if what they learn in elementary logic is the Copi-Kahane system. In this paper, I shall critically compare the Gentzen

* Assistant Professor, Department of Philosophy, National Taiwan University.

system with the Copi-Kahane system to judge which one is better for teaching elementary logic.

Keywords: natural deduction, existential instantiation, universal generalization, soundness, teaching logic

自然演繹法系統之比較

鄧敦民

壹、前言

「自然演繹法」(natural deduction)是大多數基礎邏輯教科書採用的證明系統。然而自然演繹法在不同的教科書中，無論是證明的寫法，推論規則的選擇，或是量詞推論規則的使用，都有些或大或小的差異。雖然這看起來像是可以提供教學者與學生「多元」的選擇空間，但也造成了實際上的困擾。特別是對於初學者而言，要能理解不同教科書中自然演繹法系統的內涵，並不是件容易的事。對教學者而言，要選擇哪一套自然演繹法系統，才能有效地幫助學生理解基礎邏輯證明系統的內涵，更是個難題。

在這些差異當中，有的純粹是寫法上面的不同。我們大致上可以分出至少三大類不同的證明形態(proof styles)。在 Copi-style 的寫法中(圖一)，我們會把一個自然演繹法的證明寫成條列式，然後用箭頭的方式來呈現「子證明」(sub-proof)的結構。[1]在 Lemmon-style 的寫法中(圖二)，我們的證明也是寫成條列式，但我們會在每一行前面註明所用到的前

1 例如：Hausman et al.(2010)。中文教科書採用這種寫法的包括林照田、蔡承志(2004)，彭孟堯(2012)等。另外一種稍微不同的形態，也是十分流行的 Fitch-style 寫法，會把「子證明」結構用另一種方式來呈現，例如：Bergmann et al.(2008)。

提，以此來表達「子證明」結構。[2]而在 Gentzen-style 的寫法裡（圖三），我們則是用樹狀圖的方式來呈現「子證明」結構。[3]這類寫法上的差異造成的問題不大，因為我們很容易可以在不同的寫法當中互相轉換，例如把一個 Gentzen-style 的證明轉換成一個 Lemmon-style 的證明。[4]

1.	$(P\&Q)\supset R$	Assumption
2.	P	Ass. / CP
3.	Q	Ass. / CP
4.	$P\&Q$	2, 3, Conj
5.	R	1, 4, MP
6.	$Q\supset R$	3–5, CP
7.	$P\supset(Q\supset R)$	2–6, CP

圖一：Copi-style proofs

$\{1\}$	(1)	$(P\&Q)\supset R$	Assumption
$\{2\}$	(2)	P	Ass. / CP
$\{3\}$	(3)	Q	Ass. / CP
$\{2,3\}$	(4)	$P\&Q$	2, 3, Conj
$\{1,2,3\}$	(5)	R	1, 4, MP
$\{1,2\}$	(6)	$Q\supset R$	3–5, CP
$\{1\}$	(7)	$P\supset(Q\supset R)$	2–6, CP

圖二：Lemmon-style proofs

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{(P\&Q)\supset R \qquad \cfrac{[P]^2 \qquad [Q]^1}{P\&Q}\,(\&I)}{R}\,(\supset E)}{Q\supset R}\,(1)(\supset I)}{P\supset(Q\supset R)}\,(2)(\supset I)$$

圖三：Gentzen-style proofs

另外一種差異是命題邏輯推論規則上面的不同。有些教科書只接受「引入規則」（introduction rules）與「消去規則」（elimination rules），[5]有

2 例如：Suppes（1957）和 Lemmon（1965）等。中文教科書採用這種寫法的包括林正弘（2011）。
3 例如：van Dalen（2013）。
4 為了方便討論，本文底下將一律採用 Copi-style 的證明寫法。
5 有時也會允許加上一條「反復規則」（Reiteration）。採用這種作法的包括 van Dalen（2013），Bergmann et al.（2008）等，中文教科書包含陳波（2004）。

些教科書則接受更多的推論規則，包括所謂的「等值規則」（replacement rules）。[6]這類的差異造成的問題也不是太大，因為我們可以很容易用某本教科書既有的規則，去推導出其它教科書所選用的規則。因此我們不難看出它們之間是等價的，也不難把使用某一本教科書規則所建構的證明，合法地用另一本教科書的規則來證明出來。[7]

然而，在這些差異當中真正具有實質影響的，是在「述詞邏輯」（predicate logic）推論規則的選擇上面。[8]大致上而言，幾乎所有的教科書都會包括至少四條「量詞」（quantifiers）的推論規則：「全稱個例化」（UI）、「全稱通則化」（UG）、「存在個例化」（EI）和「存在通則化」（EG）規則。[9]這些規則大致上有著類似的功能，讓我們能夠在「量化語式」（quantified formulas）與「非量化語式」之間做出推論。例如，（UI）規則允許我們從一個全稱量化語式中，在某些限制下，把最外面的全稱量詞消去並代入某個「個例項」（instantial term），[10]而（UG）規則允許我們在某些限制滿足時，反過來把某個命題中的「個例項」代換成變元（variable）並加以通則化，而關於「存在量詞」的兩條規則，大致上也

[6] 例如：Hausman et al.（2010）。中文教科書包含林正弘（2011），林照田、蔡承志（2004），彭孟堯（2012）等。在臺灣的邏輯教學當中，傳統上會統稱這些推論規則為「十八條推論規則」，方便學生記憶。（見林正弘，2011：99；林照田、蔡承志，2004：86）有趣的是，這些教科書儘管在推論規則的選擇上面稍有出入，總量都會維持在「十八條」。例如：林正弘的書中不包含「建構兩難律」（Constructive Dilemma）這條規則，而林照田與彭孟堯的書中有包含這條規則，但這些書都把命題邏輯直接證法中的推論規則數量定為十八條。

[7] 為了方便討論，本文底下將一律包括「等值規則」來作為命題邏輯的推論規則（即採用所謂的十八條推論規則）。

[8] 因此本文將集中處理這方面的差異。關於其它大大小小的差異，讀者可以參考 Pelletier（2000）一文中的比較。

[9] 在比較傳統的 Gentzen 系統中（見底下的討論），這四條規則稱為「全稱消去」（$\forall$E）、「全稱引入」（$\forall$I）、「存在消去」（$\exists$E）和「存在引入」（$\exists$I）。為了方面討論，我將統一使用（UI）、（UG）、（EI）、（EG）這套稱呼。

[10] $(\forall x)\varphi(x) / \varphi(t)$，這裡我們稱 t 為「個例項」。反過來在（UG）中，$\varphi(t) / (\forall x)\varphi(x)$ 同樣地我們也稱 t 為「個例項」。這個詞取自 Fine（1985）。

是如此。然而，在細節上，這每一條規則都有著不同的代換方式與限制，而不同的教科書對於這些規則使用的方式與限制，也有著非常不一樣的規定。這裡有兩個差異點特別重要，分別是（1）在進行（UG）和（EI）時所使用的「個例項」，應該要使用「變元」（variables）還是「常元」（constants）？（2）在進行（EI）時，是否需要一個「子證明」（sub-proof）的結構？底下我針對這兩點進一步說明。

首先針對「個例項」（instantial terms）應該使用「變元」還是「常元」這個問題，不同的教科書有不同的見解。有些教科書主張使用「變元」來進行（UG）與（EI）。[11]這裡的想法是，在（UG）與（EI）中使用的「個例項」，代表的是某種具有「任意性」（arbitrariness）的東西，而使用「常元」會給人一種錯覺，以為所指涉到的是某個「特定」的東西，而不具有任意性。[12]但也有不少教科書主張使用「常元」作為所有量詞規則的「個例項」。[13]這裡的想法是，在（UG）與（EI）中使用「常元」作為「個例項」，這裡的「常元」並非是指稱特定東西的「專名」（proper names），而是為了證明所引進的「任意名」（arbitrary names）[14]或「歧義名」（ambiguous names）。[15]也有一些教科書採用混合的主張，在（UG）中使用「變元」而在（EI）中使用「常元」。[16]這裡看起來像是單純寫法上的差異，但其實背後反映出的歧見，會歸結於我們究竟要如何理解（EI）這條規則，也就是前面提到的第二個差異點。

---

11 例如：Quine（1950），Kahane（1982）等。中文教科書包括林照田、蔡承志（2004），彭孟堯（2012）等。

12 見彭孟堯（2012：259）有十分清楚的說明。

13 例如：Lemmon（1965），Bergmann et al.（2008）等。中文教科書包括林正弘（2011）採用這作法。

14 Lemmon（1965：107）。

15 Suppes（1957：81）。

16 例如：Suppes（1957），Hurley（2012）。中文教科書包括陳波（2004）採用此作法。

關於（EI）的使用方式和限制，傳統上有兩種不同的作法。其中一個，是 Gentzen 最早在發展自然演繹法時，所採用的作法。Gentzen 的（EI）規則最大的特色，就是使用了一個「子證明」的結構：從 $(\exists x)\varphi(x)$，我們可以先「假設」$\varphi(a)$，如果從這假設中可以推出「個例項」a 沒有出現的式子 ψ，我們就可以把假設釋放而得到 ψ（見圖四的例子）。然而，這規則看起來有點複雜，因此從 Quine（1950）開始就有不少邏輯學家嘗試提出比較簡單又「自然」的替代方案。經過二十多年不停地嘗試和修正，[17] 這種不需要「子證明」結構的（EI）規則逐漸被許多通行的教科書採用，例如 Kahane 的書。為了方便討論，本文把這兩種不同的作法，分別稱為「Gentzen 系統」[18]與「Copi-Kahane 系統」[19]（見圖四、圖五）。

1.	$(\exists x)(Fx \& Gx)$	Assumption
2.	$Fa \& Ga$	Ass. / EI
3.	Fa	2, Simp
4.	$(\exists x)Fx$	3, EG
5.	$(\exists x)Fx$	1, 2–5, EI

圖四：Gentzen 系統中（EI）的使用

1.	$(\exists x)(Fx \& Gx)$	Assumption
2.	$Fx \& Gx$	1, EI
3.	Fx	2, Simp
4.	$(\exists x)Fx$	3, EG

圖五：Copi-Kahane 系統中（EI）的使用

這裡的差異影響深遠。為了讓這條比較簡單的（EI）規則不會導出錯誤的結果，Copi-Kahane 系統必須在（EI）甚至是（UG）的使用上面加上許多很細緻的限制（restrictions）。這麼一來，雖然規則本身看似比較簡單，但代價是規則的限制複雜了很多。在下一節中，我會詳細地說

[17] 見 Annelis（1991）對這段發展歷史的介紹。

[18] 包括 Lemmon（1965），Bergmann et al.（2008）等。中文教科書包括林正弘（2011）採用此作法。

[19] 包括 Kahane（1982）等。中文教科書包括林照田、蔡承志（2004），彭孟堯（2012）等。

明並比較 Gentzen 系統與 Copi-Kahane 系統。我也會針對教學者該選擇哪一個系統提出我的建議，並在第參節與第肆節提供我的理由詳加論述。

貳、Gentzen 系統與 Copi-Kahane 系統

首先我們來看 Gentzen 系統的（UG）與（EI）。這兩條規則分別如下：[20]

$\varphi(a/x)$

$/ \ (\forall x)\varphi(x)$

限制: (a是一個常元)

1. a 不出現於 $(\forall x)\varphi(x)$ 中
2. a 不出現於尚未釋放的前提中

圖六：Gentzen 系統（UG）規則

$(\exists x)\varphi(x)$

→ $\varphi(a/x)$ 　Ass. / EI

⋮

ψ

ψ

限制: (a是一個常元)

1. a 不出現於 $(\exists x)\varphi(x)$ 中
2. a 不出現於 ψ 中
3. a 不出現於尚未釋放的前提中

圖七：Gentzen 系統（EI）規則

這裡的「個例項」a 使用的是「常元」而非「變元」，[21]在兩條規則當中的限制也十分類似。（UG）允許我們從某個關於 a 的式子 $\varphi(a)$，去推論出 $(\forall x)\varphi(x)$ 來。這裡背後的想法是，只要 a 沒有出現在任何尚未釋放的前提中，a 就可以被看成是具有某種的「任意性」，可以代表「任意」的東西；而如果我們可以推出「任意」的東西都滿足 φ，我們就可以推出

[20] 見林正弘（2011：250、327）。為了討論上的統一性，我把證明寫法的部分稍做修改。

[21] 理論上我們也可以有使用「變元」作為（UG）與（EI）「個例項」的 Gentzen 系統，或使用「常元」的 Copi-Kahane 系統（詳見上一節的說明）。但為了討論的方便，我將假設 Gentzen 系統的（UG）與（EI）「個例項」使用「常元」，而 Copi-Kahane 系統使用「變元」。

所有的東西都滿足 φ。另一方面，（EI）允許我們在知道「至少有一個東西滿足 φ」的情況下，如果我們把尚未給予解釋的「任意」一個 a 代入 φ 都可以推出 ψ，那麼我們就可以推得 ψ。這裡的想法是，只要 a 沒有出現在任何未釋放的前提中，那麼在代入 φ 之前，a 都可以被看成具有某種「任意性」，可以代表「任意」的東西；而這時如果我們有個「子證明」，可以讓我們在無論假設「任意」什麼東西代入 φ 的情況下都能推出 ψ 來，那麼我們就可以從「至少有一個東西滿足 φ」推得 ψ。（值得注意的是，這裡使用的「子證明」結構，可以有效地幫我們追蹤我們代入的「個例項」a，在什麼情況下保有它的「任意性」：在「子證明」外面，a 可代表「任意」的東西；而在「子證明」尚未釋放之前，a 則是代表某個我們「假設」的滿足 φ 的東西。）

接下來我們來看 Copi-Kahane 系統的（UG）與（EI）規則：[22]

$\varphi(u/x)$
/ $(\forall x)\varphi(x)$

限制: (u是一個變元)
1. u 不能自由地出現於 $(\forall x)\varphi(x)$ 中，且 u 對 x 在 $\varphi(x)$ 中代入自由
2. u 不能自由地出現於尚未釋放的前提中
3. u 不能自由地出現在先前使用 EI 的步驟中

圖八：Copi-Kahane 系統（UG）規則

$(\exists x)\varphi(x)$
/ $\varphi(u/x)$

限制: (u是一個變元)
1. u 不能自由地出現於 $(\exists x)\varphi(x)$ 中，且 u 對 x 在 $\varphi(x)$ 中代入自由
2. u 不能自由地出現在任何一個之前的步驟中

圖九：Copi-Kahane 系統（EI）規則

這裡 Copi-Kahane 系統的（UG）規則與 Gentzen 系統類似，只是在「個例項」的使用上選擇了「變元」而非「常元」，並有著不太一樣的限制。

---

22 見林照田、蔡承志（2004：201），以及彭孟堯（2012：380）。同樣的，我在寫法上略作修改以便統一討論。

但（EI）規則就和 Gentzen 系統十分不同，主要是在這裡我們不需要「子證明」結構，就可以在某些限制下直接從 $(\exists x)\varphi(x)$ 推出 $\varphi(u)$ 來。

在「個例項」的限制方面，Copi-Kahane 系統就顯得複雜許多。兩條規則的第 1 個限制基本上和 Gentzen 系統是一樣的，只是在這裡我們使用了「變元」作為「個例項」，因此也會需要「u 對 x 在 $\varphi(x)$ 中代入自由」（u is free for x in $\varphi(x)$）這樣的限制。然而，在 Gentzen 系統中，我們只限制了「個例項」沒有出現在未釋放的前提中，就可以保證它的「任意性」，並用它來做推論。這是因為在 Gentzen 系統中，要引入「個例項」除了從前提假設外（包含（EI）也是用假設的方式引入），惟一的方式就是透過（UI）規則引入。而從（UI）規則引入新的「個例項」，如果沒有在未釋放的前提出現過，就沒有任何限制要求它要滿足什麼條件，因此它可以代表任意的東西，可以保證它的「任意性」。但在 Copi-Kahane 系統中，除了從前提假設外，我們有兩種方式可以引入「個例項」：（UI）與（EI）。雖然從（UI）引進新的「個例項」可以保證其「任意性」（理由如前），但 Copi-Kahane 系統的（EI）規則不像 Gentzen 系統有「子證明」結構可以追縱「個例項」的「任意性」，因此我們無法確保由（EI）引入的「個例項」，在我們接下來的證明當中可以代表任意的東西。更精確而言，如果我們從 $(\exists x)\varphi(x)$ 透過（EI）引入 u 作為「個例項」而推出 $\varphi(u)$，我們所引入的，必須是「某個滿足 φ 的東西 u」，因此這裡的 u 在接下來的證明當中都不再具有任意性。所以，一方面我們要確保（UG）或（EI）所使用的「個例項」在使用的時候具有「任意性」，另一方面我們要避免（UG）或（EI）所使用的「個例項」，是在之前的步驟中被（EI）所引進的，以免它失去其「任意性」。其中一個比較簡單的作法，是直接要求（EI）的「個例項」是完全新的，沒有出現在之前的步驟中；然後要求（UG）的「個例項」不能是由（EI）所引入的。

但光是要求（UG）的「個例項」不能是由（EI）所引入的還不夠。因為我們會遇到以下的經典案例：[23]

1.	$(\forall x)(\exists y)Rxy$	Assumption
2.	$(\exists y)Rxy$	1, UI
3.	Rxy	2, EI
4.	$(\forall x)Rxy$	3, UG
5.	$(\exists y)(\forall x)Rxy$	4, EG

圖十：錯誤的證明

（圖十）證明的第 4 步想要從 Rxy 透過（UG）規則推出 $(\forall x)Rxy$。這裡的「個例項」x 雖然沒有自由地出現在前提中，也不是之前由（EI）規則所引入的，但它仍然不能代表任意的東西允許我們做通則化。主要的原因是它在第 3 步中自由地出現，而雖然第 3 步（EI）引入的「個例項」是 y，表示在接下來的證明中喪失了「任意性」的是 y，也就是說，y 不再是任意的而必須是滿足 Rxy 的東西，但正是因為 y 必須是滿足 Rxy 的東西，連帶地 x 所代表的東西也受到了限制。因此在 Copi-Kahane 系統中，我們必須要在（UG）的「個例項」使用上，加上第 3 條限制：（UG）使用的「個例項」不能在先前使用（EI）的步驟中是自由地出現。

從以上的討論中我們可以看出 Gentzen 系統與 Copi-Kahane 系統，在（EI）規則背後的想法究竟有什麼相同與不同。Gentzen 系統是要求我們在遇到一個存在語句 $(\exists x)\varphi(x)$ 時，先「假設」任意的 a 滿足 φ，然後在這樣的「假設」當中做推論。Copi-Kahane 系統則是允許我們從一個

[23] 我們可以用一個簡單的模型說明這個推論是無效的。假設我們的論域是所有自然數形成的集合，並假設 Rxy 的外延是 $\{\langle x, y\rangle \mid x < y\}$（即，所有第一個數小於第二個數的自然數有序對）。在這個模型中，顯然 $(\forall x)(\exists y)Rxy$ 為真（因為每個自然數都小於某一個自然數），但 $(\exists y)(\forall x)Rxy$ 為假（因為不存在一個自然數大於所有的自然數）。因此，從 $(\forall x)(\exists y)Rxy$ 推出 $(\exists y)(\forall x)Rxy$ 的推論必定為無效推論。

存在語句 $(\exists x)\varphi(x)$ 直接「引入」某個任意的 u 而推出 $\varphi(u)$。兩者在使用（EI）這條規則時，都會需要所使用的「個例項」具有任意性，但是兩個系統對此事的處理方式不同：Gentzen 系統把引入的「個例項」放進假設的前提當中，因此在尚未釋放的「子證明」中，它都因為出現在前提裡而很自然地不具有任意性，但在「子證明」的外面，只要此「個例項」沒有出現在其它未釋放的假設中，它都可以保有它的任意性。換言之，「子證明」結構可以有效地幫我們追蹤我們所需要的任意性。Copi-Kahane 系統因為刻意避開了「子證明」結構，所以只能在（EI）與（UG）的限制上面多加條件，來避免導出錯誤的結論。

然而，這使得我們不禁懷疑 Copi-Kahane 系統是否真的比較簡單。雖然它避開了（EI）的「子證明」結構，可以簡化論證的長度，但隨之而來的代價是對於（UG）與（EI）我們有了十分複雜的限制。在下一節中，我將指出，在兩個系統當中真正比較複雜的，其實會是 Copi-Kahane 系統。在第肆節中，我會提出另外一個 Copi-Kahane 系統的缺點，也就是關於「妥當性定理」（soundness theorem）的問題。因此，對於教學者或初學者應該選擇哪套系統，我的建議是 Gentzen 系統。

參、究竟誰比較複雜

在上一節中我們提到，Gentzen 系統因為（EI）規則使用了「子證明」結構，看起來會使得證明變得比較複雜。Quine（1950）正是基於這樣的理由，開始試圖發展不需要子證明結構的（EI）規則。[24]然而如果我們仔細比較兩個系統做出來的證明，不難發現大部分 Copi-Kahane 系統的

---

[24] 「Gentzen 的系統與這裡最主要的差別在於 EI；他有一個比較迂迴的規則，結果是使得許多證明變得較為複雜。」（Quine，1950：166）

證明都可以很容易轉換成 Gentzen 系統的證明，像是前面（圖四）與（圖五）那樣，把所需要的「子證明」結構直接加上去。然而，也有一些例子是 Copi-Kahane 系統可以很簡單證出來，但在 Gentzen 系統裡十分困難的。例如底下（圖十一）、（圖十二）兩個例子：

1.	$(\exists y)Fy$	Ass. / CP
2.	Fx	1, EI
3.	$(\exists y)Fy \supset Fx$	1–2, CP
4.	$(\exists x)[(\exists y)Fy \supset Fx]$	3, EG

圖十一：$\vdash (\exists x)[(\exists y)Fy \supset Fx]$

1.	$Fa \supset (\exists x)Gx$	Assumption
2.	Fa	Ass. / CP
3.	$(\exists x)Gx$	1, 2, MP
4.	Gx	3, EI
5.	$Fa \supset Gx$	2–4, CP
6.	$(\exists x)(Fa \supset Gx)$	5, EG

圖十二：$Fa \supset (\exists x)Gx \vdash (\exists x)(Fa \supset Gx)$

在這兩個例子當中，Copi-Kahane 系統的證明十分簡潔。但在 Gentzen 系統中我們卻無法建構類似的證明。例如，若我們要仿造（圖四）與（圖五）那種方式，我們會得到錯誤的證明（圖十三）、（圖十四）：

1.	$(\exists y)Fy$	Ass. / CP
2.	Fa	Ass. / EI
3.	$(\exists y)Fy \supset Fa$	1–2, CP
4.	$(\exists x)[(\exists y)Fy \supset Fx]$	3, EG
5.	$(\exists x)[(\exists y)Fy \supset Fx]$	1, 2–4, EI

圖十三：錯誤的推論

1.	$Fa \supset (\exists x)Gx$	Assumption
2.	Fa	Ass. / CP
3.	$(\exists x)Gx$	1, 2, MP
4.	Gb	Ass. / EI
5.	$Fa \supset Gb$	2–4, CP
6.	$(\exists x)(Fa \supset Gx)$	5, EG
7.	$(\exists x)(Fa \supset Gx)$	3, 4–6, EI

圖十四：錯誤的推論

這裡的問題在於，在（圖十一）、（圖十二）Copi-Kahane 證明中，我們在「子證明」裡面用了（EI）引入了某個「個例項」，而這「個例項」卻在

「子證明」關閉後被帶到「子證明」外面繼續使用。但在 Gentzen 系統中，因為（EI）本身也需要開啟「子證明」，這會使得（EI）的假設出現在第一個「子證明」裡面，但關閉的步驟出現在第一個「子證明」外面，而造成兩個「子證明」結構的重疊，因而出現錯誤。事實上，如果要用 Gentzen 系統來建構出 $\vdash (\exists x)[(\exists y)Fy \supset Fx]$ 與 $Fa \supset (\exists x)Gx \vdash (\exists x)(Fa \supset Gx)$ 的證明，我們必須要使用 RAA（間接證法）來建構較為複雜的證明，例如：

1.	$\sim(\exists x)[(\exists y)Fy \supset Fx]$	Ass. / RAA
2.	$(\forall x)\sim[(\exists y)Fy \supset Fx]$	1, QN
3.	$\sim[(\exists y)Fy \supset Fa]$	2, UI
4.	$\sim[\sim(\exists y)Fy \vee Fa]$	3, Impl
5.	$\sim\sim(\exists y)Fy \,\&\, \sim Fa$	4, DeM
6.	$\sim Fa$	5, Simp
7.	$(\forall y)\sim Fy$	6, UG
8.	$\sim(\exists y)Fy$	7, QN
9.	$\sim\sim(\exists y)Fy$	5, Simp
10.	$\sim(\exists y)Fy \,\&\, \sim\sim(\exists y)Fy$	8, 9, Conj
11.	$(\exists x)[(\exists y)Fy \supset Fx]$	1–10, RAA

圖十五：$\vdash (\exists x)[(\exists y)Fy \supset Fx]$

乍看之下，這裡的例子似乎驗證了 Quine 對 Gentzen 系統的批評：Gentzen 系統使得某些證明變得較為複雜。然而，我認為這不一定會構成 Gentzen 系統的缺點，因為我認為我們有很好的理由可以解釋為何在這兩個例子當中，Gentzen 系統「必須」採用比較複雜的證明。首先，我們可以注意到，$\vdash (\exists x)[(\exists y)Fy \supset Fx]$ 與 $Fa \supset (\exists x)Gx \vdash (\exists x)(Fa \supset Gx)$ 這兩個推論在「直覺邏輯」（intuitionistic logic）是不成立的。而如果我們在命題邏輯推論規則中只保留每個邏輯連詞的「引入」與「消去」規則，

然後再把 RAA 規則排除掉（也就是「否言消去」（negation elimination）規則），並加入 Gentzen 系統的四條量詞規則，那麼我們就可以得到直覺邏輯的自然演繹法系統。[25]因此，任何推論只要能在這個排除掉 RAA 的直覺邏輯系統中推出來，就會是直覺邏輯裡的有效推論；而因為這兩個例子在直覺邏輯裡不是有效推論，這表示我們在 Gentzen 系統中要推出它們來，就一定要用到 RAA。這解釋了為什麼 Gentzen 系統在這兩個例子上，必須要比較複雜。這點在 Copi-Kahane 系統，反而變得很不清楚。因為 Copi-Kahane 系統竟然可以不須用到 RAA 就「直接」證出 $\vdash(\exists x)[(\exists y)Fy\supset Fx]$ 或 $Fa\supset(\exists x)Gx \vdash (\exists x)(Fa\supset Gx)$，這反而會讓我們十分困惑。因此，這兩個例子在 Gentzen 系統中必須用 RAA 來證明，反而是 Gentzen 系統的優點，而不是缺點。

我們在前面提過，Copi-Kahane 系統為了「簡化」（EI）規則而取消了「子證明」結構，必須在（UG）與（EI）的互動上面加上限制，來避免類似（圖十）的錯誤。然而，這裡加上的限制是要求（UG）所使用的「個例項」不能自由地出現在任何之前的（EI）步驟中，這一點其實是非常不自然的。初學者往往對於這個限制感到十分難以理解，不清楚究竟「為什麼」要這樣限制。[26]就如同前面說過的，（UG）限制背後的基本想法，是要能夠保證其「個例項」具有完全的任意性，可以代表任意的東西。因此，如果我們的限制是要求（UG）的「個例項」不能是由（EI）引入的，那麼這便不難理解，因為（EI）引入的「個例項」在引入之後就喪失了任意性，所以不能再使用（UG）進行通則化。但我們的限制是

[25] 見 van Dalen（2013）有詳細的介紹。

[26] Fine（1985）曾經給過一個經典的說明。但他的說明需要一套不同於傳統 Tarski 語意學的「任意物件」語意學。Fine 的這套語意學過於複雜，有興趣的讀者可以自行參閱。

要求它連自由地「出現」在（EI）的步驟裡都不行，這就令人十分費解。究竟為什麼「出現」在（EI）的步驟裡就會使得它喪失任意性呢？

從某個角度來看，去限制（UG）的「個例項」不能自由地出現在（EI）的步驟中，確實可以有效地避免掉（圖十）中的錯誤推論。然而一般而言，並非所有違反這個限制的「個例項」都會喪失任意性。例如底下的推論（圖十六）：

1.	$(\forall x)(\exists y)Rxy$	Assumption
2.	$(\exists y)Rxy$	1, UI
3.	Rxy	2, EI
4.	$(\exists w)Rxw$	3, EG
5.	$(\forall u)(\exists w)Ruw$	4, UG

圖十六：違反（UG）限制

1.	$(\forall x)(\exists y)Rxy$	Assumption
2.	$(\exists y)Ray$	1, UI
3.	Rab	Ass. / EI
4.	$(\exists w)Raw$	3, EG
5.	$(\exists w)Raw$	2, 3–4, EI
6.	$(\forall u)(\exists w)Ruw$	5, UG

圖十七：$(\forall x)(\exists y)Rxy \vdash (\forall u)(\exists w)Ruw$

（圖十六）第 5 步（UG）的「個例項」x 在之前的步驟 3 中，是自由地出現在（EI）的步驟裡，因此它違反了（UG）的限制。但因為這裡的推論只是要把前提 $(\forall x)(\exists y)Rxy$ 中的量詞替換變元，我們的直覺是 x 在第 5 步的（UG）應該仍是可以代表任意的東西。然而 Copi-Kahane 系統的（UG）限制卻禁止了（圖十六）的推論，這是令人費解的。

對於這個例子，Gentzen 系統反而可以找到十分簡短的證明（圖十七）。從（圖十七）中（EI）的「子證明」結構可以很清楚看出來，這裡的「個例項」a 確實在第 3 步與第 4 步時不是任意的，這是因為它出現在尚未釋放的「假設」中。但在第 5 步，我們把「子證明」關閉了，所以雖然第 5 步與第 4 步的式子是一樣的，但 a 在第 4 步不具任意性，在第 5 步時卻重新獲得了任意性。Copi-Kahane 系統正因為沒有這樣的「子證明」結構來幫我們作出區分，我們只能直接禁止所有這類的推論。這樣的結

果就是，像是 $(\forall x)(\exists y)Rxy \vdash (\forall u)(\exists w)Ruw$ 這樣的例子，在 Copi-Kahane 系統中只能用比較複雜的方式，使用 RAA 來證明，如底下的（圖十八）。這使得 Copi-Kahane 系統反而變得比較複雜。

1.	$(\forall x)(\exists y)Rxy$	Assumption
2.	$\sim(\forall u)(\exists w)Ruw$	Ass. / RAA
3.	$(\exists u)\sim(\exists w)Ruw$	2, QN
4.	$\sim(\exists w)Rxw$	3, EI
5.	$(\exists y)Rxy$	1, UI
6.	$(\forall w)\sim Rxw$	4, QN
7.	Rxy	5, EI
8.	$\sim Rxy$	6, UI
9.	$Rxy\&\sim Rxy$	7, 8, Conj
10.	$(\forall u)(\exists w)Ruw$	2–9, RAA

圖十八：$(\forall x)(\exists y)Rxy \vdash (\forall u)(\exists w)Ruw$

在本節中我們看到了某些例子（如 $\vdash (\exists x)[(\exists y)Fy \supset Fx]$），是 Copi-Kahane 系統可以簡單證明，但 Gentzen 系統必須使用複雜的 RAA 才能證明的。但我們找到了很好的理由，因為這些例子是在直覺邏輯中的無效推論，因此 Gentzen 系統必須使用 RAA。而我們也看到某些例子（如 $(\forall x)(\exists y)Rxy \vdash (\forall u)(\exists w)Ruw$），是 Gentzen 系統可以簡單證明，但 Copi-Kahane 必須要使用複雜的 RAA 才能證明的。但我們找不到什麼比較好的解釋，可以說明為何這種替換變元的簡單推論，有什麼理由一定必須要用到 RAA。因此，我認為在仔細比較兩個系統後，反而是 Copi-Kahane 系統會比較複雜難懂。所以如果教學者要在兩個系統當中做出選擇，我認為會是 Gentzen 系統比較簡單。

肆、「妥當性定理」的問題

Copi-Kahane 系統有個著名的問題，就是在傳統的 Tarski 語意學下，Copi-Kahane 系統的「逐行妥當性」（line soundness）[27]有可能會不成立。也就是說，在這個系統的證明中，有可能出現某一行 φ_i，它的未釋放前提是 Γ_i，這時雖然此證明的每一步都符合規則的使用，但在傳統的語意詮釋下 $\Gamma_i \vDash \varphi_i$ 卻不成立。[28]

1.	$(\exists x)(Fx \,\&\, Gx)$	Assumption
2.	$Fa \,\&\, Ga$	Ass. / EI
3.	Fa	2, Simp
4.	$(\exists x)Fx$	3, EG
5.	$(\exists x)Fx$	1, 2–5, EI

圖四：Gentzen 系統中（EI）的使用

1.	$(\exists x)(Fx \,\&\, Gx)$	Assumption
2.	$Fx \,\&\, Gx$	1, EI
3.	Fx	2, Simp
4.	$(\exists x)Fx$	3, EG

圖五：Copi-Kahane 系統中（EI）的使用

例如前面的（圖五）。在這裡第 3 行是 Fx，而它所用到的前提是第 1 行的 $(\exists x)(Fx \,\&\, Gx)$，然而在傳統語意詮釋下，$(\exists x)(Fx \,\&\, Gx) \vDash Fx$ 是不成立的。相對而言，Gentzen 系統就不會遇到這問題。例如相應的 Gentzen 系統證明（圖四），這裡的第 3 行是 Fa，它所用到的前提是第 1 行的 $(\exists x)(Fx \,\&\, Gx)$ 與第 2 行的 $Fa \,\&\, Ga$，而這時 $(\exists x)(Fx \,\&\, Gx), Fa \,\&\, Ga \vDash Fa$ 確實是成立的。

[27] 在這裡我們區分「逐行妥當性」（line soundness）與「規則妥當性」（rule soundness），前者指的是一個自然演繹法證明的「每一行」都能從它所依賴的前提在語意上有效推出，而後者指的是一個自然演繹法的每條「規則」都是「真值守恆」（truth-preserving）的。此區分來自 Fine（1985：73）。

[28] 見 Anellis（1991：136）以及裡面提到的相關討論。

這個問題有個很簡單的方式可以避免，就是直接從「語意」下手，用比較素樸的方式來理解量化語句的真假值，而讓像 Fx 這種包含了自由變元的「開語式」（open formula），其真假值是「沒有定義」的。因為從某個角度來看，這些「開語式」只會出現在推論的中間步驟中，用來作為量詞推論的中介，因此讓它們的真假值「沒有定義」似乎是可以接受的。這麼一來，$(\exists x)(Fx \,\&\, Gx) \vDash Fx$ 在這種素樸的語意下也是沒有定義的。因此，雖然嚴格說來，在這種詮釋下「逐行妥當性」仍然不是完全成立的（因為會有「沒有定義」的情況），但只要是「有定義」的部份（例如（圖五）的第 1 行與第 4 行），它們的妥當性都還是會成立的。[29]

然而，雖然這方法可以讓「逐行妥當性」在有定義的部分都成立，但這種解決問題的方式卻會帶來一個極高的代價，就是它會使得「妥當性定理」的證明變得非常困難。這是因為我們通常證明「妥當性定理」時，是透過對於每一行的「逐行妥當性」使用「數學歸納法」（mathematical induction）。也就是說，假設在我們證明的推論中第 i 行是 φ_i，它的未釋放前提是 Γ_i，那麼我們通常是使用數學歸納法來證明 $\Gamma_i \vDash \varphi_i$ 會對所有的 i 成立。更仔細來說，我們會先證明 $\Gamma_1 \vDash \varphi_1$ 成立，然後證明在假設 $\Gamma_k \vDash \varphi_k$ 成立的情況下我們可以推得 $\Gamma_{k+1} \vDash \varphi_{k+1}$，因此得到 $\Gamma_i \vDash \varphi_i$ 會對所有的 i 成立。[30]現在如果在推論中有某些的 k 是連 φ_k 的真假值都沒有定義，那麼我們幾乎沒有任何方法可以去證明在後面步驟中的 $\Gamma_n \vDash \varphi_n$，即使 $\Gamma_n \vDash \varphi_n$

---

[29] 許多基礎邏輯教科書確實是採取比較素樸的方式來談量化語句的語意學，因此避開了這問題。另外一種類似的作法，也是讓 $(\exists x)(Fx \,\&\, Gx) \vDash Fx$ 這類的宣稱變成沒有定義，是主張在自然演繹法（EI）步驟中使用的「個例項」既非專名（names）也非變元（variables），而是自成一類的「歧義名」（Suppes，1957：81）或「類變元」（quasivariables）（Hausman et al.，2010：203），並拒絕給予這類的「歧義名」或「類變元」任何方式去詮釋它們的語意值。因此我們可以類似地避開問題，因為 $(\exists x)(Fx \,\&\, Gx) \vDash Fx$ 變成了沒有定義。

[30] 見 Bergmann et al.（2008）或 van Dalen（2013）中皆有詳細的證明。

確實有定義也成立。因此，這種訴諸「沒有定義」的方式會使得「妥當性定理」的證明變得極為困難，代價過高。

另一種也是從「語意」下手的解法，是乾脆放棄傳統的 Tarski 語意學，去尋找別的語意詮釋來使得「逐行妥當性」成立。例如，Fine（1985）在他經典的研究中曾建議使用一套「任意物件」（arbitrary objects）的語意學，來詮釋這些在（UG）或（EI）中使用的「個例項」。詮釋的方法是在傳統 Tarski 語意學的模型中，除了論域中的個體（individuals）外，另外加上一些「任意物件」作為這些「個例項」的語意值，並在這些「任意物件」之間引進某種「依賴」（dependence）關係來幫助我們掌握任意物件的「任意性」。這麼一來，不僅在我們推論中每一個步驟出現的語式都可以定義其真值假，「逐行妥當性」也可以在這套「任意物件」的語意詮釋下成立。然而，Fine 的這套「任意物件」語意學本身過於複雜，且此解法等於直接放棄傳統 Tarski 語意學來理解自然演繹法的妥當性，從基礎邏輯教學的角度來看，不易使學生理解，也難以銜接中階邏輯課程對傳統語意學的介紹。因此，這種解法也無法替 Copi-Kahane 系統加分。

也許對 Copi-Kahane 系統而言，更好的作法是保留傳統語意學但直接放棄「逐行妥當性」，然後試圖找尋其它的方式來證明「妥當性定理」。這時我們可以引入「已完成的推論」（finished deduction）的概念，[31]要求「妥當性」在「已完成的推論」上成立就可以了。也就是說，假設一個 Copi-Kahane 系統證明的第 i 行是 φ_i，它的未釋放前提是 Γ_i，這時 $\Gamma_i \vDash \varphi_i$ 不一定會對所有的 i 而言都會成立，但只要對某個 k 而言，$\varphi_1, ..., \varphi_k$ 可以構成一個「已完成的推論」，那麼 $\Gamma_k \vDash \varphi_k$ 就會成立。至於要如何判斷一個推論是否是「已完成」的，在使用變元作為「個例項」的 Copi-Kahane 系統中，我們有個很簡單的「語法」（syntactic）判準：若一個推論的最

[31] 此想法來自 Quine（1950：164）。

後一行是個「開語式」（open formula），則它是「未完成」的，而若它的最後一行是個「語句」（sentence），則它就是「已完成」的。例如在（圖五）的證明中，第 1 行到第 3 行並不算是個「已完成的推論」（因為第 3 行 Fx 是個「開語式」），因而 $\Gamma_3 \vDash \varphi_3$ 不成立並不影響我們對妥當性的要求。而在此例中，第 1 行到第 4 行構成了「已完成的推論」（因為第 4 行 $(\exists x)\ Fx$ 是個「語句」），而我們確實有 $\Gamma_4 \vDash \varphi_4$，滿足我們對妥當性的要求。

但我們要怎麼證明「已完成的推論」的妥當性呢？就如前面提到的，這時一般的歸納法證法是行不通的，原因是我們通常需要對逐行的妥當性進行歸納，而在此解法中「逐行妥當性」已經被我們放棄了。這時我們必須採用比較複雜的方式來證明已完成的推論之妥當性：（1）先用歸納法證明，若一個已完成的推論完全沒有使用到（EI）規則，那麼妥當性對它而言是成立的。（2）再用一個歸納法來證明妥當性對所有的「已完成推論」都成立，而在這證明當中，我們是針對（EI）使用的次數來做歸納：沒用到（EI）規則的「已完成推論」妥當性成立（根據 1）；而若用了 k 次（EI）規則的「已完成推論」妥當性成立，則我們可以證出用了 k+1 次（EI）規則的「已完成推論」妥當性也成立；因此所有「已完成推論」的妥當性都成立。（詳見附錄二中所給出的證明）。[32]

然而，這樣的證明顯得十分冗長而複雜，且不是那麼的自然。相對而言，Gentzen 系統的妥當性定理，不但容易證明，且非常自然。我們只需要用一個歸納法，就可以證明 Gentzen 系統的「逐行妥當性」會成立。（詳見附錄一中所給出的證明）。因此，從教學的角度來看，若要從

[32] 附錄二中關於 Copi-Kahane 系統妥當性定理的證明為筆者所提供。我沒有在文獻中找到有人證明過 Copi-Kahane 系統的妥當性，這似乎是因為大部份使用此系統的教科書都為基礎邏輯程度的書，而在基礎邏輯中妥當性定理通常是不會加以證明。這裡提供的證明和 Quine（1950）為他自己的自然演繹法妥當性定理的證明有些相似，但因為 Copi-Kahane 系統與 Quine 的系統仍有十分巨大的差異，這裡的證明與 Quine 的證明仍有很大的不同。

Gentzen 系統與 Copi-Kahane 系統當中選一個來解釋妥當性定理，Gentzen 系統會是比較好的選擇。當然，在基礎邏輯的階段未必需要介紹妥當性定理，這也是為什麼許多教科書可以放心地採用 Copi-Kahane 系統。但就算是在基礎邏輯階段，如果我們考量的是讓學生在學完基礎邏輯後，可以容易銜接上更進階的邏輯課程，那麼「妥當性定理」就會是一個需要考量的要點之一，而 Copi-Kahane 系統在妥當性定理證明上面的複雜性，便將成為選擇上的劣勢。因此，從這個角度來看，若教學者要從 Gentzen 系統與 Copi-Kahane 系統中選擇一個來介紹，我認為是 Gentzen 系統比較好。

總結一下本節的討論。Copi-Kahane 系統有個嚴重的問題，就是「妥當性」不一定會成立，至少不一定會「逐行」成立。要解決這個問題，我們有三種作法：（1）採用素樸的語意詮釋，使得「妥當性」在「有定義」的部分成立就好；（2）放棄傳統語意學，採用「任意物件」語意學來使得「逐行妥當性」成立；或（3）引入「已完成的推論」的概念，要求「妥當性」對於已完成的推論成立就好。然而無論哪一種作法，都會使得「妥當性」的證明變得十分複雜而困難，因此，我認為教學者有好的理由選擇 Gentzen 系統而非 Copi-Kahane 系統，以方便學生理解自然演繹法的妥當性。

伍、結語

本文比較了不同的自然演繹法系統，並從基礎邏輯教學的角度，針對我們應該選擇哪個系統，提出建議。在這些不同的系統當中，最主要的差異點在於「存在個例化」（EI）規則的選擇上面：Gentzen 系統採用了需要「子證明」結構的（EI）規則，而 Copi-Kahane 系統則採用了不

需「子證明」結構的（EI）規則。在本文中，我提出兩個理由，來說明為何我認為教學者應該要選擇 Gentzen 系統來介紹自然演繹法。第一、Copi-Kahane 系統的（EI）規則沒有「子證明」結構來幫我們追蹤「個例項」的「任意性」，因此會需要在（UG）的使用上加上比較複雜的限制，這使得 Copi-Kahane 系統反而變得比較複雜，較難理解。第二、Copi-Kahane 系統的「妥當性」不一定會逐行成立，而就它成立的部分要證明妥當性也是十分複雜而困難。相較而言，Gentzen 系統因為（EI）規則的「子證明」結構，不但比較容易理解，其妥當性也比較容易證明。因此，我推薦基礎邏輯教學者選用 Gentzen 系統。

參考文獻

林正弘（2011）。《邏輯》，重印三版七刷。臺北：三民。

林照田、蔡承志（2004）。《邏輯學入門》。臺北：雙葉書廊。

陳波（2004）。《邏輯學》。臺北：五南出版社。

彭孟堯（2012）。《基礎邏輯》，第二版。臺北：學富文化。

Anellis, Irving H. (1991). “Forty Years of ‘Unnatural’ Natural Deduction and Quantification: A History of First-order Systems of Natural Deduction, From Gentzen to Copi.” *Modern Logic*, 2: 113-152.

Bergmann, M., Moor, J., and Nelson, J. (2008). *The Logic Book*, 5th ed. McGraw-Hill.

Fine, Kit (1985). “Natural Deduction and Arbitrary Objects.” *Journal of Philosophical Logic*, 14(1): 57-107. doi: 10.1007/BF00542649

Hausman, A., Kahane, H., and Tidman, P. (2010). *Logic and Philosophy: A Modern Introduction*, 11th ed. Boston: Wadsworth.

Hurley, Patrick J. (2012). *A Concise Introduction to Logic*, 11th ed. Boston: Wadsworth.

Kahane, Howard (1982). *Logic and Philosophy: A Modern Introduction*, 4th ed. Belmont: Wadsworth.

Lemmon, E. J. (1965). *Beginning Logic*. London: Nelson.

Pelletier, Francis Jeffry (2000). “A History of Natural Deduction and Elementary Logic Textbooks.” In John Woods and Bryson Brown (eds.). *Logical Consequence: Rival Approaches, Vol. 1*, (105-138). Oxford: Hermes Science Publications.

Quine, W. V. O. (1950). *Methods of Logic*. New York: Holt.

Suppes, Patrick (1957). *Introduction to Logic*. New York: Van Nostrand Reinhold.

van Dalen, Dirk (2013). *Logic and Structure*. London: Springer-Verlag.

附錄：妥當性定理的證明

一、Gentzen 系統的妥當性

定理一：假設 $\varphi_1, ..., \varphi_k$ 是 Genzen 系統中的一個推論，其中第 i 行 φ_i 所用到未釋放的前提是 Γ_i。那麼 $\Gamma_k \vDash \varphi_k$ 成立。

證明：我們用數學歸納法證明對任何的 i $(1 \leq i \leq k)$，$\Gamma_i \vDash \varphi_i$ 都會成立。

當 i=1 時，Γ_1 就是 $\{\varphi_1\}$（因為第 1 行一定是個假設，所以 φ_1 用到的假設就是它自己）。因此 $\{\varphi_1\} \vDash \varphi_1$ 顯然成立。

假設：對於所有小於或等於 j 的 i 而言，$\Gamma_i \vDash \varphi_i$ 都成立。宣稱：對於 j+1 而言，$\Gamma_{j+1} \vDash \varphi_{j+1}$ 也會成立。

要證明這個宣稱，我們可以區分不同的情況逐項討論。

情況 1：φ_{j+1} 是一個「假設」。這時 φ_{j+1} 的未釋放前提 Γ_{j+1} 包含了 φ_{j+1} 本身，也就是說 $\varphi_{j+1} \in \Gamma_{j+1}$，因此 $\Gamma_{j+1} \vDash \varphi_{j+1}$ 成立。

情況 2：φ_{j+1} 是透過（MP）推論規則得來。這表示會有某個 m 與 n，$1 \leq m \leq j$ 且 $1 \leq n \leq j$，使得 φ_{j+1} 是透過（MP）從 φ_m 與 φ_n 推來的，而其中 $\varphi_m = \varphi_n \supset \varphi_{j+1}$。根據歸納法假設，$\Gamma_m \vDash \varphi_m$ 且 $\Gamma_n \vDash \varphi_n$。但因為在第 j+1 步時，φ_m 與 φ_n 都是可以使用的語式，因此 $\Gamma_m \subseteq \Gamma_{j+1}$ 且 $\Gamma_n \subseteq \Gamma_{j+1}$。因此，$\Gamma_{j+1} \vDash \varphi_m$ 且 $\Gamma_{j+1} \vDash \varphi_n$。所以 $\Gamma_{j+1} \vDash \varphi_{j+1}$（因為 $\varphi_m = \varphi_n \supset \varphi_{j+1}$）。

情況 3：φ_{j+1} 是透過（MT）（Conj）（Simp）（DS）（HS）（Add）（CD）（DN）（DeM）（Comm）（Assoc）（Dist）（Contra）（Impl）（Equiv）（Exp）（Taut）等規則其中一條得來的。這時我們可以用類似情況 2 的方式，證明 $\Gamma_{j+1} \vDash \varphi_{j+1}$ 也會成立。

情況 4：φ_{j+1} 是透過「條件證法」（CP）得來。這表示會有某個 m $(1 \leq m \leq j)$，使得 φ_{j+1} 是從 φ_m 的假設推到 φ_j，然後用（CP）將 φ_m 的假設釋放得來，而 $\varphi_{j+1} = \varphi_m \supset \varphi_j$（見圖十九）。這時因為第 j 步可以用的假設除了在下一步被釋放的 φ_m 之外，都是第 j+1 步可以用的假設，因此我們有 $\Gamma_j \subseteq \Gamma_{j+1} \cup \{\varphi_m\}$。根據歸納法假設，$\Gamma_j \vDash \varphi_j$ 成立，因此 $\Gamma_{j+1} \cup \{\varphi_m\} \vDash \varphi_j$，因此 $\Gamma_{j+1} \vDash \varphi_m \supset \varphi_j$，也就是 $\Gamma_{j+1} \vDash \varphi_{j+1}$。

$$
\begin{array}{lll}
 & \vdots & \\
m. & \varphi_m & \text{Ass. / CP} \\
 & \vdots & \\
j. & \varphi_j & \cdots \\
\hline
j+1. & \varphi_m \supset \varphi_j & m\text{–}j, \text{CP}
\end{array}
$$

圖十九：（CP）的使用

情況 5：φ_{j+1} 是透過「反證法」（RAA）得來。這時我們可以用類似情況 4 的方式，證明 $\Gamma_{j+1} \vDash \varphi_{j+1}$ 也會成立。

情況 6：φ_{j+1} 是透過（UG）得來。這表示 φ_{j+1} 是形如 $(\forall x)\psi(x)$ 的語式，且是從之前某個第 m 步中的 $\psi(a)$ 透過（UG）得來（見圖二十）。

$$
\begin{array}{lll}
 & \vdots & \\
m. & \psi(a) & \cdots \\
 & \vdots & \\
j+1. & (\forall x)\psi(x) & m, \text{UG}
\end{array}
$$

圖二十：（UG）的使用

在這裡的「個例項」a 會滿足（UG）的限制（見圖六），也就是說，a 沒有出現在 $(\forall x)\psi(x)$ 中，也沒有出現在未釋放的前提（即 Γ_{j+1}）中。因為在第 j+1 步時，第 m 步的 $\psi(a)$ 是可以使用的語式，因此 $\Gamma_m \subseteq \Gamma_{j+1}$。根據歸納法假設，$\Gamma_m \vDash \varphi_m$，也就是說 $\Gamma_m \vDash \psi(a)$，因此我們可推得 $\Gamma_{j+1} \vDash \psi(a)$。因為「個例項」$a$ 沒有出現在 Γ_{j+1} 或 $(\forall x)\psi(x)$ 中，因此我們可以進一步推得 $\Gamma_{j+1} \vDash (\forall x)\psi(x)$。

（證明：在傳統 Tarski 語意下，我們要證明 $\Gamma_{j+1} \vDash (\forall x)\psi(x)$，也就是說，假設給定了任何的一個詮釋 I，以及 I 上面的 variable assignment σ，使得 σ 在 I 上面滿足 Γ_{j+1} 中的語式，我們要證明 σ 在 I 上面也會滿足 $(\forall x)\psi(x)$。也就是說，我們要證明，對於 I 論域中的任何東西 d，σ$[x/d]$ 在 I 上會滿足 $\psi(x)$。現在，對於 I 論域中的任何東西 d，我們都可以建構另一個詮釋 I^*，是與 I 完全相同但把 a 的語意值換成 d。因為 a 沒有出現在 Γ_{j+1} 或 $(\forall x)\psi(x)$ 中，我們很容易可以證明，$\Gamma_{j+1} \cup \{(\forall x)\psi(x)\}$ 中的語式在 I^* 與 I 上會有一樣的真假值。這表示 σ 在 I^*上面也會滿足 Γ_{j+1} 中的語式，因此從 $\Gamma_{j+1} \vDash \psi(a)$ 我們可推得 σ 在 I^*上面也會滿足 $\psi(a)$。因此，σ$[x/d]$ 在 I^*上會滿足 $\psi(x)$（因為 a 在 I^*中的語意值是 d），因此 σ$[x/d]$ 在 I 上也會滿足 $\psi(x)$。故得證。）

情況 7：φ_{j+1} 是透過（UI）或（EG）得來。這時我們可以用類似情況 6 的方式，證明 $\Gamma_{j+1} \vDash \varphi_{j+1}$ 也會成立。

情況 8：φ_{j+1} 是透過（EI）得來。這表示之前在某個第 m 步中出現了某個存在語句 $(\exists x)\psi(x)$，而在某個第 n 步時我們假設了 $\psi(a)$，然後在第 j 步時推出了 φ_{j+1}，並用（EI）把第 n 步的假設釋放（見圖二十一）。

$$
\begin{array}{lll}
 & \vdots & \\
m. & (\exists x)\psi(x) & \cdots \\
 & \vdots & \\
n. & \psi(a) & \text{Ass. / EI} \\
 & \vdots & \\
j. & \varphi_{j+1} & \cdots \\
\hline
j+1. & \varphi_{j+1} & m, n\text{–}j, \text{EI}
\end{array}
$$

圖二十一：(EI) 的使用

在這裡的「個例項」a 會滿足（EI）規則的限制（見圖七），也就是說，a 沒有出現在未釋放的前提（即 Γ_{j+1}）中，也沒有出現在 $(\exists x)\psi(x)$ 或 φ_{j+1} 中。同樣的，因為第 m 步是第 j+1 步可以用的語式，因此我們有 $\Gamma_m \subseteq \Gamma_{j+1}$。此外，因為第 j 步可以用的假設除了在下一步被釋放的 $\psi(a)$ 之外，都是第 j+1 步可以用的假設，因此我們有 $\Gamma_j \subseteq \Gamma_{j+1} \cup \{\psi(a)\}$。根據歸納法假設，$\Gamma_m \vDash \varphi_m$ 與 $\Gamma_j \vDash \varphi_j$ 成立，也就是 $\Gamma_m \vDash (\exists x)\psi(x)$ 且 $\Gamma_j \vDash \varphi_{j+1}$，因此我們可以推得 $\Gamma_{j+1} \vDash (\exists x)\psi(x)$ 與 $\Gamma_{j+1} \cup \{\psi(a)\} \vDash \varphi_{j+1}$。因此，$\Gamma_{j+1} \cup \{\sim\varphi_{j+1}\} \vDash \sim\psi(a)$。而因為 a 沒有出現在 Γ_{j+1} 中，也沒有出現在 $(\exists x)\psi(x)$ 或 φ_{j+1} 中，如同情況 6 中的證明，我們可以推得 $\Gamma_{j+1} \cup \{\sim\varphi_{j+1}\} \vDash (\forall x)\sim\psi(x)$。因此，$\Gamma_{j+1} \cup \{(\exists x)\psi(x)\} \vDash \varphi_{j+1}$，因此 $\Gamma_{j+1} \vDash (\exists x)\psi(x) \supset \varphi_{j+1}$。但因為 $\Gamma_{j+1} \vDash (\exists x)\psi(x)$ 成立，所以 $\Gamma_{j+1} \vDash \varphi_{j+1}$ 成立。

現在，我們已經窮盡所有的情況，因此我們證明了我們的宣稱 $\Gamma_{j+1} \vDash \varphi_{j+1}$ 在所有的情況下都成立。所以根據數學歸納法，對任何的 i $(1 \leq i \leq k)$，$\Gamma_i \vDash \varphi_i$ 都會成立。

二、Copi-Kahane 系統的妥當性

引理二：假設 $\varphi_1, ..., \varphi_k$ 是 Copi-Kahane 系統中的一個推論，其中第 i 行 φ_i 所用到未釋放的前提是 Γ_i。如果在這個推論中，沒有用到任何的（EI）規則，那麼 $\Gamma_k \vDash \varphi_k$ 成立。

證明：這裡的證明與 Gentzen 系統的妥當性證明類似（見定理一）：我們用數學歸納法證明對任何的 i $(1 \leq i \leq k)$，$\Gamma_i \vDash \varphi_i$ 都會成立。在證明的過程當中，情況 1 到情況 5 是和 Gentzen 系統一模一樣。在情況 6（UG）的部分，因為 Copi-Kahane 系統也會要求「個例項」不能出現在未釋放的前提或全稱語句 $(\forall x)\psi(x)$ 中，我們只要在 Gentzen 系統的情況 6 證明中，把「常元」改成「變元」，並做出其它必要的更改，就可以證出 Copi-Kahane 系統的（UG）情況。而情況 7 也是如此。此外，因為在這裡我們假設這推論中沒有用到任何的（EI）規則，因此情況 8 不會出現。

引理三：假設我們可以證明對於任何 Copi-Kahane 系統的推論 $D = \varphi_1, ..., \varphi_n$，只要 D 是個「已完成的推論」且在此推論中（EI）規則總共用了 k 次，則 $\Gamma_n \vDash \varphi_n$ 會成立。那麼，我們就可以證明，對於任何 Copi-Kahane 系統的推論 $D = \varphi_1, ..., \varphi_n$，只要 D 是個「已完成的推論」且在此推論中（EI）規則總共用了 k+1 次，則 $\Gamma_n \vDash \varphi_n$ 會成立。（這裡「已完成的推論」的定義是此推論的最後一行語式中，沒有出現任何的自由變元。）

證明：假設我們已經證明了對於任何 Copi-Kahane 系統的推論 $\varphi_1, ..., \varphi_n$，只要 $\varphi_1, ..., \varphi_n$ 是個「已完成的推論」且在此推論中（EI）規則總共用了 k 次，則 $\Gamma_n \vDash \varphi_n$ 會成立。

現在，給定任何 Copi-Kahane 系統的推論 $D = \varphi_1, ..., \varphi_n$，並假設 D 是個「已完成的推論」且在此推論中（EI）規則總共用了 k+1 次。我們現在要證明對這個推論 D 而言，$\Gamma_n \vDash \varphi_n$ 會成立。

因為在 D 中，（EI）規則總共用了 k+1 次，我們不妨假設（EI）規則第一次的使用是在第 j 步，從某個第 i 行的存在語句 $(\exists x)\psi(x)$ 中推出第 j 步的 $\psi(u)$ 來（見圖二十二）。

1.	φ_1	…
	⋮	
i.	$(\exists x)\psi(x)$	…
	⋮	
j.	$\psi(u)$	i, EI
	⋮	
n.	φ_n	…

圖二十二：推論 D

1.	φ_1	…
	⋮	
i.	$(\exists x)\psi(x)$	…
	⋮	
j^-.	$(\exists x)\psi(x) \supset \psi(u)$	Assumption
j.	$\psi(u)$	i, j^-, MP
	⋮	
n.	φ_n	…

圖二十三：推論 D*

現在，我們可以建構另外一個推論 D*，是和原本的推論 $D = \varphi_1, ..., \varphi_n$ 一樣，只是在第 j 步前多插入了一個語式 $(\exists x)\psi(x) \supset \psi(u)$ 在第 j^- 步作為假設，並且我們把第 j 步的推論理由，從（EI）改成（MP）。換句話說，$D^* = \varphi_1^*, ..., \varphi_{j\text{-}1}^*, \varphi_{j}\text{-}^*, \varphi_j^*, ..., \varphi_n^*$，其中對任何的 m 而言，$\varphi_m^* = \varphi_m$，而 $\varphi_j\text{-}^* = (\exists x)\psi(x) \supset \psi(u)$。因此，$D$* 總共有 n+1 個步驟，而且對於任何 $m \geq j$，$\Gamma_m^* \subseteq \Gamma_m \cup \{(\exists x)\psi(x) \supset \psi(u)\}$（見圖二十三）。

宣稱：D* 確實是 Copi-Kahane 系統中的合法推論，也就是說，D* 的每一步都會符合 Copi-Kahane 系統推論規則的規定。

要證明這個宣稱，我們只需證明 D^* 每一次（EI）或（UG）規則的使用都符合規則的限制就可以了。（這是因為 D^* 只是比 D 多加了第 j^- 步並把第 j 步的推論理由變更，而這樣的改變不會對任何（EI）與（UG）以外的規則造成影響。）

$\varphi(u/x)$

/ $(\forall x)\varphi(x)$

限制: (u是一個變元)

1. u 不能自由地出現於 $(\forall x)\varphi(x)$ 中，且 u 對 x 在 $\varphi(x)$ 中代入自由
2. u 不能自由地出現於尚未釋放的前提中
3. u 不能自由地出現在先前使用 EI 的步驟中

圖八：Copi-Kahane 系統（UG）規則

$(\exists x)\varphi(x)$

/ $\varphi(u/x)$

限制: (u是一個變元)

1. u 不能自由地出現於 $(\exists x)\varphi(x)$ 中，且 u 對 x 在 $\varphi(x)$ 中代入自由
2. u 不能自由地出現在任何一個之前的步驟中

圖九：Copi-Kahane 系統（EI）規則

先考慮（EI）規則，我們要證明 D^* 中任何（EI）規則的使用都會符合 Copi-Kahane 系統對（EI）規則的限制（見圖九）。因為原本的 D 推論已經是 Copi-Kahane 系統合法的證明，因此限制 1 顯然在 D^* 裡也會滿足。針對限制 2，我們不妨假設是在 D^* 中的第 m 步我們用了（EI）規則。然而，因為我們已經假設了原本 D 推論的第 j 步是在 D 當中第一次使用（EI）規則，所以任何 D 推論中其他的（EI）步驟都會出現在第 j 步之後，因此，D^* 第 m 步的（EI）會是在第 j 步之後。我們現在要證明這個第 m 步的（EI）會符合限制 2。但因為 D 是 Copi-Kahane 系統合法的推論，根據（EI）的限制，第 m 步（EI）的「個例項」沒有自由的出現在任何一個之前的步驟中，包括第 j 步的 $\psi(u)$ 之中。因此，D^* 第 m 步（EI）的「個例項」也沒有自由的出現在何一個之前的步驟中，包括新加入的第 j^- 步 $(\exists x)\psi(x) \supset \psi(u)$。因此，限制 2 也會滿足。

現在考慮（UG）規則，同樣地我們要證明 D^* 中任何（UG）規則的使用都會符合 Copi-Kahane 系統對（UG）規則的限制（見圖八）。而同樣地，因為原本的 D 推論已經是 Copi-Kahane 系統合法的證明，因此限制 1 顯然在 D^* 裡也會滿足。針對限制 2 與限制 3，我們一樣假設在 D^* 中的第 m 步我們用了（UG）規則。然而如果第 m 步是在第 j 步之前，那麼很顯然的限制 2 與限制 3 當然會滿足。（限制 2 會滿足是因為 D^* 第 m 步的未釋放前提都是 D 第 m 步未釋放的前提；限制 3 會滿足是因為根據假設第 m 步之前沒有用過（EI）規則。）

所以我們只需考慮第 m 步是在第 j 步之後的情況。這時限制 3 顯然會滿足，因為 D 已經是 Copi-Kahane 系統合法的證明，所以 D 第 m 步（UG）的「個例項」沒有自由地出現在之前使用（EI）的步驟中，因此在 D^* 第 m 步（UG）的「個例項」也沒有自由地出現在之前（EI）的步驟中（注意 D^* 比 D 少用一次（EI））。至於限制 2，因為對第 m 步的（UG）而言，D^* 只比 D 多了一個未釋放的假設，也就是第 j^- 行的 $(\exists x)\psi(x) \supset \psi(u)$，所以我們只須證明第 m 步（UG）的「個例項」不會自由地出現在這個語式中。但因為 D 已經是 Copi-Kahane 系統合法的證明，因此 D 第 m 步（UG）的「個例項」不會自由地出現在之前使用（EI）的步驟中，包括第 j 步的 $\psi(u)$，因此 D^* 第 m 步（UG）的「個例項」不會自由地出現在第 j^- 行的 $(\exists x)\psi(x) \supset \psi(u)$ 語式中。所以限制 2 也會滿足。

因此，我們證明了我們的宣稱，也就是 D^* 確實會是 Copi-Kahane 系統中的合法推論。而因為 D 是「已完成的推論」，表示 D 的最後一行 φ_n 沒有包含任何的自由變元，因此 D^*的最後一行 $\varphi_n{}^*$ 也沒有包含任何的自由變元，因此 D^* 也會是「已完成的推論」。

所以 D^* 是 Copi-Kahane 系統合法的「已完成推論」，且在 D^* 中（EI）規則總共用了 k 次。因此，根據假設，對 D^*而言 $\Gamma_n{}^* \vDash \varphi_n{}^*$ 會成立。但

$\Gamma_n{}^* \subseteq \Gamma_n \cup \{(\exists x)\psi(x) \supset \psi(u)\}$，而 $\varphi_n{}^* = \varphi_n$，因此 $\Gamma_n \cup \{(\exists x)\psi(x) \supset \psi(u)\} \vDash \varphi_n$ 會成立。此外，因為 D 已經是 Copi-Kahane 系統合法的證明，所以第 j 步（EI）的「個例項」u 沒有自由地出現在之前任何步驟中，因此 u 不會自由地出現在 Γ_n 中。而因為 D^* 是個「已完成的推論」，所以 u 也不會自由地出現在最後一行 φ_n 中。

宣稱：假設 (i) $\Gamma_n \cup \{(\exists x)\psi(x) \supset \psi(u)\} \vDash \varphi_n$，且 (ii) u 沒有自由地出現在 Γ_n 或 φ_n 裡，則 $\Gamma_n \vDash \varphi_n$。

要證明這個宣稱，我們可以注意到 $\Gamma_n \cup \{(\exists x)\psi(x) \supset \psi(u)\} \vDash \varphi_n$ 等價於 $\Gamma_n \cup \{\sim\varphi_n\} \vDash \sim[(\exists x)\psi(x) \supset \psi(u)]$。而因為 u 沒有自由地出現在 $\Gamma_n \cup \{\sim\varphi_n\}$ 裡，因此我們可以推得 $\Gamma_n \cup \{\sim\varphi_n\} \vDash (\forall u)\sim[(\exists x)\psi(x) \supset \psi(u)]$，等價於 $\Gamma_n \cup \{\sim\varphi_n\} \vDash \sim(\exists u)[(\exists x)\psi(x) \supset \psi(u)]$，等價於 $\Gamma_n \cup \{(\exists u)[(\exists x)\psi(x) \supset \psi(u)]\} \vDash \varphi_n$。但因為$(\exists u)[(\exists x)\psi(x) \supset \psi(u)]$ 是個恆真句，因此我們可以推得 $\Gamma_n \vDash \varphi_n$。

根據這個宣稱，以及前段所得到的結果，我們因此完成了引理三的證明。

定理四：假設 $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ 是 Copi-Kahane 系統中的一個「已完成的推論」，其中第 i 行 φ_i 所用到未釋放的前提是 Γ_i。那麼 $\Gamma_n \vDash \varphi_n$ 成立。

證明：根據引理二與引理三的結果，我們可以用數學歸納法針對 Copi-Kahane 系統「已完成推論」中（EI）的使用次數做歸納，證明定理四。