行政院國家科學委員會專題研究計畫成果報告

共整合模型在經濟成長模型的應用與實證檢驗

An Application of Cointegration Analysis to the Growth Models

計畫別類： ☒個別型計畫　☐整合型計畫

計畫編號： NSC 89-2415-H-002-013

執行期間： 民 88 年 8 月 1 日至 民 89 年 7 月 31 日

個別型計畫：計畫主持人：林建甫
共同主持人：

整合型計畫：總計畫主持人：
子計畫主持人：

註：整合型計畫總報告與子計畫成果報告請分開編印各成一冊，彙整一起繳送國科會。

處理方式： ☐可立即對外提供參考

(請打 X) ☐一年後可立即對外提供參考

☒兩年後可立即對外提供參考

(**必要時，本會得延展發表時限**)

執行單位： **台灣大學經濟學系**

中華民國： 89 年 10 月 1 日

共整合模型在經濟成長模型的應用與實證檢驗

林建甫
台大經濟系

摘要 本文乃是將計量經濟學晚近發展的共整合觀念應用到各種經濟成長的模型，做一有系統的探討。起先我們先推導非隨機的經濟成長模型所能隱含的長期均衡觀念，然後加入隨機的誤差項成為可估計的計量模型，然後分別歸納成共整合關係式，及關係式中所代表的係數限制及調整。我們探討的模型有Solow-Swan模型、Ramsey 模型、Lucas 模型(人力資本的內生成長模型)、AK 模型、Aghion-Howitt模型 (創新的內生成長模型)及技術擴散的內生成長模型。而計量的實證研究，我們並探討技術進步及勞動的外生性，及估計模型係數的穩定性。我們以台灣的資料去做實證的探討，但是由實證的結果來看，本文欲檢定的長期均衡關係可能太過嚴苛。恆定狀態假設可能較適合跨國的橫斷面分析，單一經濟體如台灣很可能尚未到達恆定狀態。

關鍵詞：共整合觀念，經濟成長，內生性，長期均衡，係數的穩定性

第一節 前言

經濟成長的模型最早是 Harrod 和 Domar 在 1940 的模型，在 Solow(1956)的新古典模型出現後，內生成長理論出現之前，以 Solow 模型為基礎的成長理論則一直被用來做為理論和實證上的研究。Solow 模型假設生產函數和市場形態符合古典理論，即完全競爭，封閉體系，規模報酬不變，邊際資本報酬遞減等等。另外再假設外生儲蓄率和人口成長率。該模型中，經濟成長和實體資本累積速度(換句話說也就是與儲蓄率)有著密切的關係，因為在以上條件下求取模型定態條件，經濟模型的長期均衡取決於外生且假設為固定的儲蓄率和人口成長率，但是提高儲蓄率只能改善最後定態時的每人產出水準，並不能改變每人經濟成長率在定態時等於零的結果。改良型的 Solow 模型中(見 3-1 推導)，加入了人力資本的變數，但仍然假設為外生，因此定態

時的每人經濟成長率等於外生的人力資本進步率。一個經濟體的長期成長率只取決於外生的人力資本進步率，所以政府政策如鼓勵儲蓄並無法影響長期經濟成長率。這個涵義和一般人認為東亞國家經濟成長的經驗不符合，因為四小龍不但每人所得水準比一般發展中國家高，而且每人所得成長率似乎也長期處在比較高的水準。

1965 年 Cass 和 Koopmans 將動態方法和 Ramsey 的最適消費儲蓄選擇的觀念重新應用到成長模型上稱為 Ramsey 模型，其他一階齊次生產函數和市場競爭的假設仍然相同，使得每期儲蓄率，消費和產出成長率等在定態之前均不是固定外生，而是最適內生。然而在長期均衡上，Ramsey 模型和 Solow 模型一樣，到最後平均每人成長率要等於外生人力資本進步率(特別說明長期每人的產出水準可以因為期初技術水準提昇而增加，但其成長率仍然無法改變)。

如果我們更進一步接受和經濟體的結構參數有差異，如儲蓄率和生產函數數的不同，則以上的古典成長模型隱含了條件收斂(conditional convergence)的結果，意指各經濟體有自己不同的恆定狀態(每人產出和消費等變數)，而經濟體低於自己的長期恆定狀態愈遠，則經濟成長率愈高。另一角度來說，若是結構參數相近的地區如美國各洲之間或西歐諸國，則會有每人產出和經濟成長率成反相關係的情形，然而結構參數差異很大的國家，則不必然有這個關係。這個結果與事實大致相符。

由於這些模型對技術進步的外生假設，隱含經濟體任何行為均無法控制技術進步以使成長率增加，譬如研發，教育，或是政府政策，此與現實世界或有不同，尤其亞洲四小龍的表現，讓很多人相信經濟成長的成就，可經由一些政府政策或其他的方法獲致，而不是死死地受制於固定外生的技術進步。另一方面很多研究經濟成長的學者也希望貧窮落後國家的經濟成長，有擺脫現狀的可能性，以上成長模型的政策意涵並無法滿足這些需要。

到了八十年代，成長領域的焦點集中到了內生成長理論上，以 Romer 和 Lucas 為起始。這些新成長理論的共通處是認為經濟成長的主要動力來自於技術的改變，而且技術是生產過程中的一種內生投入。此外，由於認為知識之為一種人力資本的特殊性質，他們也改變了新古典成長模型中生產函數為規模報酬不變和市場為完全競爭的假設。內生成長模型依成長動力源又可分

為兩大類。第一種是強調可儲存要素投入(人力和實體資本)的外部性和要素累積的內生成長模型，統稱要素累積模型。第二種則是研究發展模型，強調經濟成長的動力來自於 R and D。以下分別說明。

第一類的模型又分為外部性模型和人力資本模型。Romer(1986)的經濟成長模型再對 Ramsey 模型做修改，重點是考慮到產業的外溢效果而產生外部經濟，即使沒有技術進步和人力資本進步，長期定態時，每人經濟成長率也會維持一正值，是一些參數如生產係數，折舊率，時間偏好率等等的函數。經濟成長的動力來源是整個社會(不是各別廠商)的生產函數規模報酬遞增。結果是時間偏好率較低和跨期替代彈性大的經濟體儲蓄率會較高，長期經濟成長率也會較高。此外提升技術水準也可以使長期(其實也是短期，因為沒有傳遞動態，直接跳到長期均衡)經濟成長率增加。這個結果和外生成長理論不同，外生成長理論中，儲蓄率和技術水準的高低不影響長期經濟成長率。

另外一種想法是維持每人長期所得成長的來源不是外部經濟，而是人力資本的內生技術進步，也就是每人生產函數是每人實體資本和人力資本的一階齊次函數，但是人力資本的累積是和實體資本一樣要從單一種類產出裡面來投注，因此人力資本的累積成為廠商最適化時必須考慮到的內生變數。這種人力資本模型可以導成 AK 模型(3-4 節)，也就導成每人產出只是每人實體資本的函數(因為在最適選擇下人力資本一定會跟實體本呈一固定比例)，而且實體資本的邊際生產力不變。AK 模型的型式違反 Inada condition，這是產生內生成長的關鍵因素。表面上看起來實體資本邊際生產力不變似乎不合理，但是如果把這個資本看成是還包含實體資本和人力資本，生產知識和公共建設和設施等等的綜合變數，則邊際生產力不變的情形則可以合理化。最適化結果隱函的重要意義與上面 Romer 的外部效果模型一樣，都是時間偏好率較低和跨期替代彈性大的經濟體儲蓄率會較高，長期(同時也是短期)經濟成長率也會較高。其實上面的 Romer 外部性模型也可以導成 AK 模型型式，差別在於不能用社會規畫者極大化解，所以最適解並不相同，但是隱含的重要結果是差不多的。

Lucas(1988)再對以上 AK 模型和 Romer 的模型加以擴充，使模型中包含實體資本累積之外還包括人力資本累積機能(人力訓練)，而人力資本累積的方式不是從單一產出直接去投注，而是人力資本另外再由勞動者的受訓時間

和訓練用資本透過一個函數產生。重要的結論除了即使沒有嚴格定義的 TFP 技術進步，長期每人經濟仍能持續成長之外，還有複均衡路徑的可能性，造成兩個經濟情況起初相似的經濟體，由於其中一個國家的人力資本累積和消費比例增加的較快，而使得在長期定態均衡時每人消費水準，投資水準，人力資本水準可能產生很大的差異。所以原始的 Lucas 模型是屬於強調人力資本訓練的人力資本模型。而本文的實證模型則為混合 Romer(1986)和 Lucas(1988)的模型，一併考慮外部性和人力資本訓練，推導過程詳見 3-3。

第二大類的模型是研發模型。研發模型的理論基礎是，研發造成技術進步，而技術進步促使經濟成長。而技術進步的形式又分為兩種方向。一是表現在中間財或最終財的種類增加，第二種是表現在產品品質的提昇。然而要廠商保有研發的動力而不會讓利潤完全被模仿者吃掉，勢必不能維持古典成長理論中完全競爭的假設，而要給予研發單位或是從事創新的廠商特定程度的壟斷能力使其產生研發創新的誘因。

產品種類的擴充最早的設計是 Romer(1987)把種類增加定位在中間財的使用，中間財種類增加代表專業分工，可以降低生產成本，帶動經濟成長 Romer(1990)則加入了中間財種類增加的來源為研發投入的設定。Grossman and Helpman(1991)則設計為最終產品的種類擴充，並且考慮產品多樣化對效用函數的正面影響，經濟成長表現在最終產品種類愈多，消費者的效用愈大。

研發模型的第二類為產品質提昇的模型，以 Aghion and Howitt (1992,1998)為代表。1998 的模型為，技術進步表現在中間財的品質改善。中間財市場為多部門獨占，其他市場包括研發部門為完全競爭(其他設定詳見 3-5)。主要結論為，長期恆定狀態時，研發投入為固定，產出的對數值為 random walk with a drift。而對平均經濟成長率影響為正向的參數為，創新的數量，投入研發的勞動力的數量和研發函數的生產力，影響為負的參數為時間偏好率。

除了以上廣為討論的資本累積模型和研發模型兩大類之外，其他成長理論則考慮金融介的發展和國際貿易的盛行對經濟成長的影響。雖然內生成長模型分為以上兩大類，但本文的實證對象僅限於第一類的資本累積模型。研發模型的實證資料比較複雜，以總體經濟角度在產品種類和品質提昇的認定上比較困難，更大的問題是研發模型所需的一些重要變數如研發投入，技術

人員數量和技術參數等資訊，國內在 1987 年才開始有比較詳細可供研究的年資料，資料長度不足以做時間序列的實證分析。故而本文只在 3-5 和 3-6 部分推導兩種研發模型所預示的共積關係和隱含的 VECM 模型參數，但沒有進行實證分析。

第二節 過去實證的文獻與不足

在早期以 Solow 模型為基本架構並且沒有考慮到人力資本因素的成長模型只能解釋一些短期上變動的隱含意義。在實證上當然不能令人滿意。很多情況下資本和勞動的分額的估計值非常不合理，有的時候會做出勞動生產係數為負值，或著是兩種投入要素的分額的比例差距太大，這是因為沒有加入人力資本變數的設定誤差造成的估計錯誤。Lucas(1988)說在傳統實證上，純勞動力成長和實體資本成長只能解釋不到一半的經濟成長，因此他強調人力資本對經濟成長的重要性非常大。之後 Barro(1991)分別用跨國資料和美國各州資料探討以基礎教育代表的人力資本變數對經濟成長的貢獻，結果支持 Lucas 的說法。其他文獻雖然均肯定人力資本對經濟成長的重要，但不同的研究結果差異很大。

在考慮人力資本以後，以改良型 Solow 外生成長模型(即本文 3-1 的模型)做實證，結果好了很多。代表性的文獻為 Mankiw，Romer and Weil(1992)，他們用以上方法應用到一系列的跨國資料上，結果顯示改良的 Solow 模型似乎可以良好地解釋經濟成長的情形，並且支持古典生產函數，甚至可以解釋為什麼存在長期的各國貧富差距(文中認為改良的 Solow 模型可以解釋 80%各國所得水準的差異，也就是儲蓄，教育水準，和人口成長的差異等等是造成各國所得水準差異的主因)。

在國外的時間序列方面，首先參考 Chou and Wong(1997)對香港經濟成長所做的研究。該文章以知識外溢效果對人力資本或技術進步的理論為基礎，透過進口資本財，外國人在香港直接投資和進口造成的邊做邊學等等變數，探討技術進步對影響經濟成長的重要性。他們的方法是盡可能地將各種內生成長理論所提到，可能影響經濟成長的因素，都加入模型中當做解釋變數，進而直接估計這些因素對經濟成長的貢獻，也可以看做是對多種內生成長理論的政策意涵做綜合的檢定。該文章用二階段共積分析法，結果是除了實體

資本和勞動力之外，外人投資，教育支出，本地生產和進口數量都對經濟成長有重要貢獻。這篇文章有一個重要的陳述，即直接估計濟成長的要素變化對經濟成長的影響，可以更正確且明顯地看出技術進步的程度。因為如果正確的模型包含的解釋變數有如上述，那麼以往廣為使用的殘差估計法(估計生產函數殘差中不能被實體資本和勞動人口變化所釋的部分)，則有模型誤設(misspecification error)的問題。

在本土時間序列研究方面，本文重要的參考文獻為 Chou(1995)和 Tallman and Wang(1994)。Chou 的文章是根據 Mankiw，Romer and Weil(1992)的方法，但是做的是台灣的時間序列分析。他們的方法沒有直接估計生產函數型式，因為他們感興趣的生產函數參數如儲蓄率，人口成長率，和人力資本進步率也包含在消費決定式的參數之中，所以只估計檢定消費決定式，結果也是肯定台灣的人力資本累積對長期每人所得的貢獻。此外他們的實證結果也認為因為台灣是小型開放經濟體系，所以國際貿易造成的知識外溢效果對人力資本的提昇很有幫助，呼應了國際貿易和經濟成長的相關理論，也就是貿易需求導向的政策，是台灣和四小龍這些小型開放經濟體經濟快速成長的核心動力。Tallman and Wang(1994)則是估計台灣的生產函數，他們考慮各種不同的教育指標來代理人力資本變數，以找出最能合乎合理的投入要素報酬分額並且解釋力顯著的人力資本變數，結果他們認為台灣的人力資本累積對經濟成長的貢獻高達百分之四十，因而給內生成長理論提供了很強的證據(而該篇文章的名稱為”台灣的人力資本和內生成長的證據”)。該文章的實證不是引用共積分析的結果，因為他們用共積分析找不出合理或顯著的估計結果。

然而仔細地研讀內生成長理論將可以發現，證實人力資本的重要並不意味證實了內生成長，應該說人力資本在生產中占有很重要的比重將可以為特定類型的內生成長理論提供一個很大的空間，但不能說人力資本重要就認定有內生成長存在。譬如 AK 模型可由人力資本修正的古典生產函數導成，所以人力資本在生產函數中的角色是一樣的，差別是在人力資本的累積方式是外生還是內生。只要假設人力資本的進步是外生的，並且生產函數符合古典假設，基本上還是屬於外生成長模型。所以想要進一步對內生成長模型獲得實證上更確定的支持，不只要對生產函數做估計，理想的方法還要對均衡時變數間的關係做檢定，因為不同的成長模型對均衡時變數間的關係有不同的

預示，這也是本文用共積分析的用意之一。

內生成長的模型來源還包括改變對生產函數規模報酬固定的假設，包括資本外部性和知識外溢效果等等。有關是否有外部性的實證研究，有 Caballero and Lyons(1990)使用歐洲四國和美國的資料，以總要素生產力衡量技術進步以檢定外部性，認為有外部性存在。但也有其他類似的文獻或是以產業角度的研究否定資本外部性。

在知識外溢效果方面，Benhabib and Joranovic. (1991)則認為若技術進步為外生而產出和資本為內生，則表現在實體資本上的知識外溢效果不存在。由以上看來，對於生產函數有沒有因為外部經濟產生的規模遞增並沒有一致的結果。

在 AK 模型和研發造成的內生成長方面(有些可以導成 AK 模型形式)，前者預測每人長期經濟成長率和投資率有關係，後者則預測每人經濟成長率和投入研發的資源有很大的關係，Jones(1995a,b)的實證研究結果則無法證實 AK 模型和研發模型的觀點。

最後說明本文以單國時間資料來做共積分析的用處和意義。前面提到有關人力資本的研究大多是以跨國資料來進行，譬如 Barro 使用正規教育的人力資本代理變數(期初的教育程度)來看人力資本對經濟成長的影響，而不同學者用類似方法的研究結果差異很大。誇國實證結果不一致可能的原因是由於各國人力資本的代理變數衡量不一，因為基本教育的品質各國不同，且各級教育對生產的貢獻的重要性也可能因時因地而不同，另外國情不同，如政經穩定度，政府經濟政策產業結構等等整體環境的差異，沒有將這些變數考慮進去的話，就有可能產生人力資本的估計數值不能充分反應各國人力資本差異。使用單一國家的時間序列則可以降低這方面的顧慮，因為可以把其他的差異影響降到最小。此外共積分析還可以探究長期的均衡關係，檢定長期均衡和短期調整參數符不符合特定成長模型預示的均衡結果和檢定變數的外生性。

第三節 模型

3-1 The Solow-Swan Model

3-1-1 理論模型

$$Y_T = a_0 K_t^{\sim} (A_t L_t)^{1-\sim} \tag{3.1}$$

生產函數， Y_t **為產出** K_t**為固定資本存量，**A_t**為人力資本，**L_t**為勞動人**

$$\Delta K_t = I_t - \text{¢} K_t \tag{3.2}$$

資本累積，I_t **為毛投資**,**¢為固定資本折舊率**

$$I_t = S_t = s\, Y_t$$

均衡條件，S_t **為儲蓄，** s **為儲蓄率**

$$\Delta \ln A_t = g$$

外生人力資本技術進步率

$$\Delta \ln L_t = n$$

外生勞動成長進步率

令

$$\hat{y}_t = \frac{Y_t}{A_t L_t}$$ **每有效勞動力產出**

$$\hat{k}_t = \frac{K_t}{A_t L_t}$$ **每有效勞動力資本存量**

則生產函數寫為

$$\hat{y}_t = a_0 \hat{k}_t^{\sim} \tag{3.3}$$

對時間微分可得每有效勞動力資本存量的時間路徑為

$$\frac{d\hat{k}_t}{\sim t} = s a_0 \hat{k}_t^{\sim} - (n + g + \text{¢})\hat{k}_t \tag{3.4}$$

每有效勞動力資本存量成長率路徑為

$$\frac{d\ln\hat{k}_t}{dt} = sa_0\hat{k}_t^{\sim-1} - (n+g+¢) \qquad (3.5)$$

定態(steady state)**時**

$$\left.{d\hat{k}_t}\middle/{dt}\right|\hat{k}_t = \hat{k}^* = 0$$

$$\hat{k}^* = \left(\frac{sa_0}{n+g+¢}\right)^{\frac{1}{1-\sim}}$$

取對數進一步寫成 $\ln\hat{k}^* = \frac{1}{1-\sim}\ln\left(\frac{sa_0}{n+g+¢}\right)$ (3.6)

3-1-2 計量化模型

以上模型設定及推導屬連續時間，而實際操作則是間斷時間資料。要用對數線性化的方法和間斷逼近把均衡條件化成差分型式以利計量分析。

(3.1)**取對數可得**

$$\ln Y_t = \ln a_0 + \sim\ln K_t + (1-\sim)\ln A_t + (1-\sim)\ln L_t + y_{1t}$$

定態時每有效勞動資本存量為定值如(3.6)**式**

$$\ln\hat{k}_t = \ln\hat{k}^* + y_{2t}$$

$$\Delta\ln A_t = g + y_{3t}$$

$$\Delta\ln L_t = n + y_{4t}$$

又 $\hat{k}_t = \frac{K_t}{A_t L_t}$ **得**

$$\ln Y_t = \ln a_0 + \sim\ln K_t + (1-\sim)\ln A_t + (1-\sim)\ln L_t + y_{1t} \qquad (3.7)$$

$$\ln K_t - \ln A_t - \ln L_t = \ln k^* + y_{2t} \qquad (3.8)$$

$$\Delta\ln A_t = g + y_{3t} \qquad (3.9)$$

$$\Delta\ln L_t = n + y_{4t} \qquad (3.10)$$

其中($y_{1t}, y_{2t}, y_{3t}, y_{4t}$)**為穩定隨機過程。**

特別說明理論模型中 Y_t, K_t, A_t, L_t **四變數符合式**(3.7)**和**(3,8)**的共整合關**

係，(3.7)式是生產函數，(3.8)式是長期定態，第四章將會檢定資料上這兩個共整合關係成不成立。

另外由生產函數和定態條件可推得每有效勞動產出成長率亦為零，或者是每勞動產出成長率為外生人力資本進步率，這也是模型中每勞動人口產出可以不斷成長的來源。

傳遞動態

$$\frac{d\log\hat{k}_t}{dt} = sa_0\hat{k}_t^{\sim -1} - (n+g+¢)$$

經過對數線性化(Log-linearization)

$$\frac{d\log\hat{k}_t}{dt} = \quad (\log\hat{k}_t - \log\hat{k}^*)$$

其中 $\quad = (1-\sim)(g+n+¢)$

間斷逼近(Discrete approximation)**得到**

$\Delta\log\hat{k}_t = - \quad (\log\hat{k}_{t-1} - \log\hat{k}^*)$ **或**

$$\text{Ä}\log K_t = (g+n) - \hat{a}(\log\hat{k}_{t-1} - \log\hat{k}^*) \qquad (3.11)$$

$$\Delta\log K_t = (g+n) - \quad y_{2t-1} \qquad (3.11*)$$

由(1)**到**(5)

$$\Delta\ln Y_t = \sim\Delta\ln K_t + (1-\sim)\Delta\ln L_t + (1-\sim)\Delta\ln A_t + (y_{1t} - y_{1t-1})$$

$$\Delta\ln Y_t = (g+n) - \sim \ y_{2t-1} - y_{1,t-1} + y_{1t} \qquad (3.12)$$

設定 y_{1t} **為** i.i.d

$d_3(L)y_{3t} = \in_{3t} \qquad \in_{3t} \sim iid(0, \pm_{33})$

$d_4(L)y_{4t} = \in_{4t} \qquad \in_{4t} \sim iid(0, \pm_{44})$

最後(3.11)**和**(3.12)**以及外生的勞動力和人力資本形成** VECM **型式**

$$\begin{pmatrix} \Delta \ln Y_t \\ \Delta \ln K_t \\ d_1(L)\Delta \ln A_t \\ d_2(L)\Delta \ln L_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g+n \\ g+n \\ g \\ n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1, \sim \\ 0, \\ 0\ 0 \\ 0\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{1t-1} \\ \\ y_{2t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_{1t} \\ \in_{2t} \\ \in_{3t} \\ \in_{4t} \end{pmatrix}$$

3-1-3 計量分析

A. **檢定先驗模型隱函的共積結果**

B. **估計資料顯示的共積關係**.

C. **檢定成長模型隱含的** VECM **的短期調整參數限制和常數項**

D. **檢定** A_t**和** L_t**的外生性**

E. **檢定估計結果的穩定性**

3-2 The Ramsey Model

Ramsay **模型考慮家計部門和廠商部門極大化選擇, 故有消費變數加入模型之中。**(**本模型參見** Barro-Sala-i-Martin **第二章**)

3-2-1 理論模型

生產函數

$Y_t = a_0 K_t^{\sim} (A_t L_t)^{1-\sim}$

$\hat{y}_t = a_0 \hat{k}_t^{\sim}$

令 $\hat{y}_t = \dfrac{Y_t}{A_t L_t}, \hat{k}_t = \dfrac{K_t}{A_t L_t}$

$y_t = \dfrac{Y_t}{L_t}, k_t = K_t \big/ L_t$

(b) $r_{L_t} = n$ **勞動人口成長率**

(c) $r_{A_t} = g$ **外生人力資本進步率**

(d)**極大化**

$\int_0^{\infty} \dfrac{c_t^{1-\_} - 1}{1-\_} e^{-(\circ - u)t} dt$ **終身效用函數**,θ**為跨期替代率**,ρ**為時間偏好率**,**為跨期替代函數固定之效用函數**

s.t. $\dot{k}_t = w_t + s_t k_t - c_t - nk_t - ¢k_t$ **固定資本累積限制**

$= y_t - c_t - nk_t - ¢k_t$

最適消費配置

$$\&_t / c_t = \frac{1}{=}(r_t - p) \qquad (3.13)$$

(e)**極大化利潤時，實體資本邊際生產力等於資本租金價格**

$$\frac{\partial Y_T}{\partial K_t} = r_t + ä$$

又 $\frac{\partial Y_t}{\partial K_t} = \frac{\partial \hat{y}_t}{¥_t \hat{k}_t}$,

$$a_0 \sim \hat{k}_t^{1-\sim} = r_t + ¢$$

推得 $r_t = a_0 \sim \hat{k}_t^{\sim-1} ¢$ (3.14)

(f) $\hat{c}_t, \hat{k}_t$**最適路徑**

$$\&_t / c_t = \frac{1}{=}(\sim \hat{k}_t^{\sim-1} - ¢ - p) \qquad (3.15)$$

定義 $c_t = \frac{C_t}{L_t}$

In $\hat{c}_t = \frac{C_t}{A_t L_t} = c_t / A_t$

$$\hat{\&}_t / \hat{c}_t = \&_t / c_t - g$$

用(3. 15)**代入則得**

$$\hat{\&}_t / \hat{c}_t = \frac{1}{=}(a_0 \sim \hat{k}_t^{\sim-1} - ¢ - p - \bar{g}) \qquad (3.16)$$

另外從 $\frac{\dot{k}_t}{k_t}=\frac{y_t}{k_t}-\frac{c_t}{k_t}-(n+\delta)$

$\frac{\dot{\hat{k}}_t}{k_t}=\frac{\dot{k}_t}{k_t}-g$；$\frac{y_t}{k_t}=\hat{y}_t/\hat{k}_t$，$\hat{c}_t/\hat{k}_t=c_t/k_t$

得到 $\dot{\hat{k}}_t/\hat{k}_t=\hat{y}_t/\hat{k}_t-\hat{c}_t/\hat{k}_t-(n+\delta+g)$ (3.17)

3-2-2 定態

由 (3.17)同乘 k 知定態時:

$\hat{y}^*-\hat{c}^*-(n+g+\delta)\hat{k}^*=0$

$$a_0\hat{k}^{*\alpha}-\hat{c}^*-(n+g+\delta)\hat{k}^*=0 \quad (3.18)$$

由 (3.16)等於零可得

:

$$a_0\alpha\hat{k}^{*\alpha-1}=\delta+\rho-\theta g \quad (3.19)$$

$$\hat{k}^*=\left(\frac{a_0\alpha}{\delta+\rho+\theta g}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

(3.19) 代入 (3.18)

$$\hat{c}^*=\left[\frac{\delta+\rho+\theta g}{\alpha}-(n+g+\delta)\right]\hat{k}^* \quad (3.20)$$

由此可以看出在長期定態時，每有效勞動力之固定資本存量和消費量為定值。原則上我們要檢定資料支不支持這個理論模型預示的定態數值。

3-2-3 傳遞動態

$$0=\frac{1}{\theta}(a_0\alpha\hat{k}_t^{\alpha-1}-\delta-\rho-\theta g)$$

$$\overset{\&}{\hat{c}_t}\Big/\hat{c}_t=\frac{1}{-}a_0\sim(\hat{k}_t^{\sim-1}-\hat{k}^{*\sim-1})$$

對數線性化得

$$\hat{c}_t^{*}\Big/\hat{c}_t=\frac{1}{-}a_0\sim(\sim-1)\hat{k}_t^{*\sim-1}(\log\hat{k}_t-\log\hat{k}^{*})$$

用(3.19)**的結果代入得**

$$\frac{\overset{\&}{\hat{c}_t}}{\hat{c}_t}=\frac{1}{-}(\sim-1)(¢+p+\bar{\ }g)(\log\hat{k}_t-\log\hat{k}^{*})$$

同理

$$\frac{\overset{\&}{\hat{k}_t}}{\hat{k}_t}=a_0\hat{k}_t^{\sim-1}-\frac{\hat{c}_t}{\hat{k}_t}-(n+g+¢)$$

$$0=a_0\hat{k}^{*\sim-1}-\frac{\hat{c}^{*}}{\hat{k}^{*}}-(n+g+¢)$$

$$\frac{\overset{\&}{\hat{k}_t}}{\hat{k}_t}=a_0(\sim-1)\hat{k}_t^{*\sim-1}(\log\hat{k}_t-\log\hat{k}^{*})-\frac{\hat{c}^{*}}{\hat{k}^{*}}\left[\left(\ln(\hat{c}_t)-\ln\hat{c}^{*}\right)-\left(\ln\hat{k}_t-\ln\hat{k}^{*}\right)\right]$$

由(3.19)**和**(3.20)**簡化**:

$$\frac{\hat{k}_t}{\hat{k}_t}=\left[p-n-(1-\bar{\ })g\right]\left(\ln\hat{k}_t-\ln\hat{k}^{*}\right)$$
$$+\left[(n+¢+g)-\left(\frac{p+¢+\bar{\ }g}{\sim}\right)\right](\ln\hat{c}_t-\ln\hat{c}^{*})$$

3-2-4　計量模型

A .長期關係

$$\begin{cases}\ln\hat{k}_t=\ln\hat{k}^{*}+Y_{1t}\\ \ln\hat{c}_t=\ln\hat{c}^{*}+Y_{2t}\\ \ln\hat{y}_t=\ln\hat{y}_t^{*}+Y_{3t}=\ln a_0\hat{k}_t^{*\sim}+Y_{3t}\\ \ln\hat{y}_t-\ln a_0-\sim\ln\hat{k}_t=Y_{4t}\end{cases}$$

或者

$$\begin{cases}\ln K_t - \ln L_t - \ln A_t = \ln \hat{k}^* + Y_{1t} \\ \ln C_t - \ln L_t - \ln A_t = \ln \hat{c}^* + Y_{2t} \\ \ln Y_t - \ln L_t - \ln A_t = \ln \hat{y}^* + Y_{3t} \\ \ln Y_t - \sim \ln K_t - (1-\sim)\ln L_t - (1-\sim)\ln A_t = \ln a_0 + Y_{4t}\end{cases}$$

取其中三者為共積關係

B． **傳遞動態**

$$\Delta \log \hat{k}_t = «_{11}(\ln \hat{k}_{t-1} - \ln \hat{k}^*) + «_{12}(\ln \hat{c}_{t-1} - \ln \hat{c}^*) + \in_{1t}$$

$$\Delta \log \hat{c}_t = «_{21}(\ln \hat{k}_{t-1} - \ln \hat{k}^*)$$

$$\begin{cases}«_{11} = p - n - (1- ¯)g,\ «_{12} = (n + ¢ + g) - \dfrac{p + ¢ + ¯g}{\sim} \\ «_{21} = \dfrac{\sim - 1}{–}(¢ + p + ¯g)\end{cases}$$

但 $\Delta \log \hat{k}_t = \Delta \log K_t - \Delta \log L_t - \Delta \log A_t = \Delta \log K_t - (n+g)$

同理 $\Delta \log \hat{c}_t = \Delta \log C_t - (n+g)$

所以

$$\begin{pmatrix}\Delta \ln K_t \\ \Delta \ln C_t \\ \Delta \ln Y_t \\ \Delta \ln A_t \\ \Delta \ln L_t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}«_{11} & «_{12} \\ «_{21} & 0 \\ \sim«_{11} & \sim«_{12} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\ln \hat{k}_{t-1} - \ln \hat{k}^* \\ \ln \hat{c}_{t-1} - \ln \hat{c}^*\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}£_{t1} \\ £_{t2} \\ £_{t3} \\ y_{t4} \\ y_{t5}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}g+n \\ g+n \\ g+n \\ g \\ n\end{pmatrix}$$

設定

$$\Delta \ln A_t = y_{4t} \qquad d_1(L) y_{4t} = £_{t4}$$

$$\Delta \ln L_t = y_{5t} \qquad d_2(L) y_{5t} = £_{t4}$$

$$\begin{cases}d_1(L)\Delta \ln A_t = £_{4t} + g^* \\ d_2(L)\Delta \ln L_t = £_{5t} + n^*\end{cases}$$

3-3 Lucas 人力資本內生成長模型—同時考慮人力資本外部性和單部門人力資本訓練

本節結合 Romer(1986)**的人力資本外部性模型和** Lucas(19　)**的人力資本**

訓練模型，推導均衡條件和模型預示的長期定態和 VECM 型式.

3-3-1 理論模型

A．**模型要件**

(1)**生產函數**

$$Y_t = AK_t^{\sim}(u_t H_t)^{1-\sim}(\overline{H}_t)^{¥} \tag{3.21}$$

此處各變數均以每人為單位，u **在原理論中為一人在一期總工時中用於生產的比例，**H **為個人人力資本存量，**$\overline{H}$ **為其他人的人力資本平均水準，由於外部性會影響到該人的產出。**

(2)**人力資本累積**

$$\dot{H}_t \big/ H_t = \quad (1-u_t) - ¢_H \tag{3.22}$$

用於生產以外的時間比例用於人力訓練，β為人力訓練生產係數，δ $_T$ **為人力資本折舊。**

(3)**實體資本累積**

$$\dot{K}_t \big/ K_t = \frac{Y_t - C_t - ¢_k K_t}{K_t} \tag{3.23}$$

$$= AK_t^{\sim-1}(n_t H_t)^{1-\sim}(\overline{H}_t)^{¥} - \frac{C_t}{K_t} - ¢_k$$

(4)**消費者選擇行為** ：**選擇** c_t, n_t, t_0

Maximize $\int_0^{\infty} \frac{c_t^{1-¯} - 1}{1-¯} c^{-pt} dt$ **極大化效用函數**

Subject to (3.21),(3.22),(3.23)

一階條件:

最適人力資本配置

$$\dot{n}_t \big/ n_t = \frac{}{\sim}(1-\sim+\text{¢}) + \frac{}{\sim}(\sim-\text{¥})u_t - \frac{C_t}{K_t} \tag{3.24}$$

最適消費配置

$$\dot{C}_t \big/ C_t = \frac{\sim}{=} A K_t^{\sim-1} H_t^{1-\sim+\text{¥}} u_t^{1-\sim} - \frac{1}{=}(p+\text{¢}_K) \tag{3.25}$$

B． **簡化變數**

由於該系統均衡時 Y, K, C,H **都會不斷成長，所以不會有固定值，要分析定態情形就要以變數比例表示，為了方便起見我們將變數重新定義如下**

令

$$\begin{cases} W_t = K_t H_t^{\frac{1-\sim+\text{¥}}{\sim-1}} \\ X_t = C_t \big/ K_t \end{cases}$$

則式 (3.22),(3.23),(3.24),(3.25)**可以寫為**

$$\begin{cases} \text{¥}_{u_t} = \frac{B}{\sim}(1-\sim+\text{¢}) + \frac{B}{\sim}(\sim-\text{¥})u_t - x_t \\ (\text{¥}_{u_t} = \dot{u}_t \big/ u_t) \\ \text{¥}_{c_t} = \frac{\sim}{=}(A w_t^{\sim-1}) - \frac{1}{=}(p+\text{¢}_k) \\ \text{¥}_{H_t} = \quad (1-u_t) - \text{¢}_H \\ \text{¥}_{K_t} = A w_t^{\sim-1} u_t^{1-\sim} - x_t - \text{¢}_k \end{cases}$$

以上各式分別為個別變數的成長率，則

$$\text{¥}_{w_t} = \text{¥}_{K_t} + \frac{1-\sim+\text{¢}}{\sim-1}\text{¥}_{H_t} = A w_t^{\sim-1} u_t^{1-\sim} - x_t + \frac{1-\sim+\text{¥}}{\sim-1} B n_t + \left[\frac{1-\sim+\text{¥}}{\sim-1} B\left(\text{¢}_K + \frac{1-\sim+\text{¥}}{\sim-1}\text{¢}_H\right)\right]$$

(3.27)

$$\text{¥}_{x_t} = \text{¥}_{c_t} - \text{¥}_{K_t}$$

$$= (\frac{\acute{a}}{\grave{e}} - 1) A w^{\acute{g}-1} a_t^{1-\acute{a}} + x_t + \ddot{a}_K - \frac{1}{\grave{e}}(p+\ddot{a}_K) \tag{3.28}$$

C .**簡化變數系統的定態**

定態時 $\text{¥}_{x_t}=0, \text{¥}_{u_t}=0$ and $\text{¥}_{w_t}=0$

$$\begin{cases}(\frac{\sim}{=}-1)Aw^{*^{\sim-1}}u^{*^{1-\sim}}+x^{*}+\left[\text{¢}_K\left(1-\frac{1}{=}\right)-\frac{p}{=}\right]=0\\ \frac{B}{\sim}(1-\sim+\text{¥})+\frac{B}{\sim}(\sim-\text{¥})u^{*}-x^{*}=0\\ 0=Aw^{*^{\sim-1}}u^{*^{1-\sim}}-x^{*}+\frac{1-\sim+\text{¥}}{1-\sim}Bu^{*}+\left[\frac{1-\sim+\text{¥}}{\sim-1}B-\left(\text{¢}_K+\frac{1-\sim+\text{¥}}{\sim-1}\text{¢}_H\right)\right]\end{cases}$$

定態解為

$$\begin{cases}\left(1-u^{*}\right)=\frac{(1-\acute{a})\left\{B-\left[\ddot{a}_K(1-\acute{a})+\frac{\ddot{o}}{\grave{e}}\ddot{a}_H+p\right]\right\}}{B\left[\grave{e}(1-\acute{a}+\tilde{a})-\tilde{a}\right]} & (3.29)\\ when\quad \ddot{o}=\frac{\acute{a}-B}{\grave{e}}\frac{1-\acute{a}+\tilde{a}}{1-\acute{a}} & \\ x^{*}=\frac{B}{\acute{a}}(1-\acute{a}+\tilde{a})+\frac{B}{\acute{a}}(\acute{a}-\tilde{a})u^{*} & (3.30)\\ w^{*}=\left\{\frac{B}{A\acute{a}}\left[1+\frac{\tilde{a}}{1-\acute{a}}(1-u^{*})\right]+\left[\ddot{a}_K-\frac{1-\acute{a}+\tilde{a}}{1-\acute{a}}\ddot{a}_H\right]\right\}^{\frac{1}{\acute{a}-1}}u^{*} & (3.31)\end{cases}$$

D . **另一組簡化變數系統**

(u_t, x_t, z_t)**三變數，其中** $z_t=w_t^{\sim-1}u_t^{1-\sim}$

則

$$z^{*}=\frac{B}{A-\acute{a}}\left(\frac{1-a+\tilde{a}}{1-\acute{a}}-\frac{\tilde{a}}{1-\acute{a}}u^{*}\right)+\ddot{a}^{*} \qquad (3.32)$$

$$\text{¢}^{*}=\text{¢}_K-\frac{1-\sim+\text{¥}}{1-\sim}\text{¢}_H$$

又 $\ln z_t=(1-\sim)(\ln n_t-\ln w_t)$

$$\text{¥}_{z_t}=(1-\sim)(\ln n_t-\ln w_t) \qquad (3.33)$$

且

$$\yen_{x_t} = (\frac{\sim}{=} - 1) A z_t + x_t + \left[¢_K (1 - \frac{1}{=}) - \frac{p}{=} \right] \tag{3.34}$$

$$\yen_{n_t} = \frac{B}{\sim}(1 - \sim + \yen) + \frac{B}{\sim}(\sim - \yen) u_t - x_t \tag{3.35}$$

又 $\yen_{u^*} = 0 \qquad 0 = \frac{B}{\sim}(1 - \sim + \yen) + \frac{B}{\sim}(\sim - \yen) u^* - x_t$ (3.36)

(3.35)減(3.36)式得到

$$\begin{cases} \tilde{a}_{u_t} = \frac{B}{á}(á - \tilde{a})(u_t - u^*) - (x_t - x^*) & (3.37) \\ \tilde{a}_{x_t} = \left(\frac{á - è}{è} \right) A(z_t - z^*) + (x_t - x^*) & (3.38) \\ \tilde{a}_{w_t} = A(z_t - z^*) - (x_t - x^*) + \frac{1 - á + \tilde{a}}{1 - á} B(u_t - u^*) & (3.39) \\ \tilde{a}_{z_t} = -(1 - á) A(z_t - z^*) - \frac{\tilde{a}}{á} B(u_t - u^*) & (3.40) \end{cases}$$

(3.37)-(3.40)經過對數線性轉換得到

$$\begin{cases} \yen_{u_t} = \frac{B}{\sim}(\sim - \yen) u^* (\ln u_t - \ln u^*) - x^* (\ln x_t - \ln x^*) \\ \yen_{x_t} = \frac{\sim - -}{=} A z^* (\ln z_t - \ln z^*) + x^* (\ln x_t - \ln x^*) \\ \yen_{z_t} = -(1 - \sim) A z^* (\ln z_t - \ln z^*) - \frac{\yen}{\sim} u^* (\ln u_t - \ln u^*) \end{cases}$$

經間斷逼近

$$\begin{cases} \Delta \ln u_t = \frac{B}{\sim}(\sim - \yen) u^* (\ln u_{t-1} - \ln u^*) - x^* (\ln x_{t-1} - \ln x^*) \\ \Delta \ln x_t = \frac{\sim - -}{=} A z^* (\ln z_{t-1} - \ln z^*) + x^* (\ln x_{t-1} - \ln x^*) \\ \Delta \ln z_t = -(1 - \sim) A z^* (\ln z_{t-1} - \ln z^*) - \frac{\yen}{\sim} u^* (\ln u_{t-1} - \ln u^*) \end{cases}$$

3-3-2 計量化模型

(A)從 (3.21),(3.29),(3.30) 和 (3.31)式

$$\begin{cases}\ln Y_t - \sim \ln K_t - (1-\sim)\ln u_t - (1-\sim+¥)\ln H_t = y_{1t} + \ln A_t \\ \ln u_t = \ln u^* + y_{2t} \\ \ln x_t = \ln x^* + y_{3t} \\ \ln w_t = \ln w^* + y_{4t}\end{cases}$$

其中$(y_{1t}, y_{2t}, y_{3t}, y_{4t})$ **為穩定序列過程。**

又 $\ln x_t = \ln C_t - \ln K_t$

$$\ln w_t = \ln K_t - \frac{1-\sim+¥}{1-\sim}\ln H_t$$

得到

$$\begin{cases}\ln C_t - \ln K_t = \ln x^* + y_{2t} \\ \ln K_t - \dfrac{1-\sim+¥}{1-\sim} H_t = \ln w^* + y_{3t} \\ \ln Y_t - \sim \ln K_t = \ln A + (1-\sim)\ln u_t + y_{1t}\end{cases}$$

Y_t, H_t, C_t, K_t.**中有三個共積關係**

(B) Y_T, H_t, K_t, C_t**的傳遞動態**

令 $¥_Y^*, ¥_K^*, ¥_H^*, ¥_C^*$ **為** Y_t, K_t, H_t **和** C_t**在定態時的成長率**

$$¥_C^* - ¥_K^* = ¥_{x^*} = 0 \Rightarrow ¥_C^* = ¥_K^*$$

$$¥_w^* = ¥_c^* + ¥_H^* \frac{1-\sim+¥}{1-\sim} = 0 \Rightarrow ¥_{K^*} = \frac{1-\sim+¥}{1-\sim} ¥_H^*$$

由(3.21)**式可導成**

$$¥_Y^* = \sim ¥_K^* + (1-\sim+¥)¥_H^* + (1-\sim)¥_u^* = ¥_K^*$$

因此

$$\begin{cases}¥^* = ¥_K^* = ¥_C^* = ¥_Y^* \\ ¥_H^* = \dfrac{1-\sim}{1-\sim+¥} ¥^*\end{cases}$$

(a) H_t**的成長率**

由(3.22), $¥_H = B(1-u_t) - ¢_H$

$$¥_H^* = B(1-u^*{}_t) - ¢_H$$

相減得

$$¥_H = ¥_H^* - B(u_t - u^*)$$

對數線性化得

$$¥_H = ¥_H^* - Bu^*(\ln u_t - \ln u^*)$$

間斷逼近

$$\Delta \ln u_t = \frac{B}{\sim}(\sim - ¥)u^*(\ln u_{t-1} - \ln u^*)$$

(a) u_t 的成長率

$$\Delta \ln u_t = \frac{B}{\sim}(\sim - ¥)u^*(\ln u_{t-1} - \ln u^*) - x(\ln x_{t-1} - \ln x^*)$$

(b) 由 (3.25) 和 w_t 的定義知

$$¥_{ct} = \frac{1}{=}(A\sim u^{1-\sim} w^{\sim-1} - \text{¢}_K - p)$$

$$¥_c^* = \frac{1}{=}(A\sim u^{1-\sim} w^{\sim-1} - \text{¢}_K - p)$$

$$¥_{ct} = ¥_t^* + \frac{1}{=}A\sim(z_t - z^*)$$

對數線性化

$$¥_{ct} = ¥^* + \frac{1}{=}A\sim z^*(\ln z_t - \ln z^*)$$

間斷逼近

$$¥_{ct} = ¥^* + \frac{1}{=}A\sim z^*(\ln z_{t-1} - \ln z^*)$$

(c) K_t 的成長率

$$¥_{Kt} = ¥_{ct} - ¥_{xt}$$

$$¥^* + \frac{A-\sim}{=} z^*(1 - \sim + \text{¯})(\ln z_{t-1} - \ln z^*) - x^*(\ln x_{t-1} - \ln x^*)$$

(e) Y_t 的成長率

$$¥_{Yt} = \sim ¥_{Kt} + (1-\sim)¥u_t + (1 - \sim + ¥)¥_{Ht} + Y_{1t} - Y_{1t-1}$$

$$¥_Y^* = \sim ¥_K^* + (1-\sim)r_u^* + (1 - \sim + ¥)¥_H^*$$

$$¥_Y^* = ¥_Y^* + \sim(¥_{Kt} - ¥_K^*) + (1-\sim)(¥_{ut} - ¥_u^*) + (1 - \sim + ¥)(¥_{Ht} - ¥_H^*) + Y_{1t} - Y_{1t-1}$$

注意其中

$$\ln z_t = (1-\sim)(\ln u_t - \ln w_t)$$

$$\ln z_t - \ln z_t^* = (1-\sim)(\ln u_t - \ln u^*) - (1-\sim)(\ln w_t - \ln w^*)$$

整理最後得如下 VECM 型式

$$\begin{cases} \gamma_{ct} = \gamma^* + \beta_{Cw}(\ln w_{t-1} - \ln w^*) + \beta_{Cu}(\ln u_{t-1} - \ln u^*) \\ \gamma_{Kt} = \gamma^* + \beta_{Kw}(\ln w_{t-1} - \ln w^*) + \beta_{Ku}(\ln x_{t-1} - \ln x^*) + \beta_{Eu}(\ln u_{t-1} - \ln u^*) \\ \gamma_{Ht} = \gamma^*_H + \beta_{Hw}(\ln u_{t-1} - \ln u^*) \\ \gamma_{Yt} = \gamma^* + \beta_{Yw}(\ln w_{t-1} - \ln w^*) + \beta_{yt}(\ln x_{t-1} - \ln x^*) + \beta_{yu}(\ln u_{t-1} - \ln u^*) y_{1,t-1} + y_{1t} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \Delta \ln Y_t \\ \Delta \ln C_t \\ \Delta \ln H_t \\ \Delta \ln K_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma^* \\ \gamma^* \\ \gamma^*_H \\ \gamma^* \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & \beta_{yt} & \beta_{yw} \\ 0 & 0 & \beta_{cw} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_{Kw} & \beta_{Kw} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{1t-1} \\ y_{2t-1} \\ y_{3t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_{yu}(\ln u_{t-1} - \ln u^*) + y_{1t} \\ \beta_{cu}(\ln u_{t-1} - \ln u^*) + \varepsilon_{2t} \\ \beta_{Hu}(\ln u_{t-1} - \ln u^*) + \varepsilon_{3t} \\ \beta_{Ku}(\ln u_{t-1} - \ln u^*) + \varepsilon_{4t} \end{pmatrix}$$

3-4　AK 模型

3-4-1　AK 模型推導

人力資本和實體資本單部門模型 (Barro-Sala-i-Martin Chapter 4.2)，**本小節的目的是要說明，當每人生產函數對每人實體資本和人力資本為規模報酬不變，且人力資本累積和實體資本一樣從單一產品中注入時，則人力資本會變為內生選擇，此種模型可化為看似對實體資本** K **邊際報酬不變的** AK **模型。這種設定只是可以化為** AK **模型中的其中一種模型，目的是在說明** AK **模型的合理性。變數仍然以每人為單位** K **和** H **分別為實體資本和人力資本**

$$Y = BK^{\alpha} H^{1-\alpha} = BK\left(\frac{H}{K}\right)^{1-\alpha}$$ **生產函數**

$$\frac{\partial Y}{\partial K} = \alpha B\left(\frac{H}{K}\right)^{1-\alpha}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial H} = (1-\alpha)B\left(\frac{H}{K}\right)^{-\alpha}$$

令 $R_K(R_H)$ **為要素租金，則兩種資本報酬分別為** $R_K - \delta_K$ **和** $R_H - \delta_H$ **其中** $\delta_K(\delta_H)$ **為折舊率，假設** $R_K = \dfrac{\partial Y}{\partial K}$ **，** $R_H = \partial Y / \partial H$,

由於模型假設體系生產單一產品，人力資本累積的來源和商品或實體資本相同，所以市場均衡時滿足兩種資本報酬率相同

$R_K - ¢_K = R_H - ¢_H$

可得 $\sim B\left(\frac{H}{K}\right)^{1-\sim} - ¢_K = (1-\sim)B\left(\frac{H}{K}\right)^{\sim} - ¢_H$

解為 $\left(\frac{H}{K}\right) = h(\sim, B, ¢_K, ¢_H) = \overline{A}$ **為一定值**

$Y = B \cdot \overline{A}K$

$Y = AK$

即為 AK **模型的型式**

其中 $A = \overline{A} \cdot B$

3-4-2 AK 模型

生產函數

$Y = A \cdot K$

$y = A \cdot k$

其中 $k = \frac{K}{L}, y = \frac{Y}{L}$

(a) **家計單位極大化**

$$U = \int_0^{\infty} e^{-(p-n)t} \frac{c_t^{1-–}}{1-–} at$$

s.t. $\dot{k} = k(r-n) - c$ **資本累積限制式**

其中 r:**報酬率** n: **人口成長率**

最適消費配置

$$\dot{c}/c = \frac{1}{–}(r-p)$$

(b) **廠商行為**

資本邊際生產力 $r + ¢ \Rightarrow r = A - ¢$

均衡成長

$$\begin{cases} \dot{c}_t/c_t = \frac{1}{–}(A - ¢ - p) \\ \dot{k}_t = k_t(A - ¢ - n) - C_t \end{cases}$$

$$\dot{k}_t/k_t = (A - ¢ - n) - \frac{C_t}{k_t}$$

Barro-Sala-i-Martin **證明**(p.143)

$C(t) = ¤k(K)$

$¤ = (A - ¢)(\frac{\bar{} - 1}{-}) + \frac{p}{-} - n$

$\dot{c}_t / c_t = \dot{k}_t / k_t = \frac{1}{-}(A - ¢ - p)$

又從 $y_t = Ak_t$

得 $¥_{y_t} = \dot{y}_t / y_t = ¥_{c_t} = ¥_{k_t}$

而典型的 AK **模型沒有傳遞動態**

3-4-3 長期關係

生產函數

$$\log Y - \log K = \log A \qquad (3.41)$$

兩種資本存量

$$\log H - \log K = \log \bar{A} \qquad (3.42)$$

原來的生產函數

$$\log Y - \log B - á \log K - (1 - á) \log H = 0 \qquad (3.43)$$

(3.42)**式乘上** ~ + (3.43)**式** = (3.41)**式**

所以上三式中有兩個線性獨立共積關係

3-4-4 計量化模型

$$\begin{cases} \log Y_t - \log B - \sim \log K_t - (1 - \sim) \log H_t = y_{1t} \\ \log H_t - \log K_t = \log \bar{A} + y_{2t} \end{cases}$$

Y_t, H_t, K_t**三個變數中有兩個共積關係**

又儲蓄率為

$$s = \frac{S}{Y} = \frac{\dot{K} + ¢K}{Y} = \frac{1}{A}(\frac{\dot{K}}{K} + ¢)$$

$$=\left[\frac{1}{A}(¥_K+n+¢)\right]$$

$$\frac{C}{Y}=(1-s)$$

$$\ln C-\ln Y=(1-s)$$

所以 Y_t,K_t,H_t,C_t **中有三個共積關係**

$$\begin{cases}\ln C_t-\ln Y_t=\ln(-s)+y_{3t} & (3.44)\\ \log Y_t-á\log K_t-(1-á)\log H_t=\log B+y_{1t} & (3.45)\\ \log H_t-\log K_t=\log\overline{A}+y_{2t} & (3.46)\end{cases}$$

式(3.45)**也可換為** $\log Y-\log K=\log A+Y_{1t}^{*}$

動態

$$\Delta\log Y_t=¥+£_{1t}$$
$$\Delta\log K_t=¥+£_{2t}$$
$$\Delta\log H_t=¥+£_{3t}$$
$$\Delta\log C_t=¥+£_{4t}$$

$$¥=\frac{1}{-}(A-¢-p)$$

VECM **型式為**

$$\begin{pmatrix}\Delta\log Y_t\\ \Delta\log K_t\\ \Delta\log H_t\\ \Delta\log C_t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}¥\\ ¥\\ ¥\\ ¥\end{pmatrix}+(\bullet)\begin{pmatrix}y_{t-1}\\ y_{2t-1}\\ y_{3t-1}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}£_{t1}\\ £_{t2}\\ £_{t3}\\ £_{t4}\end{pmatrix}$$

第四節 實證的共積分析法

共積(Cointegration)**分析法近來成為總體資料時間序列資料計量分析流行使用的方法，因為它改進了許多傳統時間序列方法的缺失。**VAR **法是以** OLS **為解法，不能解決非穩定序列**(nonstationary variable)**的虛假迴歸的問題，而將經濟變數取差分之後再用** VAR **法雖然可以避開這個問題，但是卻會失去探索變數間長期均衡關係的資訊。總體經濟的研究雖然對變數背後最可**

能的 DGP 很有興趣，但結構性的經濟理論仍是許多學者關注的焦點，以本文的經濟成長實證為例，最基本的目的是要檢視哪些經濟成長模型可以大致符合台灣的總體時間序列資料。

而不同的經濟理論都有不同的結構設定和先驗的結論，所以結構分析法(structural method)計量方法或許適合這個工作，但是結構分析法的問題在於沒有明確的方法去比較不同的理論對資料的適切程度好壞，同時內生變數存在於等號兩邊的問題也使得估變的困難。而本文想要對不同模型的長期均衡結果做檢定，仍是以共積分析較為理想。共積是指兩個以上且 I(1)以上的經濟變數如果有共同的資料產生特性，那麼經過某個特定的線性組合後的資料會產生降階的情形（Granger1986）。這種情形的發生代表這些經濟變數存有長期的均衡關係。Granger 和 Engle(1987)並提供一個以經濟變數之線組合的殘差來檢定均衡假說的方法，該穩定的線性組合稱為共積方程式。這個觀念由 Granger 提出後受到廣泛的應用，且在方法上也不斷的改進，到 1989 年 Johansen 發展出以概似估計為基礎的(likelihood based)的共積分析法，本文所應用的計量方法就是以 johansen 89 到 95 年間據此發展出來的估計和各種檢定方法。以下簡述 Johansen 的分析原理。

4.1 Johansen 的分析原理

Johansen 方法由 VAR 出發，VAR 較之 structural method 是較一般化的 DGP，而具有共積關係的經濟變數可以整理為 VAR 裡的一種特殊情況，因而對先驗的經濟理論的檢定即是檢定資料是否符合 VAR 裡的這種特殊情況。

VAR(k)模型經過移項可以整理為:

$$\mathbf{a} Y_t = \mathbf{m} Y_{t-1} + \sum_{i=1}^{k-1} \mathbf{d}_i \mathbf{a} Y_{t-i} + \mathbf{c} D_t + £_t \qquad (4.1)$$

其中 Y_t 為要探討的經濟變數形成的向量，D_t 為季節虛擬變數。這個型式跟把變數取一階差分再來做 VAR 很相似，差別在這裡多了一項Π Y_{t-1}，Johansen 的方法就是利用這一項透露出一階差分 VAR 沒有辦法透露出的長期均衡資訊。如果 Y_t 中的變數均為Ｉ(1)，而且有 r 個共積向量，也就是有 r

種 Y_t 的獨立線性組合可以降階成 I(0)，則可以表達成以下的 reduced rank condition

$$\mathbf{m} = \sim \ '$$

其中 α 和 β 為 $n\times r$ 的矩陣，rank 為 r，n 為 Y 裡經濟變數的個數，則(4-1)可改寫為誤差修正模型（reduced form error correction model）：

$$\mathbf{a}Y_t = \sim \ 'Y_{t-1} + \sum_{i=1}^{k-1} \mathbf{d}_i \mathbf{a} Y_{t-i} + \mathbf{c} D_t + \pounds_t \qquad (4.2)$$

令最多有 r 個共積向量的模型假設稱為 H(r)，由於在 H(r)中 rank(Π)一定小於或等於 r，所以

$$H(0) \subset \Lambda \subset H(r) \subset \Lambda \subset H(k),$$

其中 $H(k)$為 unrestricted VAR 模型，而 H(0)則對應於 Π＝0，也就是先取差分再做 VAR 的模型，H(r)則介於兩者之間，為受限之 VAR 模型，也是虛無假設其有 r 條共積關係的模型。此模型設定限制了內生變數的長期行為以使其收斂於共積關係，而同時允許短期的誤差修正動態，共積項即為誤差修正項，因為偏離長期均衡的部分會被短期調整所修正。

4-2　檢定共積向量的數目

一開始可能不知道有幾個共積關係，所以在估計變數共積矩陣 β 之前，要先檢定 rank(Π)＝r 的虛無假設是否成立以決定共積向量的數目，同時經濟理論先驗上會暗示有特定個共積向量，我們會希望檢定出來的共積向量數目會跟理論暗示的數目一樣，或者是大於模型暗示的數目。

虛無假設 H_0 : rank(β) = r，令此假設下的模型稱為 K_1

令 $Z_{0t} = \mathbf{a}Y_t$，$Z_{1t} = Y_{t-1}$，$Z_{2t}(n(k-1)+m) = (\mathbf{a}Y_{t-1}', \ldots, \mathbf{a}Y_{t-K+1}', \mathbf{D}_t')'$，且 $\mathbf{v}(n\times(n(k-1)+m))$為對應於 Z_{2t} 的參數矩陣($\mathbf{d}_1 \quad \mathbf{d}_2 \ldots \mathbf{d}_{k-1}\ \mathbf{c}$)，則(4-2)式可寫為

$$Z_{0t} = \sim \;' Z_{1t} + \mathbf{v} Z_{2t} + \pounds_t,\ t = 1,2,\ldots\ldots T \qquad \pounds_t \sim \mathbf{N}(\mathbf{0}, \mathbf{t}) \tag{4.3}$$

則除去常數的概似函數為

$$\log L(\mathbf{v}, \sim, \;, \mathbf{t})$$

$$= -\frac{1}{2} T\log\left|\mathbf{t}\right| - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T} (Z_{0t} - \acute{a}\,\hat{a}' Z_{1t} - \mathbf{v} Z_{2t})' \mathbf{t}^{-1} (Z_{0t} - \acute{a}\,\hat{a}' Z_{1t} - \mathbf{v} Z_{2t}) \tag{4.4}$$

針對 v 的一階條件 $(Z_{0t} - \acute{a}\,\hat{a}' Z_{1t} - \hat{\mathbf{v}} Z_{2t}) Z_{2t}' = 0$**，求出 v 的估計式代回**(4-4)
為 concentrated **概似函數**

$$\log L(\sim, \;, \mathbf{t})$$

$$= -\frac{1}{2} \mathrm{T}\log\left|\grave{\mathrm{U}}\right| - \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{t}=1}^{\mathbf{T}} (\mathbf{R}_{0t} - \acute{a}\,\hat{a}' \mathbf{R}_{1t})' \grave{\mathrm{U}}^{-1} (\mathbf{R}_{0t} - \acute{a}\,\hat{a}' \mathbf{R}_{1t})$$

其中 R_{0t} **為** Z_{0t} **對** Z_{1t} **做** OLS **得的殘差項，**R_{0t} **為** Z_{1t} **對** Z_{1t} **做** OLS **所得的殘差項。上式等同於迴歸式**

$$R_{0t} = \acute{a}\,\hat{a}' R_{1t} + \hat{\mathring{a}}_t \tag{4.5}$$

參考 Anderson(1951)**的** reduced rank regression **方法估計此迴歸式**(**原理略過**)**。令** $S_{ij} = T^{-1} \Sigma_t R_{it} R'_{jt}$**，** $i,j = 0,1$**，計算矩陣** $S_{11}^{-1} S_{10} S_{00}^{-1} S_{01}$ **的特徵值** $1 > \hat{\ddot{e}}_1 > \Lambda > \hat{\ddot{e}}_m > 0$**，與特徵向量** $\hat{V} = (\hat{v}_1, \Lambda, \hat{v}_m)$**，其中特徵向量符合** $\hat{V}' S_{11} \hat{V} = I_n$ **的標準化。則**

$$\hat{\ } = (\hat{v}_1, \Lambda, \hat{v}_r)$$

trace **檢定統計量**

$$-2\log Q(\,K_1 = H(r)\,|\,H(n)) = -T\sum_{i=r+1}^{n}\log(1-\text{ë}_{\,i})$$

而其他參數則由 ˆ代入(4-2)**用** OLS **求出。**

4-3　對共積向量 β 的限制做假設檢定

由上小節的檢定我們可以決定出一組經濟變數中共積向量的數目。但上節算出的 ˆ不一定是具有經濟意義的共積向量，因為任意兩個共積向量的線性組合仍然是共積向量，所以 ˆ只是共積向量的 base space**。本節的目的就是根據經濟理論上的先驗判斷來認定出一組或數組共積向量，同時檢定該經濟理論對均衡狀況的描述是否符合資料的表現。對共積向量的檢定隨假設型式的不同而方法也稍有不同，**4-3-1 **是所有共積向量是否均符合相同限制的檢定，**4-3-2 **及** 4-3-3 **是對某單一特定的共積向量是否符合限制做檢定，**4-3-4 **則對** r **條共積向量是否分別符合不同限制做聯合的檢定。並討論有關認定上的問題。**

4-3-1　r 個共積向量符合相同限制

Johansen(1988)**最早的受限概似估計是考慮** r **個共積向量全部符合相同的限制。譬如所有的共積向量都不包含某個變數，或是所有共積向量的兩個變數維持固定的比例等。對共積向量的限制表達為** $\boldsymbol{D}\quad Y_{t-1}$**，**$\boldsymbol{D}$ **為** $n \times q$ **階矩陣，例如要檢定四個變數中的第一個變數不包含在共積關係中，限制可表達為**

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{D'Y}_{t-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y1_{t-1} \\ y2_{t-1} \\ y3_{t-1} \\ y4_{t-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y2_{t-1} \\ y3_{t-1} \\ y4_{t-1} \end{bmatrix}$$

此時 q = 3**。因此**(4-2)**改寫為受限的** VAR **型式**

$$\mathbf{a}Y_t = \acute{a}\quad 'D'Y_{t-1} + \sum_{i=1}^{k-1}\mathbf{d}_i\mathbf{a}Y_{t-i} + \mathbf{c}D_t + \pounds_t$$

其他分析同未受限模型，最後計算矩陣(D　S_{11}D)$^{-1}$(D　S_{10})S_{00}^{-1}(S_{01}D)的特徵值$1 > \tilde{\ddot{e}}_1 > \Lambda > \tilde{\ddot{e}}_m > 0$。受限概似函數為

$$-\frac{Tn}{2}\log(2\eth) - \frac{Tn}{2} - \frac{T}{2}\log\left|S_{00}\right| - \frac{T}{2}\sum_{i=1}^{r}\log(1-\tilde{\ddot{e}}_i)$$

以 r 個共積向量之本受限模型為虛無假設，而以 r 個共積向量的不受限模型(即上小節的 K_1 模型)為對立假設之概似比檢定統計量為

$$-T\sum_{i=1}^{r}\log(1-\hat{\ddot{e}}_i) + T\sum_{i=1}^{r}\log(1-\tilde{\ddot{e}}_i)$$

所以統計量愈小(p-value 愈大)愈不拒絕虛無假設。Johansen 證明該統計量會趨近卡方分配，自由度為 r(n-q)。

4-3-2　已確知某個共積向量

如果經濟理論對均衡的描述可以認定出一個確定數值的共積向量，則可建立一個虛無假設 H_0 : **β = (b**,Ö **)**，其中 **b** 為 n × 1 的該共積向量，Ö 為 n × (r-1)的不受限待估矩陣。令該模型為 $K_2 \subset H(r)$，亦即該模型仍為假設有 r 條共積向量的模型，但進一步限制了其中一條共積向量的值，而以 4-2 認定的 r 條共積向量模型 H(r)為對立假設做概似比檢定。

將~也對應於 的兩部分拆成($\sim_1$,$\sim_2$)，則**m** = ~ ’ = $\sim_1$**b**’+ $\sim_2$Ö’，則(4-5)變成

$$R_{0t} = \sim_1 \mathbf{b}' R_{1t} + \sim_2 \mathbf{c}' R_{1t} + \pounds \qquad (4\text{-}6)$$

再利用一次 concentrated 法將 R_{0t} 和 R_{1t} 對 **b**’R_{1t} 做 OLS 得新的殘差

$$R_{0.\mathrm{bt}} = R_{0t} - S_{01}b(b'S_{11}b)^{-1}b'R_{1t}$$

$$R_{1.\mathrm{bt}} = R_{1t} - S_{11}b(b'S_{11}b)^{-1}b'R_{1t}$$

和乘積動差矩陣

$$S_{\mathrm{ij.b}} = S_{ij} - S_{i1}b(b'S_{11}b)^{-1}b'S_{1j} \qquad i,j = 0, 1$$

先求 $S_{11.b}$ **的特徵值** $\lambda_1 > \Lambda > \lambda_{n-1} > \lambda_n = 0$ **與對應的特徵向量**$(e_1,\ldots, e_m)$**。令**

$$` = (\mathbf{e}_1, \Lambda\ \mathbf{e}_{n-1})\mathbf{diag}\,(\tau_1^{-1/2}, \Lambda\ , \tau_{n-1}^{-1/2})$$

然後求 $\mathbf{X}$ $S_{10.b}S_{00.b}^{-1}S_{01.b}\mathbf{X}$ **的特徵值** $1 > \hat{\lambda}_1 > \Lambda > \hat{\lambda}_{n-1}$ **和求出**$(b\ S_{11}b)^{-1}(b\ S_{10})S_{00}^{-1}(S_{01}b)$**的最大特徵值** $\hat{\rho}_0$**。該虛無假設對立於** K_1 **模型的檢定統計量為**

$$-2\ \log\ \mathbf{Q}\ (K_2|K_1) = T\ln\frac{(1-\hat{\rho})(1-\hat{\lambda}_1)\Lambda\ (1-\hat{\lambda}_{r-1})}{(1-\tilde{\lambda}_1)\Lambda\ (1-\tilde{\lambda}_r)}$$

$\tilde{\lambda}_1,\ldots,\tilde{\lambda}_r$**為** 4-2 **節** K_1 **模型下** $S_{11}^{-1}S_{10}S_{00}^{-1}S_{01}$ **的最大** r **個特徵值(原本標為** $\hat{\lambda}$,**但本小節中** $\hat{\lambda}$**為** K_2**模型的特徵值，故改標號以區分，以後各小節亦相同不重述)，並且** Johansen **證明**-2 log $\mathbf{Q}(K_2|K_1)$**的極限分配為** $x^2(n-r)$**。**

4-3-3　某個共積向量符合特定限制式

例如生產函數　$Y = A^{\beta}L^{\alpha}K^{1-\alpha}$**，取對數後成為**

$$\mathrm{Log}\ Y = \boldsymbol{\beta}\ \mathrm{Log}\ A + \alpha\ \mathrm{Log}\ L + (1-\alpha)\ \mathrm{Log}\ K$$

如果每期的生產活動大致符合以上形式的生產函數，那麼 Log L **的係數加上** Log K **的係數會等於** Log Y **的係數，而** Log A **的係數沒有特別的限定。也就**

是虛無假設的型式為 R β = 0，其中我們重新定義向量

$$\mathbf{Y} = (\text{Log Y, Log A ,Log L , Log K})'$$

$$\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)'$$

為對應 Y 的 4 個係數，則上述虛無假設的 R 為(-1,0,1,1)。

但是 Johansen 的分析法不是用 R β = 0的形式來檢定虛無假設，而是取 $H = R_{\perp}$把虛無假設改寫成 $\beta = H\varphi$，其中 $H(n \times s)$為已知而 $\varphi(s\times1)$ 為要估計的參數。上述例子對應的 H 為

$$H = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{使得} \quad \begin{bmatrix} \beta_1 = -(\varphi_3 + \varphi_4) \\ \beta_2 = \varphi_2 \\ \beta_3 = \varphi_3 \\ \beta_4 = \varphi_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \end{bmatrix}$$

嚴格的說我們是要檢定某個單一共積向量符合 $\beta = H\varphi$且容許存在其他不受限制的共積向量，所以本節的虛無假設形式為 $H_0 : \beta = (H\varphi, \psi)$，$\psi$ 為 $n \times (r-1)$的未知矩陣，令此虛無假設下的模型稱為 K_3。檢定原理類似上小節，詳見 Johansen(1992,1995)。

概似比檢定統定統計量為

$$-2 \log \mathbf{Q}(K_3|K_1) = T \ln \frac{(1-\tilde{\rho})(1-\hat{\lambda}_1)\Lambda(1-\hat{\lambda}_{r-1})}{(1-\tilde{\lambda}_1)\Lambda(1-\tilde{\lambda}_r)}$$

$\hat{\lambda}_i$為特定形式的特徵值，極限分配為 $x^2(n - r - s + 1)$ 。

4-3-4　r個共積向量的的認定，估計，檢定

前節的檢定是針對單一的共積向量，是否會符合某單一個經濟均衡理論。但欲探討的經濟變數間可以有一個以上的長期均衡關係。譬如之前有關生產函數的例子，變數間除了長期大致符合生產函數關係之外，也可能有另

外的長期關係，譬如長期符合定態(steady state)的關係，當我們要同時檢定這兩種長期關係是否同時存在時，就要同時檢定二個共積向量的限制。可表達為長期共積關係之係數矩陣 B = ($\hat{a}_1,\ldots\hat{a}r$)受到的限制為

$\mathbf{R}_i'\beta_i = 0 \quad \mathbf{i} = 1,\Lambda\ \mathbf{r}$ 或以上小節的方法等價表達為

$B = (\boldsymbol{H}_1 \boldsymbol{\xi}_1, \ldots, \boldsymbol{H}_r \boldsymbol{\xi}_r)$

一般化的情形則為，經由 4-2 節的方法確定出有 r 條共積向量後，再經由經濟理論個別限定出共積向量的限制，在這些限制下用前兩小節的方法求出估計和檢定統計量，以分別確定 r 個限制理論被不被資料所支持，最後，再以本節的方法同時估計檢定全部 r 個共積向量的限制。不過在做估計檢定之前，要先看這 r 個限制，符不符合可認定條件(Johansen 1995)，若限制符合可認定條件，則估計出的共積向量可唯一確定。可認定條件如下：

限制矩陣 $R_1,\ldots,R_r$ 可唯一認定第 i 個受限共積向量若且唯若, 對所有 m = 1,…,r-1，且對所有下標 $1\le j_1<\ldots<j_m\le r$ 不包括 i，下式成立

$\mathrm{rank}(R_i'H_{j1},\ldots, R_i'H_{jm}) \ge m$

也就是若某個特定的 i 符合上述條件，則 R_i 可唯一認定第 i 個共積向量。
估計與檢定的方法概念上與前面相同, 要用到 swiching algoritm 反覆求取 ，過程略，最後直到 ˆ收斂，得到 r 組特性根，H$_0$ 的概似比統計量為

$-2\log\mathbf{Q}(K_4|K_1) = T\ln\dfrac{(1-\hat{a}_1)\Lambda\,(1-\hat{a}_r)}{(1-\tilde{a}_1)\Lambda\,(1-\tilde{a}_r)}$，極限分配為卡方，自由度為 $\sum_{i=1}^{r}(N-G-s_i+1)$。

4-4 調整係數的估計和檢定

根據上節的方法可以求出共積向量的估計值，再把此估計值代回(4-2)式的縮簡誤差修正式，此時原式形成 SURE 的型式，分別用 OLS 可估計出剩下

的短期參數Γ和α等。至此，長短期的係數都估計完成。但本文仍須進一步探討短期調整係數的假設檢定，因為本文對經濟模型的推導最後均推為對短期調整係數有先驗上假設的 VECM 型式，且經濟變數是否為外生也可由檢定相關短期調整係數是否為零來判定，因此有必要對調整係數做認定及檢定以確定經濟模型的推導是否符合實際。

4-5　　其他計量討論

在進行以上共積分析之前，會先用 ADF 檢定來看變數是否具有 I(1)性質。並用 ADF 檢定，J.B 常態檢定和序列相關 Q 檢定來決定 VAR 中的落後期數。

第五節 實證結果

上一章簡介了共積關係的概念和 Johansen 分析法，本章則利用這些工具來對第三章的經濟成長理論做實證研究。首先我們會對模型中出現的變數先做例行的 ADF 檢定以確定是否具有 I(1)性質，接著決定 VAR 中的落後期數，然後對各別不同的成長模型所隱含的長期共積關係做估計檢定和 VECM 短期參數的估計檢定。整個計量過程以 Solow 成長模型為例做比較詳細的說明，後面其他模型則僅列重要過程和估計檢定結果，詳細估計檢定過程則列於附錄。

5-1　Solow 成長模型

5-1-1　資料說明

人力資本方面

先引用大部分學者的大方向，即以教育跟人力資本掛勾。在以往的文獻上，都是把焦點放在基礎教育上，如 Barro 先後用基礎教育的入學率和人口的識字率或完成基礎教育學歷的人口比例為代理變數。後來也有人認為基礎教育對生產的重要性沒有高等教育來的重要，所以嘗試用不同的學歷人口比例來代表人力資本的變化。

要特別說明的是，不論在理論模型或是計量模型的要求上，本文的長期共積分析對人力資本變數性質的要求要比跨國資料的研究更嚴格些才行。而以上

用學歷人口比例來代表人力資本變化的第一個問題就是，任何一個比例值一定小於一，且在實際資料上會在一個數值上停下來，然而在無論是哪一種成長理論模型，對人力資本的要求都是不斷成長的 I(1)變數，因為這是模型中每人經濟成長會有不斷成長的來源，而在共積分析上當然也要讓人力資本變數符合這個要求(近來的實證文獻上都開始嘗試用共積分析法分析總體理論，成長模型自不例外，但效果都不好，問題很有可能是出在人力資本變數的認定上面)。

最直接想到的補救方法就是考慮就業者的平均受教育年數，因為這個數值有成長的空間。雖然受教育年數的值沒有限制在一之內，但是仍然不可能一直增加，假設到了一個時候幾乎每個人都大學畢業，那麼教育年數這個變數就不太能再增長。如果要改進這個問題，除了考慮量的變化外，還要考慮質的變化，質的變化並不好衡量，我們姑且以教育的支出來代表。經過這樣子的修正，增加了用教育來代表人力資本的可行性。詳細資料計算如下

平均教育年數的計算:是一個相當粗略的計算，以當期就業者學歷來推算教育年數，小學畢業為六年，初中畢業為九年，依此類推，加總後再除以當期總就業人口推得:

$$\text{平均教育年數} = ((\text{小學畢業學歷就業人口}\times 6)+(\text{初中}\times 9)+(\text{高中職}\times 12)+(\text{五專}\times 14)+(\text{大學以上}\times 16))/\text{總就業人口}$$

資料本為月資料，採算數平均成季資料。主要缺點為大學以上資料沒有再細分，沒有區別出研究所碩士以上學歷。

平均教育質的計算:以教育經費來衡量。在理論模型中人力資本存量應該是以每人為單位，所以教育支出最好也是以每人為單位來衡量。一個最簡略的算法是利用中華民國教育統計中的教育經費占 GNP 比例這筆資料來粗估每年每人所受教育經費。

$$\text{每年每人受教育經費} = \frac{(\text{每年教育經費占}GNP\text{比例})\times(\text{當期GNP})\times\text{物價平減指數}}{\text{當期就業人口}}$$

這個算法最大的問題在於

當期的教育經費幾乎不可能反應到當期的就業者身上，也就是受教育的對像主要並不是就業者。因此我們可以考慮以這個數值的落後項來代表，譬如以5年前的教育支出來代表今日的就業者受教育素質(當然即使如此也不合理，因為就業者包含個種年齡層，他們所受的教育不是在 5 年前，更何況教育品質也不應該以一年的支出衡量。我們根據成長理論的內涵假設剛就業者的人力素質取決於教育的因素較大，而工作數年後的人力素質提昇則漸漸地來自於邊做邊學和職業訓練，這個想法約略可以合理化我們的做法)。

最後，我們把(平均教育年數)和(平均每人每年教育支出)出這兩個數值相乘做為人力資本的代理變數，由於以上提到的種種缺陷，使得這個數值不能代表一個非常精確的意義，但在概念上和資料單位上約略可以解釋為(當期平均每就業人口過去所受的總教育支出)。除了以上面這個數值直接做為人力資本代理變數之外，另外也嘗試設定此代理變數與人力資本的關係為

$$\text{人力資本}=(\text{平均每人總教育支出})^{\theta}$$

θ值的決定法，選取某個值使得實體資本 k 的長期平均成長率和(人力資本乘上勞動人口)的長期平均成長率相同。這是由規模報酬不變之下長期兩種生產要素的成長率會趨於一致的概念而來。

在勞動力方面

我們考慮兩種不同的方法。一種是單純取台灣地區人力資源統計月報中非農林漁牧業的就業勞動力，另外一種方法是取每期非農林漁牧業的總工作時數。詳細資料為分業別單月工時和分業別單月受雇人數，兩者相乘為分業別單月總投入工時，再加總成單月總投入工時，再轉換成季資料。這個資料的缺點在受雇人數跟勞動力有很大的差距，不包括企業經營者和自己做生意的人，而這些人又是創造台灣經濟重要的投入者。

在實體資本方面

AREMOS 的要素生產力資料己根據工商普查資料利用插補法推估每年的資本存量，該資本存量不包括土地，也未經價格平價。由於資本不含土地，因此前面提的勞動投入我們也不考慮農林漁牧等一級產業的人口。由於本文要做的是季資料，所以要再根據季投資和折舊來推估季資本存量。但是一季

的時間太短，我們找不到能夠把一級產業排除在外的投資和折舊資料，故而只能根據年資料中一級產業的投資占總投資的比例延用到季投資上，用插補法製作出資本存量的季資料，最後用 1991 年的價格平減指數平減。由於這個方法不盡精確，資本存量跟實際狀況一定有所出入，不過我們暫時容忍這個數值。

消費和產出

採用經過 1991 年價格平減後的總體消費和 GDP 產出，不區別政府部門和民間部門，因為本文模型沒有特別討論政府投資的特殊性質。也沒有將一級產業分出，因為農林漁牧業所生產的最終產品占總產出的比例相對低(許多是中間財不計在 GNP 中)，消費上和產出均不好區分。

5-1-2 檢定變數是否具有 I(1)性質

本節用 ADF 檢定來判斷變數是否具有 I(1)性質。又某些變數有時間趨勢和季節波動，為了方便和正確性我們一律用較一般化的模型來做 ADF 檢定，亦即包含常數項，時間趨勢和季節波動

$$\Delta y_t = \alpha + \mu t + \rho y_{t-1} + \phi_1 \Delta y_{t-1} + \ldots + \phi_k \Delta y_{t-k} + \theta_1 S_{1t} + \theta_2 S_{2t} + \theta_3 S_{3t} + \varepsilon_t$$

y_t 為單一經濟變數，S_{it} 為季節虛擬變數，我們要檢定的是 ρ 是否為零的虛無假設。至於落後項 k 的選取則按常例用 AIC 和 SC 的標準及用 Q 檢定看殘差是否為白噪音，最後再看 ADF 檢定統計量。

前者用到的變數 y_t, a_t, k_t, l_t。AIC 和 SC 選擇的期數差異甚大，先折中選取落後期數 $k = 4$，再用 Q 檢定檢查殘差項的估計值是否為白噪音。Q 檢定的落後期取 n/4 約等於 17，結果 Y 的殘差仍為自我相關，因而取 $k = 8$，才可不拒絕 Q 檢定，亦即殘差項為白噪音。在各變數的落後期模型決定下來之後，接著看係數 ρ 的估計值是否不拒絕 $\rho = 0$ 的虛無假設，如果不拒絕就代表變數具有 I(1)性質。

結果在以上決定的落後期數及 5%的顯著水準之下，$\rho = 0$ 的虛無假設均不被拒絕(檢定統計量為表中的 τ)。另外 $\mu = \rho = 0$ 的虛無假設亦不被拒絕(檢定統計量為 F)，所以我們視所有變數為 I(1)，且時間趨勢以常數項表達即可。

表 1 :ADF 檢定之一

	變數	lag	ρ	τ	F	Q
Solow	Yt	8	-0.0322	-0.6339	2.1000	11.388 (0.836)
	At	4	-0.3146	-2.0173	2.0555	15.198 (0.581)
	Kt	4	-0.0960	-3.0426	4.7312	12.757 (0.752)
	Lt	4	-0.1935	-2.1666	3.0117	9.3397 (0.929)
Ramsey	Ct	4	-0.0820	-1.9753	2.0966	13.990 (0.668)

5-1-3 共積關係的估計檢定

本節根據 Solow 成長模型討論共積關係。程序如第 4 章所提，先決定共積向量的數目 r，接著檢定各長短期先驗理論。

A) **檢定共積向量的數目**

如第 4 章所述，先設 Johansen 檢定需要的誤差修正模型，這裡我們先包含飄浮項和季節虛擬變數，這相當於 Johansen(1995)所提的五種設定中的第二種，時間趨勢以常數項表達而不設 t 在 var 中，因為 ADF 檢定已經檢定出 t 的係數不顯著的結論

$$\Delta Y_t = \mu + \Pi' Y_{t-1} + \sum_{i=1}^{k-1} \Gamma_i \Delta Y_{t-i} + \beta_1 S_{1t} + \beta_2 S_{2t} + \beta_3 S_{3t} + \varepsilon_t \qquad (5\text{-}1)$$

Yt = (y, a, k, l)’ **。首先要決定** VAR **中的落後期數** k**，**SC **模型精簡準則選取** k = 1 **或** k = 2**，**AIC **則選取** k = 7 **或** 8**。接著用** ADF **檢查殘差項行為，結果均**

符合 I(0)，再用 Q 檢定檢查殘差自我相關情形。按一般概似比檢定統計法皆需對母體分配種類做特定的假設，如 Johansen 法中誤差縮簡式的殘差假設符合複式常態分配且殘差項為白噪音，如此才能推導簡定統計量的分配。因此現實上的母體分配與假設的分配必須不能相差太遠，檢定才有意義。所以以上對殘差項為 I(0)及白噪音的假設只是相當基本的要求，也就是說，Q 檢定的結果比 AIC 或 SC 的結果更加重要，由於當落後項取太多或太少時都會發生個別變數的 Q 檢定結果十分不理想，因而我們必須暫時捨棄 AIC 和 SC 原則所選取的落後期數，而著重在殘差項是否為白噪音以及檢定殘差項是否符合常態分配，如果有兩個以上符合白噪音和常態的選擇，再依 AIC 等精簡原則選取。

結果依個別變數 Q 檢定量和 J.B 常態檢定所選擇符合條件的落後期數為 k = 5(見表 2)，也就是選取落後期間一年又一季，只有當 k = 4 時，每個變數的殘差項才能全部不拒絕白噪音和常態分配的虛無假設。此四種選擇之中，精簡性指標 AIC 和 SC 沒有特別顯示出哪一種期數選擇最佳，所以我們完全依據 Q 檢定量和 J.B 常態檢定結果取 k = 5。

要特別說明的是以上的 Q 檢定是針對單變數殘差項的序列相關檢定，如果要考慮跨變數殘差項的序列相關，則只有 k = 2 時才可不拒絕殘差為白噪音，但選 k = 2 會拒絕常態分配的虛無假設，且 Y 的殘差項的 Q 檢定也顯示會有序列相關。

表 2:各變數的殘差行為檢定

	k = 4		K = 5		k = 6		k = 7	
殘差	Q 檢定	J.B	Q 檢定	J.B	Q 檢定	J.B	Q 檢定	J.B
Y	21.288	0.532	16.551	0.991	31.972	4.626	43.020	4.918
K	18.210	4.224	21.728	2.724	18.529	3.964	13.387	8.161
L	19.473	0.335	14.803	0.344	14.554	0.529	16.433	0.940
A	13.219	6.567	8.177	4.147	22.401	0.466	15.167	0.544
全部	246.67 (0.00)	9.929 (0.27)	238.38 (0.00)	9.680 (0.29)	232.65 (0.00)	26.38 (0.10)	226.21 (0.00)	17.692 (0.02)

個別變數的 Q 檢定統計量為 $x^2(16)$, 10%臨界值為 23.542

個別變數的 J.B 常態檢定統計量為 $x^2(2)$, 10%臨界值為 4.60

k = 5 的檢定結果例於表 3，r 至多為 0 的虛無假設被拒絕(概似比統計量大於 5%的臨界值)，而 r 至多為 1 的的虛無假設不被拒絕，所以我們可以判斷這四個變數之中有一個共積向量。由於之前推導的 Solow 成長模型的長期均衡隱含有兩個共積向量，但是資料並不支持有兩個共積向量。

表 3 共積向量個數檢定

k = 5			5%	1 %
$\tilde{a}$	L-max	Trace	臨界值	臨界值
0.6060	61.4644	80.5704	47.21	54.46
0.1469	10.4857	19.1060	29.68	35.65
0.1224	8.6181	8.6204	15.41	20.04
0.0000	0.0022	0.0022	3.76	6.65

B) 對共積向量 β 的限制做假設檢定

我們可能會懷疑人力資本的代理變數 A 設定正不正確，至少我們應該檢定它有沒有在共積變數裡面。雖然就算檢定結果 A 存在於共積關係當中，也不能代表這個代理變數非常完善地呈現人力資本的狀況(因為教育年數和教育支出本來就有可能與國民所得有正相關)，至少比不顯著存在於共積關係中好。如果在稍後的外生檢定中，結果支持 A 為外生，那麼以 A 為代理變數的正當性就更為提高。這裡我們用到 4-3-1 提到的檢定方法，即所有共積向量均受相同限制的檢定。令虛無假設為人力資本代理變數不在共積關係之中，對立假設

為不受限模型，則 H 矩陣的型式為

$$H=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix} \quad \text{使得} \quad \begin{bmatrix}{}_1=\ddot{\ }_1\\{}_2=\ddot{\ }_2\\{}_3=\ddot{\ }_3\\{}_4=0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\ddot{\ }_1\\\ddot{\ }_2\\\ddot{\ }_3\end{bmatrix}$$

概似比統計量為 x(2) = 11.78，p-value = 0.00**，所以拒絕人力資本代理變數不在共積關係之內的虛無假設。也就是說我們用的人力資本的代理變數，顯著存在於共積關係之中。**

在 3-1 節的 Solow **成長模型最後隱含了兩個理論上的共積向量，一個是生產行為長期符合生產函數，另外一個是定態關係。**

生產函數要符合以下型式

$$\ln Y_t = \ln a_0 + \sim \ln K_t + (1-\sim)\ln A_t + (1-\sim)\ln L_t$$

限制可表達為 4-3-3 提到的方法，即單一共積向量符合特定限制

$$H_1 = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \textbf{使得 } \hat{a}_1 = \begin{bmatrix} {}_1 = -(\ddot{}_2 + \ddot{}_3) \\ {}_2 = \ddot{}_2 \\ {}_3 = \ddot{}_3 \\ {}_4 = \ddot{}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{}_2 \\ \ddot{}_3 \end{bmatrix} \qquad \hat{a}_2 \textbf{不受限}$$

用之前檢定出的共積向量數目 r = 1**，而生產函數限制可自由變動的參數數目** s = 2**，經濟變數數目** n = 4**，所以概似比統計量為自由度為**(n-s-r+1) = 2 **的卡方分配。概似比檢定統計量為**

-2 log $\mathbf{Q}(\mathbf{K}_3|\mathbf{K}_1)$= 4.21

p-value = 0.12**，所以在一般的顯著水準下不拒絕一階齊次生產函數的虛無假設。**

古典生產函數限制的估計結果如下。

$$\mathbf{ln\,Y_t} = -1.870 + 0.387\,\mathbf{ln\,K_t} + 0.613\,\mathbf{ln\,A_t} + 0.613\,\mathbf{ln\,L_t}$$

表 6　生產函數限制檢定

$\tilde{a}$	-Tln(1-**λ**)	$\hat{a}$	-Tln(1-**λ**)	~	2 log Θ (H_3|H_1

0.4114	48.801	0.3037		0.3962	1.62
0.3067	26.275				

另外一個共積向量的限制是變數間滿足長期定態關係

$$\ln K_t - \ln A_t - \ln L_t = \ln k^*{}_t$$

限制可表達為 4-3-1 提到的方法

b = (0 1 -1 -1)’

這裡我們尚未檢定定態時的每有效勞動資本存量是否為模型預示值，只先檢定每有效勞動資本存量是否為一穩定數列，所以共積向量中不包含常數項。

檢定統計量為

-2 log **Q** (**K**$_3$|**K**$_1$) = 13.560

卡方分配自由度為(n-r) = 4 – 2 = 2。1%**臨界值** 9.2103**，所以我們的資料無法證實定態假設。**

表 7　steady state 限制檢定

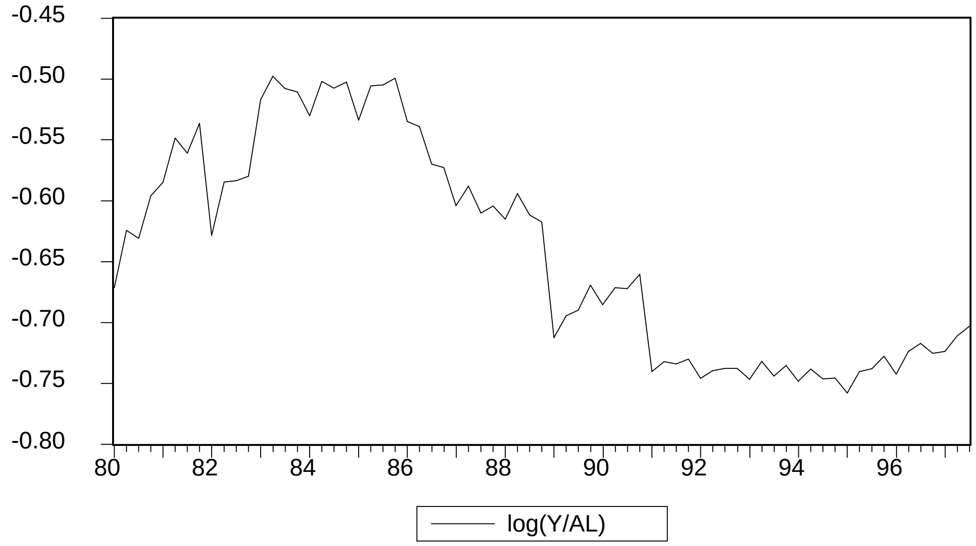
$\tilde{a}$	-Tln(1-**λ**)	$\hat{a}$	-Tln(1-**λ**)	$\tilde{\ }$	2 log Θ (H$_3$|H$_1$
0.5448	48.801	0.5274		0.2153	13.560
0.3454	26.275	0.3254			
0.2257	15.860	0.0780			
0.0001	0.0059				

圖 1 **和圖** 2 **是每有效人口產出和實體資本存量的對數水準圖，綜合而言兩個關係從** 80 **年以後成定態的假設很難成立。**

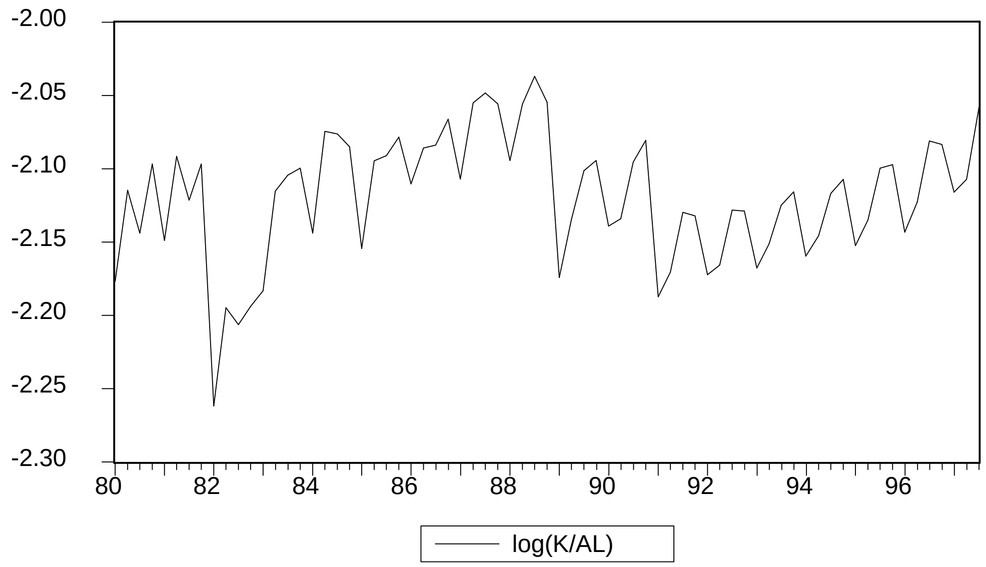
由於共積關係若不成立，則後面的 VECM **和短期參數檢定便沒有意義，為了讓後續的分析可行，我們讓共積向量個數為** 2**，則檢定結果可以使得定**

態假設成立。不過這純粹是為了展示後面檢定的過程而做的變通。為了不讓非正式的計量模型選取干擾正文，我們將後續的過程放在附錄二中做為參考。

圖一



圖二



C) **短期調整係數**

由於資料不支持定態假設，但是理論模型對 VECM 中的短期調整參數的預示關係是建立在長期定態假設上，所以去檢定調整參數的預示關係一定不會成立，也沒有什麼意義。不過在附錄二中還是列出兩個共積關係的受限 VECM 模型來做觀查。

D) 勞動力 L 和人力資本 A 的外生性檢定

Johansen 的外生檢定方法，是檢定 VECM 中與變數對應的短期調整係數是否為零，若不拒絕短期調整係數為零的虛無假設，則斷定相對應的變數為弱外生(weak exogenous)。

以本節成長模型為例要檢定就業勞動力 L_t 和人力資本存量 K_t 是否為外生。檢定結果 L_t 和 K_t 均以卡方統計值的 p-value 幾乎為零的情況明顯拒絕外生的虛無假設。

5-2 Ramsey 成長模型

5-2-1 檢定共積向量的數目

Ramsey 模型比 Solow 模型多加入一個變數為消費 C，其均衡結果隱含經濟體極佳化選擇。$Yt = (y, a, k, l, c)'$ 共五個變數。個別變數均為 I(1)在上一節已經檢定過，現在要決定 VECM 的落後期數。和 Solow 模型檢定一樣，殘差項的 ADF 檢定結果均為穩定序列。k = 5 時所有變數的殘差項全部通過 Q 檢定，但 J.B 檢定顯示 A 變數的殘差不符合常態分配。而 k = 6 和 k = 7 時則有些變數殘差項有序列相關的現象，但是常態分配檢定則表現比較好(見表 8)。整體而言仍是取 k = 5 較適當。k = 5 時，共積向量數目的 trace 統計量如表 9，依 5%顯著水準均可以判斷變數間有三個共積關係。

表 8　各變數的殘差行為檢定

	k = 5		k = 6		k = 7	
殘差	Q 檢定	J.B	Q 檢定	J.B	Q 檢定	J.B
Y	15.007	2.713	35.571	2.241	31.685	0.966
K	23.227	3.023	15.454	2.842	14.417	1.009
L	14.066	0.608	15.924	0.858	25.951	0.553
A	13.987	6.569	25.273	1.937	16.454	2.334

C	9.619	0.399	24.511	0.520	24.458	1.876
全部	385.244 (0.00)	13.303 (0.21)	443.291. (0.00)	9.338 (0.50)	90.665 (0.00)	7.436 (0.68)

個別變數的 Q **檢定統計量為** $x^2(16)$, 10%**臨界值為** 23.542

個別變數的 J.B **常態檢定統計量為** $x^2(2)$, 10%**臨界值為** 4.60

括號內為全體變數統計量的 p-value

整體而言仍是取 k = 5 **較適當。** k = 5 **時，共積向量數目的** trace **統計量如表** 9，**依** 5%**顯著水準均可以判斷變數間有三個共積關係。**

表 9　共積向量個數 trace 檢定

k = 5			5%	1 %
$\tilde{a}$	L-max	Trace	**臨界值**	**臨界值**
0.6304	65.6980	125.606	68.52	76.07
0.3630	29.7694	59.9080	47.21	54.46
0.2442	18.4750	30.1386	29.68	35.65
0.1498	10.7126	10.7126	15.41	20.04
0.0143	0.9511	0.9511	3.76	6.65

5-2-2 對共積向量 β 的限制做假設檢定

3-2-4 **已經導出 Ramsey 模型的共積關係包含**

$$\begin{cases} \ln K_t - \ln L_t - \ln A_t = \ln \hat{k}^* \\ \ln C_t - \ln L_t - \ln A_t = \ln \hat{c}^* \\ \ln Y_t - \ln L_t - \ln A_t = \ln \hat{y}^* \\ \ln Y_t - \sim \ln K_t - (1-\sim)\ln L_t - (1-\sim)\ln A_t = \ln a_0 \end{cases}$$

分別為每有效人口資本存量呈定態，每有效人口消費成定態，每有效人口產出呈定態，以及生產函數關係。我們先用 k = 5看看有沒有符合其中一項共積關係。以上四個共積向量限制分別可表為

b1 = (0 1 -1 -1 0)’

b2 = (0 0 -1 -1 1)’

b3 = (1 0 -1 -1 0)’

但是只需要檢定其中兩個關係

和

$$\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \textbf{使得} \quad \begin{bmatrix} {}_1 = -(\ddot{}_2 + \ddot{}_3) \\ {}_2 = \ddot{}_2 \\ {}_3 = \ddot{}_3 \\ {}_4 = \ddot{}_3 \\ {}_5 = 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{}_2 \\ \ddot{}_3 \end{bmatrix}$$

生產函數共積關係檢定結果。在 k = 7 **的設定下拒絕古典生產函數為共積關係的虛無假設，若改為** k = 8 **或** 9**，則會接受該虛無假設。**k = 8 **之下的生產函數估計如下**

$\ln Y_t = C1 + 0.469 \ln K_t + 0.531 \ln A_t + 0.531 \ln L_t$ **檢定統計量的** p-value **為** 0.12

k = 9 **之下的生產函數的估計**

$\ln Y_t = c2 + 0.638 \ln K_t + 0.362 \ln A_t + 0.362 \ln L_t$ **檢定統計量的** p-value **為** 0.94

至於定態共積關係的檢定結果，在 k = 5 **之下無法認定有定態關係，在** k = 8 **之下可以認定有定態關係。**b1 **限制的檢定統計量** p-value **為** 0.32**，**b2 **限制的** p-value **為** 0.25**。接著要一起檢定生產函數和兩個定態個共積關係**

$$
\left(\begin{bmatrix} {}_{11} \\ {}_{21} \\ {}_{31} \\ {}_{41} \\ {}_{51} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} {}_{12} \\ {}_{22} \\ {}_{32} \\ {}_{42} \\ {}_{52} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} {}_{13} \\ {}_{23} \\ {}_{33} \\ {}_{43} \\ {}_{53} \end{bmatrix}\right) = \left(\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{}_{11} \\ \ddot{}_{21} \\ \ddot{}_{31} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \left[\ddot{}_{12}\right], \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \left[\ddot{}_{13}\right]\right)
$$

$$
= \left(\begin{bmatrix} -\ddot{}_{11} - \ddot{}_{21} \\ \ddot{}_{11} \\ \ddot{}_{21} \\ \ddot{}_{21} \\ \ddot{}_{31} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ \ddot{}_{12} \\ -\ddot{}_{12} \\ -\ddot{}_{12} \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\ddot{}_{13} \\ -\ddot{}_{13} \\ \ddot{}_{13} \end{bmatrix}\right)
$$

檢定統計量為自由度為 5 的卡方分配，統計值為 32，p-value 為零，拒絕三個共積向量一起存在的虛無假設。所以做 Ramsey 成長模型預示的受限 VECM 的估計和檢定則沒有意義。從這個結果可以發現雖然 Ramsy 模型在加入了消費最適選擇後在理論上可以內生化每期的儲蓄率，但就計量分析而言，加入了消費變數使得變數增多的結果，增加了一個定態條件限制，使得要接受全部的虛無假設更加困難。從另一個角度想，再一次地說明我們的樣本點整體而言可能不是在定態附近。

5-3 Lucas 內生成長模型—同時考慮人力資本外部性和單部門人力資本訓練

本模型用到每人產出 y，每人資本存量 k，人力資本存量 h，和每人消費 c 四個變數。

模型預示的共積關係有三

$$
\begin{cases}
\ln C_t - \ln K_t = \ln x^* \\
\ln K_t - \dfrac{1-\sim+\yen}{1-\sim} \ln H_t = \ln w^* \\
\ln Y_t - \sim \ln K_t - (1-\sim)\ln u_t - (1-\sim+\yen)\ln H_t = \ln A
\end{cases}
$$

前兩式為定態關係，第三式為生產函數關係。第一個定態關係不顯著。第二

個定態關係和生產函數關係在γ值未知之下估出的係數也不合理。γ是人力資本外部效果係數，並沒有先驗的值可供代入。

5-4　AK 模型

AK 模型用到的變數為每人產出 y，每人資本存量 k，人力資本存量 h，和每人消費 c 四個變數。

5-4-1 共積向量個數檢定

	k = 7		k = 8		K = 9	
殘差	Q 檢定	J.B	Q 檢定	J.B	Q 檢定	J.B
Y	22.794	0.632	17.189	0.909	22.845	0.246
K	10.314	2.571	10.666	0.894	18.329	0.378
H	13.999	1.040	33.461	0.862	27.175	0.524
C	10.611	1.814	16.365	0.991	43.355	0.404

共積向量可以判斷為三個

5-4-2 共積向量受限模型

如 3-4-4 所述，AK 模型預示的共積向量有三個

$$\begin{cases} \ln C_t - \ln Y_t = \ln(-s) \\ \log Y_t - \sim \log K_t - (1-\sim)\log H_t = \log B \\ \log H_t - \log K_t = \log \overline{A} \end{cases}$$

其中第一個為根據儲蓄率的定義衍申出來的共積向量，第二個是最適化時根據 y 和 k 兩個變數成比例而改寫成的生產函數共積關係，第三個為最適化時 h 和 k 成固定比例。第一個和第三個限制的虛無假設被明顯拒絕，檢定統計量的 p-value 幾乎為零。第二個限制的虛無假設檢定量自由度為零，無法做檢定參考，所以我們利用第二個限制估計出的共積關係當做已知共積向量

$$\log Y_t = 0.736 \log K_t - 0.264 \log H_t - 1.61$$

然後用檢定已知共積向量的方法。結果接受該生產函數為共積向量的虛無假設，p-value 為 0.17。實證結果只支持生產函數，並不支持實體資本和人力資本成固定比例的共積關係。

綜合以上實證結果:

以上四個模型的共積檢定都可以分為檢定兩種關係，一種是檢定生產函數關係，一種是檢定模型隱函的長期定態關係。檢定的結果是我們所設定的人力資本變數可以在古典生產函數(Solow 和 Rasey 成長模型假設的生產函數)和 AK 模型的生產函數之下分別估計出合理的要素投入係數，但是無法檢定出長期定態關係。

第二章我提過在生產函數上加入了人力資本變數並證明其重要性，並不能直接證明內生成長模型的解釋力比較好，從前面的實證結果乎應了這點。我們看到 Solow 模型，Ramsey 模型和 AK 模型的檢定結果都有顯著的生產函數共積關係，而且生產函數的參數都差不多，可見要比較經濟體系符合哪種成長模型重點要放在均衡條件的檢定上。從前面的結果暫時可以看出，以我們的資料而言，較單純的 Solow 外生成長模型的實證反而比較能符合模型預設的結果，因為除了生產函數之外，在較寬的標準下也接受定態的虛無假設。

在生產函數估計方面，分別刪減最前面的五期到十期的樣本點之後，仍然可以估計出相當穩定的投入係數。然而這組穩定的生產函數是在特定的變數定義之下才會發生，勞力投入必需是就業勞動力，如果改為勞動力或 15 歲以上人口為變數則估計結果立刻走樣，人力資本變數方面亦然，我們嘗試使用其他文獻中廣泛使用的學齡入學率代理變數(或是受雇勞動力高中以上學歷比例，或是受雇勞動力專科以上比例)，卻都估計出不合理的生產函數，用這些比例當做人力資本變數的結果是使得勞動和人力資本的 share 不合理的大或甚至大於一，原因大概是因為這些比例的成長率太大，高估了人力資本成長的速度，進而高估了人力資本對產出的影響。而我們使用的人力資本代理變數的組成中(參考 3-1 資料說明)，教育預算的部分計算方式必須特別說明: 為了突顯受雇者平均教育年數的影響並相對降低所得變動的影響，平

均教育年數的資料是從月資料平均成季資料，而教育預算支出則用年資料除以四，所以每四季都是相同數值(本來是使用每季 GNP 再乘上教育預算占 GNP 比例估計教育支出季資料，但是這樣會有類似線性重合的效果使得整個模型估計變得很差，而且就實際而言，把當季教育支出和當季所得扣的太密並沒有意義，我們使用教育預算的目的只是為了表現出教育品質提昇的權數)。

至於定態假設不成立的結果有幾個可能的原因。

第一，若認為本文所引用代表勞動力和人力資本的資料沒有太大的問題，那麼顯示以上成長理論不能很適切的描述一國經濟成長的長期定態關係(模型的 insight 可以解釋跨國差異，但不能用來詳細預測一國的長期經濟成長)，至少我們無法證實模型對長期定態的預期。

第二，是本文所用的資料不當，因而實證結果不理想。

第三，很單純地，台灣的經濟還沒到達模型所描述的定態情形。

在對人力資本變數的合理性沒有一個明確的判準之前，我們無法驟下結論，只能說本文沒有直接證據證實 Ramsey 成長模型，AK 成長模型和 Lucas 單部門人力訓練模型可以比修正的 Solow 模型更適切地描述台灣的長期定態情形。想要在實證上確定以上成長模型在長期的實用性，對人力資本正確的認定將是問題的核心。

第六節　結論

本文的構想原本是要利用共積分析法檢定各成長模型預示的長期均衡關係，但是由實證的結果來看，本文欲檢定的長期均衡關係可能太過嚴苛。恆定狀態假設可能較適合跨國的橫斷面分析，單一經濟體如台灣很可能尚未到達恆定狀態。

各種成長理論的目的是要指出經濟成長的來源或動力，或是指出造成各國經濟成長差異的原因，並進一步預測各國經濟發展的前景或是提供改善長期經濟成長重要的政策意涵。每個模型的洞見和隱含的政策涵意都提供了重要的方向，但是個別的經濟成長理論模型所考慮到都只是現實經濟狀況的其中一部分，所以我們的結果可以解釋為，本文實證的幾個經濟成長模型無法單獨適切地解釋經濟成長的長期均衡現象(並非指變數或參數對經濟成長的影響方向不正確，而是影響的數值不如個別理論模型所預期)。

不過如前章所述，我們的資料所顯示的生產函數關係並”不違反”文中所提及的成長模型的需要。雖然我們”號稱”檢定 Solow 的”外生”成長模型，但是以教育相關資料來做的人力資本代理變數顯然不是外生(第五章的外生檢定結果已拒絕人力資本代理變數為外生)，所以這也是 Solow 成長模型的長期均衡不如預期的原因。從 Solow 和 Ramsey 成長模型的實證結果還是可以得到以下結論

1.本文所使用的人力資本變數估計出來的生產函數的生產要素分額十分合理，比一般直接估計生產函數的結果要更符合公認的分額(用間接方法估計的勞動分額比資本分額公認合理值約為 7:3，而我們的結果約為(6.2):(3.8)，Wang and Tallman(1994)的簡單迴歸生產函數直接估計為 4:6

2.由估計出報酬分額相當合理的人力資本修正古典生產函數，以及人力資本內生兩個條件來看，提供了內成長的初步證具和可能性。

3.只要我們的人力資本變數沒有停滯的現象(見附圖一的變數圖)，代表存在內生動力支持該變數不斷成長，如果該生產函數關係繼續維持，則可預期台灣的每勞動人口產出將還能以現在的成長率持續成長。

4.由前章實證結果來看，我們可以粗略地說，長期而言，每勞動人口所受正規教育總經費每增加 1%，可使經濟成長增加 0.62%(若是不限定生產函形式的未受限模型，則該彈性為 0.33%)，在古典生產函數設定下效果等同於增加 1%的勞動人口。所以本文的結果隱含正規教育經費支出對人力素質的提昇和產出有重大的影響。

參考文獻

Aghion, Philippe and Peter Howitt (1992), “A Model of Growth Through Creative Destruction”, *Econometrica*, 60, 323-351.

Arrow, Kenneth J. (1962), "The Economic Implications of Learning-by-Doing", *Review of Economic Studies*, 29, 155-173.

Barro, R. (1991), “Economic Growth in a Cross Section of Countries”, *Quaarterly Journal of Economics*, 106(2), 407-443.

Barro, R. and Sala-i-Martin, X. (1991), "Convergence Across States and Regions", *Brookings Papers on Economic Activities*, 1, 159-82.

Barro, R. and Sala-i-Martin, X. (1992), "Convergence", *Journal of Political Economy*, 100, 223-51.

Barro, R. and Sala-i-Martin, X. (1995), *Economic Growth,* New York, McGraw-Hill.

Benhabib, J. and Joranovic, B. (1991), "Externalities and Growth Accounting", *American Economic Review*, 81, 82-113.

Bernard, A. and Jones, C.I. (1996), "Technology and Convergence", *Economic Journal*, 106, 1037-1044.

Chou and Wong(1997), "Economic Growth and Internatinal Trade: The Case of Hong Kong", presented at the conference "*Dynamics, Economic Growth, and International Trade*" held in Hong Kong.

Chou, ji (1995) "Old and New Development Modles: The Taiwan Experience"

Dickey, D. and W. Fuller, (1979), "Distribution of the Estimates for Autoregressive Time Series with a Unit Root," *Journal of American Statistical Association*, 74, 427-431.

Dowrick, S. and Nguyen, D.T. (1989), "OECD Comparatice Economic Growth 1950-85, Catch-up and Convergence", *American Economic Review*, 79, 1010-1030.

Engle, R. and C. Granger, (1987), "Cointegration and Error Correction: Representation, Estimation, and Testing," *Econometrica*, 55, 251-276.

Engle, R. F. and B. S. Yoo, (1987), "Forecasting and Testing in Co-Integration Systems," *Journal of Econometrics*, 35, 143-159.

Gilbert, C. L. (1986), "Professor Hendry's methodology," *Oxford Bulletin of Economics and Statistics,* 48,283-307.

Grossman, G. and Helpman, E. (1989), "Product Development and International Trade", *Journal of Political Economy*, 97, 1261-83.

Grossman, G. and Helpman, E. (1990), "Comparative Advantage and Long-Run Growth", *American Economic Review*, 80, 796-815.

Jackson and Wolinsky (1996), "A Strategic Model of Social and Economic Networks", *Jouranl of Economics Theory*, 71, 44-74.

Johansen, S. (1988), "Statistical Analysis of Cointegration Vectors," *Journal of Economic Dynamics and Control*, 12, 231-254.

Johansen, S. (1989), *Likelihood Based Inference on Cointegration: Theory and Application, Lecture Notes.* Institute of Math Statistics, University of Copenhagen.

Johansen, S. (1991), "Estimation and Hypothesis Testing of Cointegration Vectors in Gaussian Vector Autocorressive Models", *Econometrica*,59,p1551-1580

Johansen, S. (1992), "Determination of Cointegration Rank in the Presence of a Linear Trend," *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, 54, 383-397.

Johansen, S. and K. Juselius, (1990), "Maximum Likelihood and Inference on Cointegration with Applications to the Demand for Money," *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, 52, 169-210.

Jones, C.I. (1995a), "Time Series Tests of Endogenous Growth Models", *Quarterly*

Journal of Economics, 110, 695-525.

Jones, C.I. (1995b), "R & D-Based Models of Economic Growth", *Journal of Political Economy,* 103, 759-784.

Judd, K. (1985), "On the Performance of Patents", *Econometrica*, 53, 579-85.

Kuo, B.S. (1998), "Testing for the Null of Stationarity Based on the Error Component Representation," Journal of Econometrics, 82, 289-315.

Lucas, R. E. Jr. (1988), "On the Mechanics of Economic Development", *Journal of Monetary Economics*, 22, 3-42.

Lucas, R. E. Jr. (1993), "Making a Miracle", *Econometrica*, 61, 251-72.

Mankiw, N.G., Romer, D. and Weil, D. N., (1992), "A Countribution to The Empirics of Economic Growth", *Quarterly Journal of Economics*, 107(2), 407-437.

Matsuyama, K. (1991), "Increasing Returns, Industrialization, and Indeterminancy of Equilibrium", *Quarterly Journal of Economics*, 106, 617-650.

Murphy, K., Shleifer, A., and Vishny, R. (1989a), "Industrialization and the Big Push", *Journal of Political Economy*, 97, 1003-26.

Nurske, R. (1953), *Problems of Capital Formation in Underdeveloped Countries*, New York, Oxford University Press.

Phillips, P. C. B. (1986), Understanding spurious regressions in econometrics, *Journal of Econometrics*, 33, 331-340.

Phillips, P.C. B. (1987), Time series regression with a unit root, *Econometrica*, 55, 277-302.

Phillips, P.C.B. and P. Perron , (1988) "Testing for Unit Root in Time Series Regression," *Biometrica* 75, 335-346.

Quintos C.E. (1997), "Stability tests in error correction models," Journal of Econometrics, 82, 289-315.

Ramsey (1928), "A Mathematical Theory of Saving", *Economic Journal*, 38, 543-59.

Rebello, S. (1991), "Long-Run Policy Analysis and Long-Run Growth", *Journal of Political Economy*, 99, 500-521.

Romer, P. (1986), "Increasing Returns and Long Run Growth", *Journal of Political Economy*, 94, 1002-37.

Romer, P. (1987), "Increasing Returns, Specialization, and External Economies, Growth as Described by Allyn Young", *American Economic Review, Papers and Proceedings*.

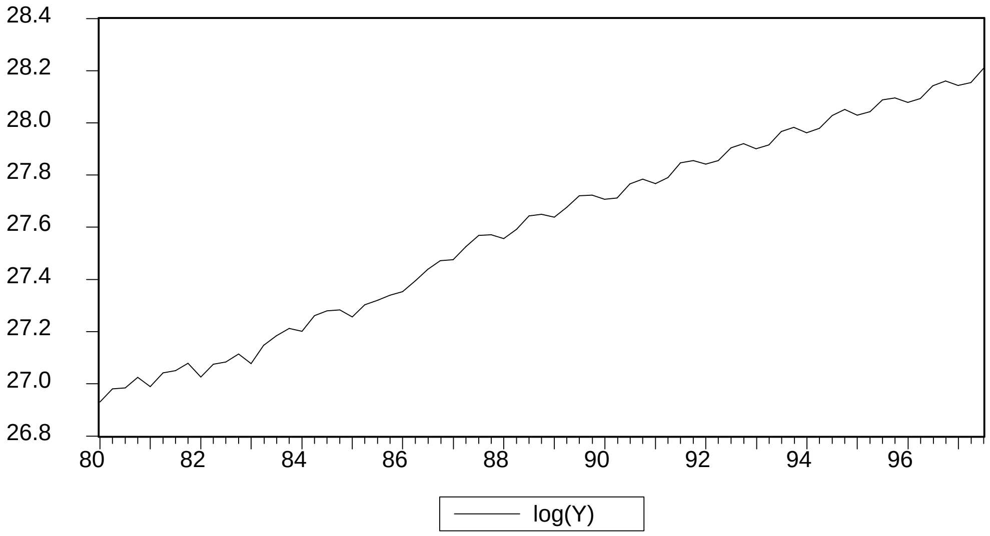
Romer, P. (1990), "Endogenous Technological Change", *Journal of Political Economy*, 98, S71-S102.

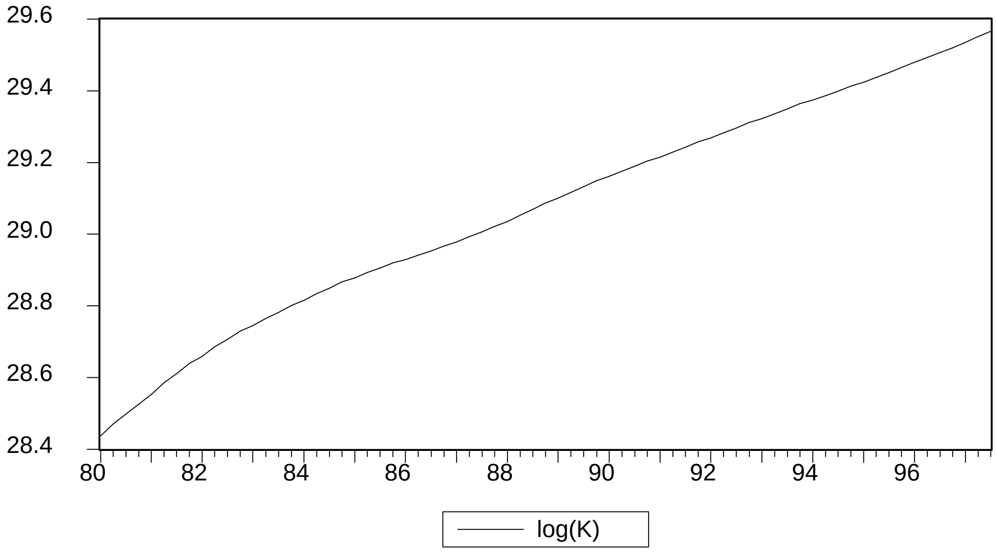
Romer, P. (1990), "Endogenous Technological Change", *Journal of Political Economy*, 98, S71-S102.

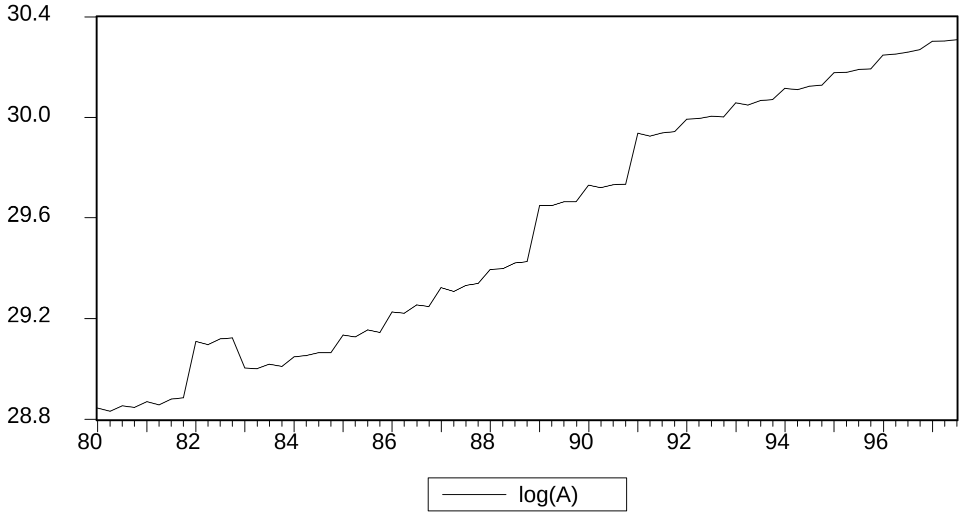
Romer, P. (1993), "The Origins of Endogenous Growth", *Journal of Economc Perspectives*, 8, 3-22.

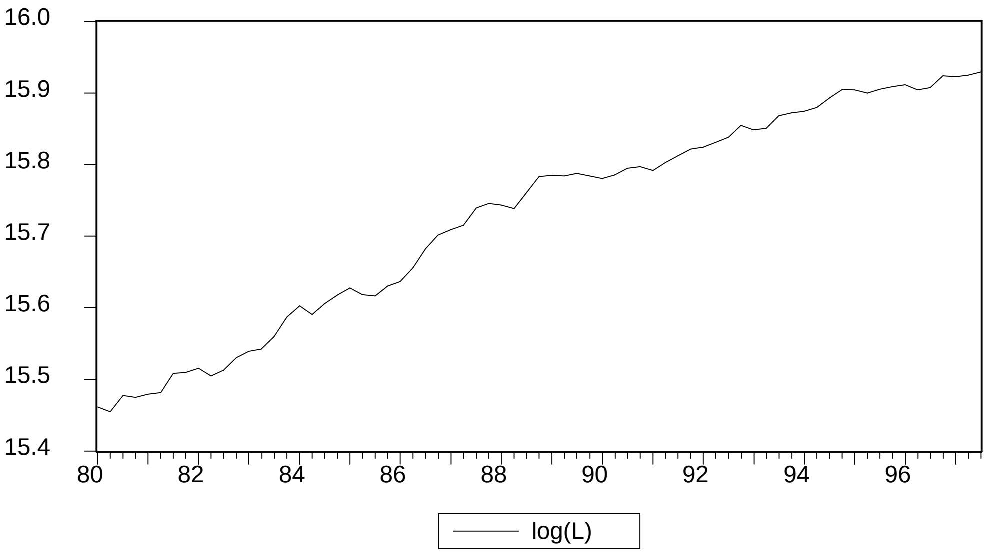
Rosen, S. (1978), "Substitution and the Division of Labor", *Economica*, 45, 235-50.
Rosen, S. (1983), "Specialization and Human Capital", *Journal of Labor Economics*, 1, 43-49.
Rostow,W.W. (1960), *The Stages of Economic Growth, A Non-Communist Manifesto*, Cambridge, Cambridge University Press.
Said, S. E., and D. A. Dickey, (1984), "Testing for Unit Root in Autoregressive-Moving Average Models of Unknown Order", *Biometrika*, 71,599-607
Sala-i-Martin, (1996), "The Classical Approach to Convergence Analysis", *Economic Journal*, 106, 1019-1036.
Schultz, T. (1993), *Origins of Increasing Returns*, Cambridge, MA, Blackwell.
Smith, Adam (1776), *An Inquiry into the Nature and Causes of the Wealth of Nations*. Reprint, edited by E. Cannan. Chicago, University of Chicago Press, 1976.
Solow (1956), "A Contribution to the Theory of Economic Growth", *Quarterly Journal of Economics*, 70, 65-94.
Stoky, Nancy (1991), "Human Capital, Product Quality and Growth", *Quarterly Journal of Economics*, 106, 587-616.
Tallman, Ellis W and Wang, Ping (1994) "Human Capital and Endogenous Growth Evidence from Taiwan", *Journal of Monetary Economics,*34,101-124
Tamura, R. (1991), "Income Convergence in an Endogenous Growth Model", *Journal of Political Economy*, 99, 522-40.
Young, Allyn (1928), "Increasing Returns and Economic Progress", *The Economic Journal*, 152, 527-542.
Young, Alwyn (1991), "Learning-by-Doing and the Effects of International Trade", *Quarterly Journal of Economics*, 106, 369-406.
Young, Alwyn (1993), "Invention and Bounded Learning by Doing", *Journal of Political Economy*, 101, 443-472.
Young, Alwyn (1994), "Lessons from the East Asian NICS: A contrarian view", *European Economic Review*,38,964-973

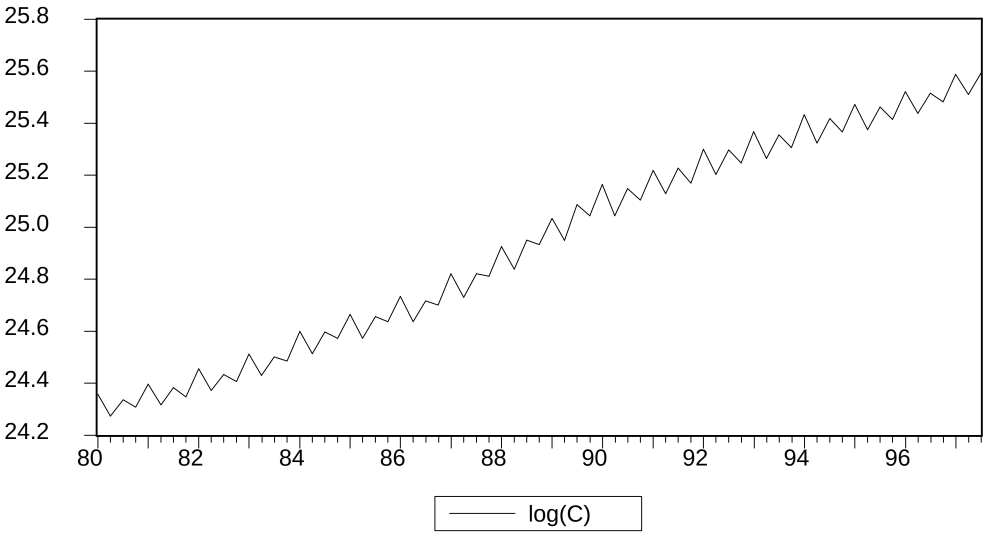
附圖一: 變數對數值序列圖

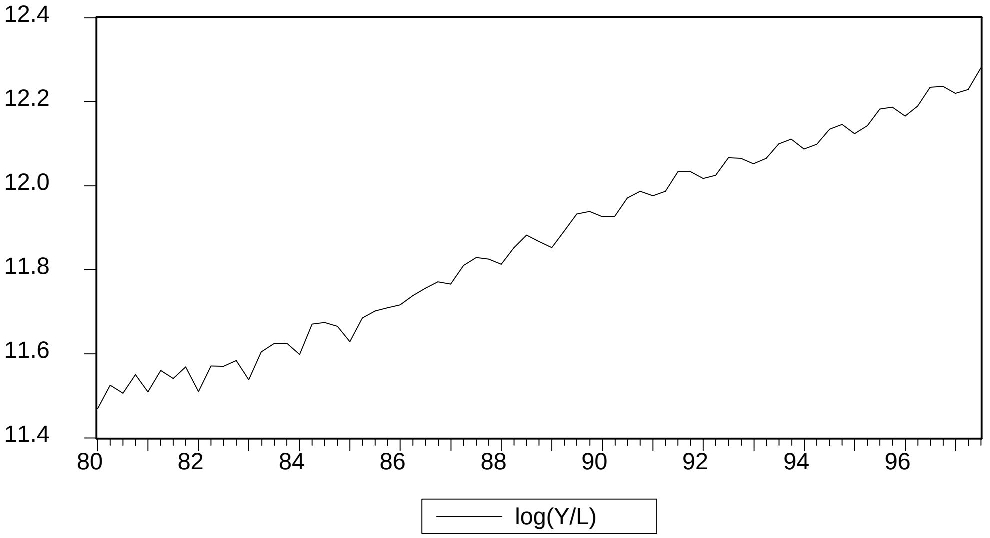

28.4
28.2
28.0
27.8
27.6
27.4
27.2
27.0
26.8
80
82
84
86
88
90
92
94
96
log(Y)

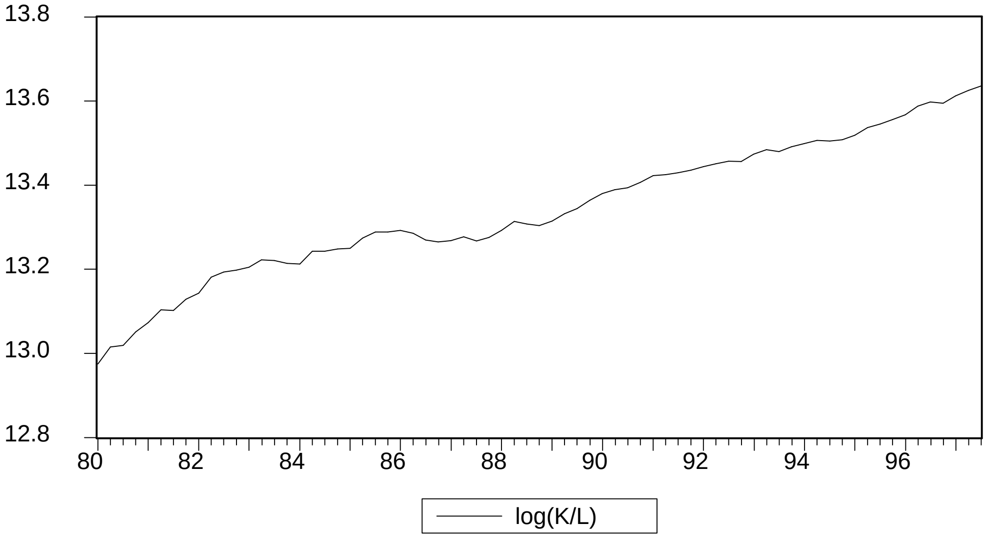

29.6
29.4
29.2
29.0
28.8
28.6
28.4
80
82
84
86
88
90
92
94
96
log(K)

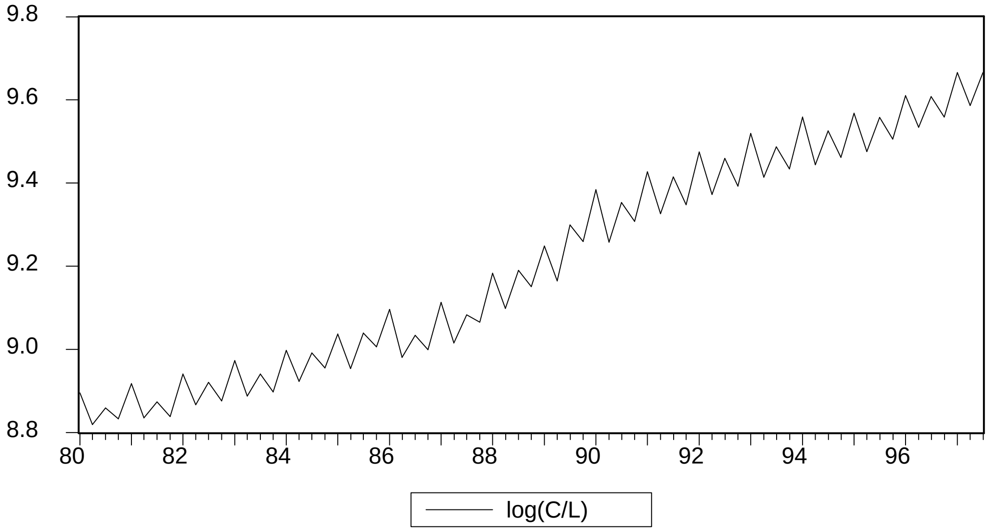

30.4
30.0
29.6
29.2
28.8
80
82
84
86
88
90
92
94
96
log(A)


16.0
15.9
15.8
15.7
15.6
15.5
15.4
80
82
84
86
88
90
92
94
96
log(L)

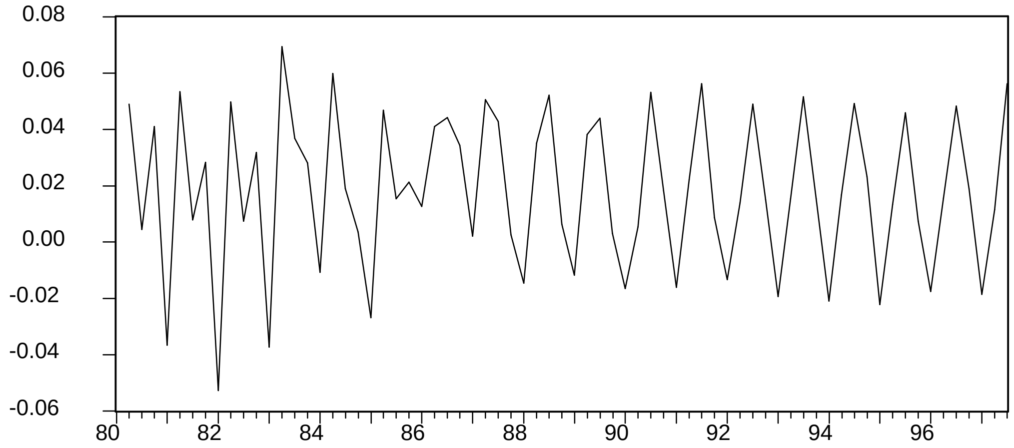

25.8
25.6
25.4
25.2
25.0
24.8
24.6
24.4
24.2
80
82
84
86
88
90
92
94
96
log(C)


12.4
12.2
12.0
11.8
11.6
11.4
80
82
84
86
88
90
92
94
96
log(Y/L)

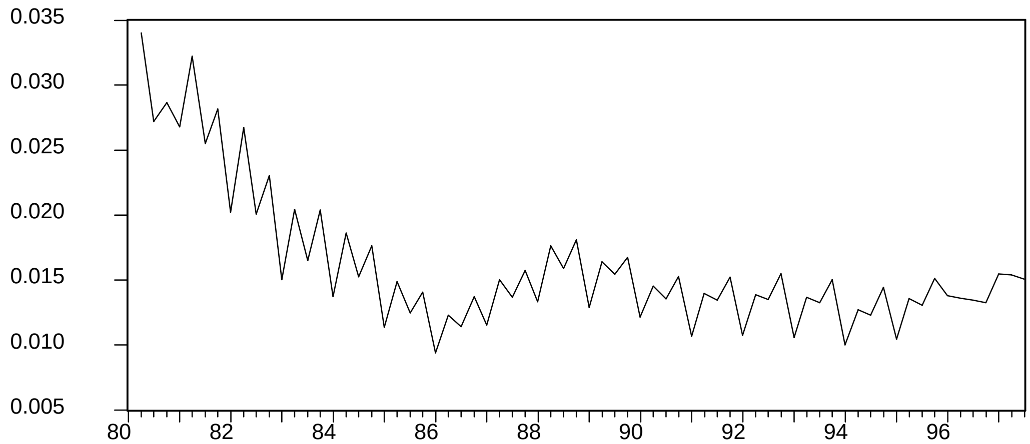

13.8
13.6
13.4
13.2
13.0
12.8
80
82
84
86
88
90
92
94
96
log(K/L)


9.8
9.6
9.4
9.2
9.0
8.8
80
82
84
86
88
90
92
94
96
log(C/L)

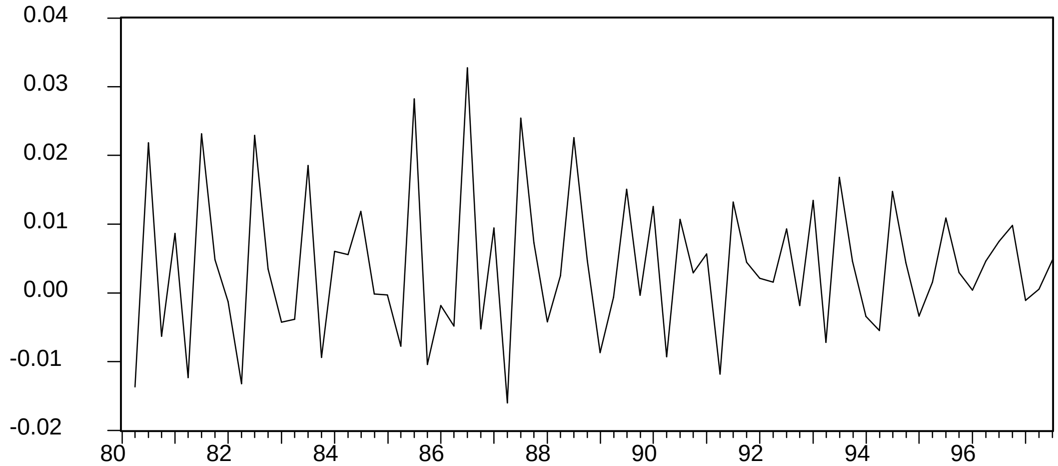
附圖二：變數對數值一階差分圖



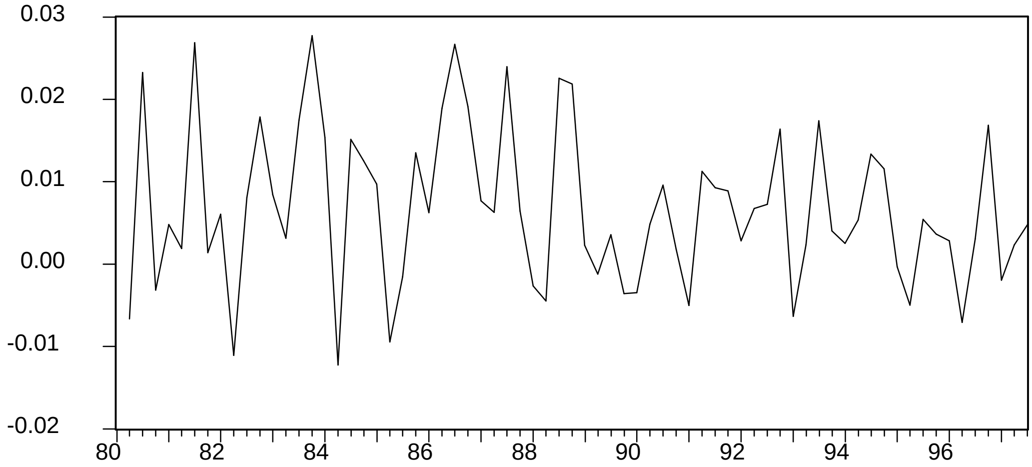
Δ log(Y)



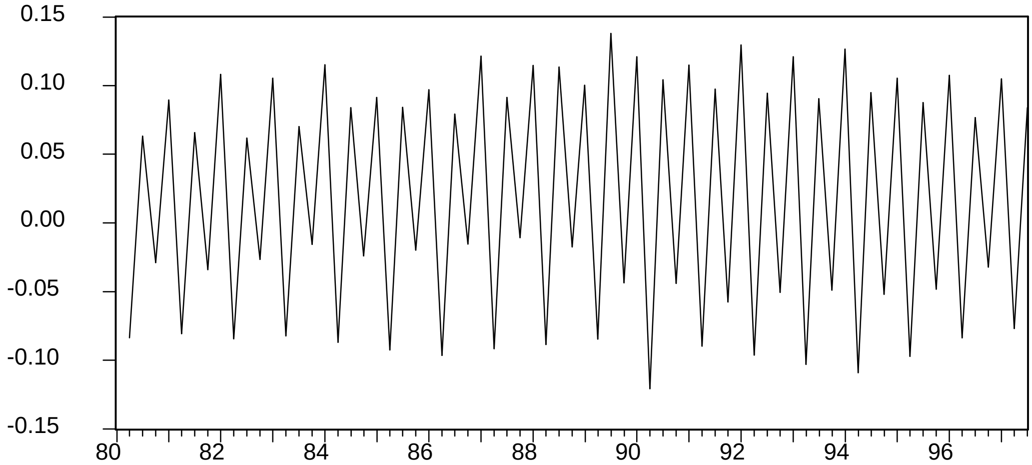
Δ log(K)



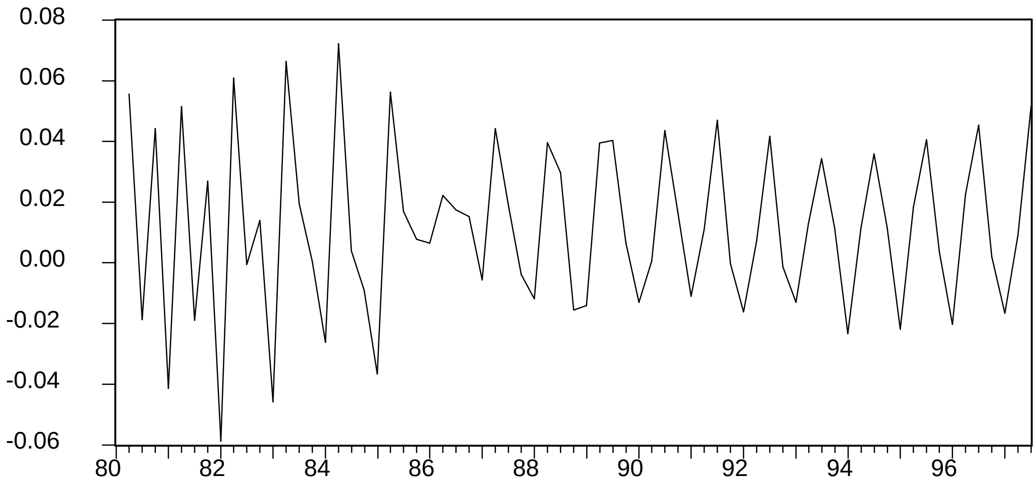
Δ log(A)



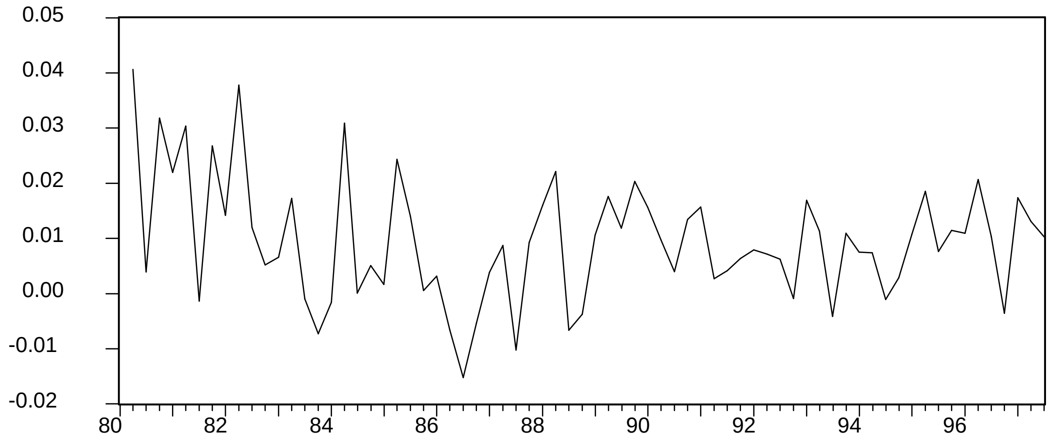
Δ log(L)



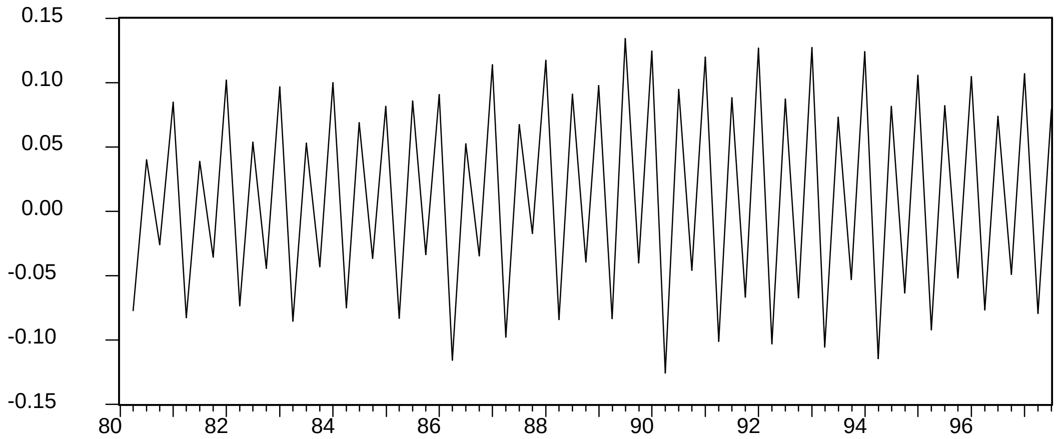
Δ log(C)



Δ log(Y/L)



Δ log(K/L)



Δ log(C/L)

附錄二: k = 9 的 Solow 模型共積檢定

在容忍不是依 Q 檢定結果所選的最佳落後期數之下，分別符合古典生產函數和定態假設。但是上面的檢定是把兩個受限模型分開估計的，現在我們要用 4-3-4 的方法，一次檢定兩種共積關係是否存在。

$$\left(\begin{bmatrix} {}_{11}\\ {}_{21}\\ {}_{31}\\ {}_{41}\end{bmatrix},\begin{bmatrix}{}_{12}\\ {}_{22}\\ {}_{32}\\ {}_{42}\end{bmatrix}\right)=\left(\begin{bmatrix}-1&-1\\1&0\\0&1\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\ddot{}_{11}\\ \ddot{}_{21}\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\-1\\-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\ddot{}_{12}\end{bmatrix}\right)=\left(\begin{bmatrix}-\ddot{}_{11}-\ddot{}_{21}\\ \ddot{}_{11}\\ \ddot{}_{21}\\ \ddot{}_{21}\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\ \ddot{}_{12}\\ -\ddot{}_{12}\\ -\ddot{}_{12}\end{bmatrix}\right)$$

檢定統計量為自由度為(5-3-2+1)+(5-3-1+1)=3 的卡方統計量，統計值為 3.61，p-value 等於 0.31，所以接受兩種限制都存在的虛無假設。而估計出來的兩組受限共積關係為

$$\ln Y_t = -9.59 + 0.5\ln K_t + 0.5\ln A_t + 0.5\ln L_t \tag{5-2}$$

$$\ln K_t - \ln A_t - \ln L_t = -16.21 \tag{5-3}$$

生產函數的共積向量很特別，實體資本和勞力的分額恰好各占一半，我們懷疑限制沒有滿足可認定條件所以才會估計出一條符合限制但不符合常理的共積向量，接著我們檢查可認定條件。

$$R_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad H_1 = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad H_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

則 $$R_1' H_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad R_2' H_1 = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$rank(R_1' H_2) = 0 \qquad rank(R_{2'}' H_1) = 1$$

結果第一個限制的可認定條件不成立，這代表估計出來的生產函數共積向量無法被確認。其實從(5-2)和(5-3)兩個估計式就可以看的出來，既然兩個式子都是穩定數列，(5-2)式和(5-3)式的線性組合也會是穩定數列，然而(5-3)式乘上任何一個實數再加上(5-2)式，恰好仍然滿足生產函數限制條件，所以當我們一起檢定這兩個共積向量時，自然就無法唯一認定(5-2)式了。既然如此我們就用另外一種限制型式，即共積向量為已知的檢定，利用前面單一共積向量受限模型估計出來的結果，我們再設虛無假設為四個變數中有如下兩個共積關係

$$\ln Y_t = c1 + 0.66 \ln K_t + 0.34 \ln A_t + 0.34 \ln L_t$$

$$\ln K_t - \ln A_t - \ln L_t = c2$$

統計量為自由度為 4 的卡方分配，統計值為 3.61，p-value 為 0.46，所以接受該項虛無假設。