

行政院國家科學委員會專題研究計畫成果報告

基於碎形表面模型的恢復係數

Coefficients of Restitution Based on a Fractal Surface Model

計畫編號：NSC 87-2212-E-002-049

執行期限：86年8月1日至87年7月31日

主持人：盧中仁 國立台灣大學機械工程學系

一、中文摘要

使用恢復係數可大幅的簡化碰撞問題的分析工作。恢復係數除了和材料特性有關外，也受表面形態的影響。在這個計劃中，我們採用 Cantor 集建立一個碎形表面模型，推導碰撞過程中兩物體間正向力和相對位移的關係式，並以此探討恢復係數和初始速度、表面型態間的關係。

關鍵詞：恢復係數、碎形、表面形態

Abstract

The analysis of collision problem can be greatly simplified by using restitution coefficients. Besides material properties, the coefficient of restitution also depends on the surface topography. In this project, we constructed a fractal surface model using Cantor set. The relation between the normal force and relative displacement during the collision procession is derived. Based on this relation, we studied the effects of initial velocity and surface topography on the coefficient of restitution.

Keywords: coefficient of restitution, fractal, surface topography

二、緣由與目的

正確完整的分析物體的碰撞過程，即使是應用電腦的高速計算能力仍然是一件繁雜費時的工作。為了簡化分析工作，當我們並不關心碰撞所導致的局部變形和暫態反應時，可以將相互碰撞的物體視為剛體。這個時候必需引入恢復係數以提供有關碰撞過程中能量損耗的資料：恢復係數為 1 時為彈性碰撞，沒有能量損耗；恢復係數為 0 時，為全塑

性碰撞，能量損耗最大。

這裏一個重要的課題是恢復係數和一些基本物理量間的關係。相互碰撞的兩物體在接觸點上有共同的切平面，恢復係數是兩物體的相對速度垂直於切平面方向的分量在碰撞後和碰撞前的比值。Tabor [1] 和 Johnson [2] 分析了球和平滑的半空間的碰撞問題。他們得到了恢復係數和碰撞體的材料特性和相對速度間的關係。然而他們的結果並沒有顯示另一個重要參數 - 碰撞體的表面形態 (surface topography)，對恢復係數的影響。

所有的物體表面都是粗糙的而且有著呈散漫分佈的表面高度 [3]。許多利用隨機變數來描述表面形態的模型被提出，這些模型主要被用來研究兩接觸面間的摩擦力和黏著力 [4~6]。這其中一個重要且廣受引用的模型是 Greenwood 和 Willianson 在 1966 年提出的 [6]，以下簡稱 G-W 模型。Chang 和 Ling 應用 G-W 模型推導出表面形態和恢復係數間的關係 [7]。在 G-W 模型中球狀凸起的半徑是一個重要的參數。然而，研究的結果顯示球的半徑並不能唯一決定，它和所用的量測工具的解析度有關。事實上，所有描述物體表面的統計參數都有同樣的問題：這些參數都和量測時所用的尺度有關。這個問題表示物體表面有著碎形 (fractal) 的特性。換言之，要正確的描述接觸面間的現象必需使用碎形的表面模型。

碎形的觀念最早是由 Mandelbrot 在 1967 年提出 [8]，對於碎形的說明請參考 [9]。後續的實驗顯示許多物體的表面都有碎形的特性 [10~12]。於是研究人員開始注意到碎形表面模型對處理接觸面間界面問題的重要性 [13, 14]。過去幾年來

出現了一些基於碎形模型探討兩粗糙面間彈塑性接觸力學〔15~17〕。

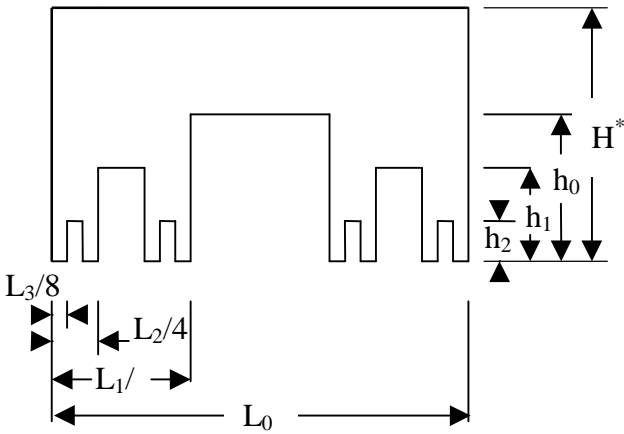
本計劃中，我們利用 Cantor 集建立碎形表面模型，進而推導兩接觸面間正向力和相對位移間的關係。由這個關係，我們定量的探討恢復係數和初始速度和表面形態的關係。

三、Cantor 集表面模型

兩粗糙面接觸時受力和變形的關係，經適當的轉換後，等價於一平滑剛體和一彈性粗糙面接觸的問題。因此，我們討論一平滑剛體平面和一彈性粗糙面碰撞的情形。首先利用 Cantor 集建立粗糙面的表面模型。

Cantor 集表面模型如圖一所示，其表面形狀是由參數 f_x 、 f_z 以及基準高 H^* ，由遞迴的方式所定義：下一層的長度為這一層長度的 $1/f_x$ 倍；深度為 $1/f_z$ 倍。以此類推，第 $n+1$ 層的長度為：

$$L_{n+1} = L_n / f_x = L_0 / f_x^{n+1} ; \text{ 而深度為：} \\ h_{n+1} = h_n / f_z = h_0 / f_z^{n+1}。$$



圖一、Cantor 集表面模型

四、恢復係數

應用 Cantor 集表面模型，將物體表面視為由許多大小、高度不等得獨立柱體所組成，亦即假設各個凸起間的相互作用是可忽略的。在這個情形下可以分別求得彈性和塑性變形時，粗糙面受力和位移間的關係；再由受力與位移的關係，應用能量

守恆，可求出任一起始碰撞速度下的恢復係數。

碰撞過程可分為兩物體互相接近的壓縮部分和分開的恢復部分。首先考慮壓縮部分。假設碰撞過程中受到影響的只是表面深度 H^* 以內的部分。換言之，距表面 H^* 以外的部分沒有變形。當剛體平面的位移為 $u = h_n$ ，亦即當剛體平面剛和第 n 層 Cantor 粗糙面接觸時，粗糙面上第 i 層

($i \geq n$) 的柱體應變為 $v_i = \frac{h_n - h_i}{H^* - h_i}$ 。第 i

層的總面積 s_i 為 $s_i = l_i - l_{i+1}$ 。假設第 n_c 層以上為塑性變形，以下為彈性變形。則此時兩接觸面間的力 P_n 可表為：

$$P_n = \sum_{i=n}^{n_c} E v_i s_i + \sum_{i=n_c+1}^{\infty} t_y \bar{s}_i ,$$

其中 E 為楊氏係數， t_y 為降伏強度， \bar{s}_i 表示考慮塑性變形時體積不變下第 i 層的總面積，

$$\bar{s}_i = \frac{s_i (H^* - h_i) \times (1 - v_y)}{H^* - h_n}。$$

當剛體平面的位移 u 不大時，接觸面間的力 P 可近似為 u 的連續函數。純彈性變形時：

$$P = \left(\frac{E l_0 h_0}{H^*} \right) \times \left\{ \left(\frac{1}{f_x} \right) \times \left(\frac{h}{h_0} \right)^{r+1} - \left(1 - \frac{h}{H^*} \right) \times \left(1 - \frac{1}{f_x} \right) \times \left(\frac{s_1}{1 - s_1} \right) \times \left(\frac{h}{h_0} \right)^{1+r} \right\} \\ - \left(\frac{E l_0 h_0}{H^*} \right) \times \left\{ \left(\frac{h_0}{H^*} \right) \times \left(1 - \frac{1}{f_x} \right) \times \left(\frac{s_2}{1 - s_2} \right) \times \left(\frac{h}{h_0} \right)^{2+r} \right\}$$

有塑性變形時：

$$P = \left(\frac{E l_0 h_0}{H^*} \right) \times \left\{ \left[\left(\frac{1}{f_x} \right) \times \left(\frac{h}{h_0} \right)^{1+r} - \left(\frac{1}{f_x} \right) \times \left(\frac{h}{h_0} \right) \times (x)^r \right] \right\} \\ - \left(\frac{E l_0 h_0}{H^*} \right) \times \left(1 - \frac{h}{H^*} \right) \times \left(1 - \frac{1}{f_x} \right) \times \left(\frac{s_1}{1 - s_1} \right) \times \left[\left(\frac{h}{h_0} \right)^{1+r} - (x)^{1+r} \right] \\ - \left(\frac{E l_0 h_0}{H^*} \right) \times \left\{ \left(\frac{h_0}{H^*} \right) \times \left(1 - \frac{1}{f_x} \right) \times \left(\frac{s_2}{1 - s_2} \right) \times \left[\left(\frac{h}{h_0} \right)^{2+r} - (x)^{2+r} \right] \right\}$$

$$+ \left(\frac{t_y l_0 (1 - v_y)}{1 - \frac{h}{H^*}} \right) \times \left[\frac{1}{f_x} \times (x)^r - \frac{h_0}{H^*} \times \left(1 - \frac{1}{f_x} \right) \times \left(\frac{s_1 x^{r+1}}{1 - s_1} \right) \right]$$

$$\text{其中 } s_1 = \frac{1}{f_x f_z}, \quad s_2 = \frac{1}{f_x f_z^2},$$

$$r = \frac{\text{Log}(f_x)}{\text{Log}(f_z)}, \quad x = \left(\frac{h - H^* v_y}{f_z (1 - v_y)} \right)^{\frac{1}{r}}.$$

接著考慮恢復部分，在這個階段接觸面間的力逐漸減小。當壓縮過程中沒有產生塑性變形時，兩物體循著原先的力和變形的軌跡曲線回到碰撞前的狀態，這個時候恢復係數為 1。當壓縮過程中有塑性變形產生時，恢復過程中接觸面間力和位移的關係為：

$$P_{un} = \left(\frac{E_0 h_0}{H^*} \right) \times \left[\left(\frac{1}{f_x} \right) \times \left(\frac{h}{h_0} \right)^{1+r} - \left(\frac{1}{f_x} \right) \times \left(\frac{h}{h_0} \right) \times (x^*)^r \right]$$

$$- \left(\frac{E_0 h_0}{H^*} \right) \times \left(1 - \frac{h}{H^*} \right) \times \left(1 - \frac{1}{f_x} \right) \times \left(\frac{s_1}{1 - s_1} \right) \times \left[\left(\frac{h}{h_0} \right)^{1+r} - (x^*)^{1+r} \right]$$

$$- \left(\frac{E_0 h_0}{H^*} \right) \times \left[\left(\frac{h_0}{H^*} \right) \times \left(1 - \frac{1}{f_x} \right) \times \left(\frac{s_2}{1 - s_2} \right) \times \left[\left(\frac{h}{h_0} \right)^{2+r} - (x^*)^{2+r} \right] \right]$$

$$+ \left(\frac{f_y h_0 (1 - v_y)}{H^* - h} \right) \times \left[(v_y H^* - h_{\max} + h) \frac{1}{f_x} \times (x^*)^r - v_y h_0 \times \left(1 - \frac{1}{f_x} \right) \times \left(\frac{s_1 (x^*)^{1+r}}{1 - s_1} \right) \right]$$

其中 $x^* = \left(\frac{u_{\max} - H^* v_y}{h_0 f_z (1 - v_y)} \right)$ ， u_{\max} 為最大壓縮量。

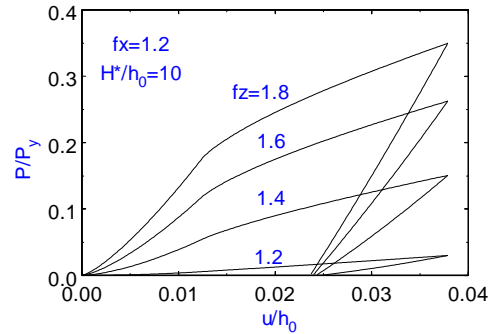
壓縮過程中， $P-u$ 曲線所包含的面積即為時過程中物體所增加的內能，這個能量應和物體的初始動能相等。由這個關係可以決定最大壓縮量。接著恢復過程中的 $P-u$ 曲線可以得到恢復過程中所釋放的能量，這個能量轉換成物體的最後動能。最後動能和初始動能比即為恢復係數的平方。由此可以得知不同初始動能下的恢復係數。

五、結果與討論

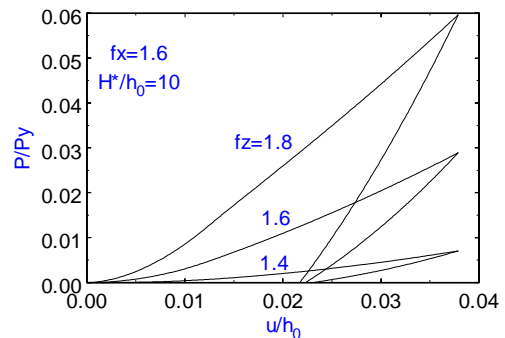
圖二和圖三表示不同的表面型態參數下的力和位移的關係圖。由圖可知，在 f_x 值相同的條件下，要造成同樣的位移所需的力隨著 f_z 的值的增加而增加。另一方

面，比較圖二和圖三可知，當 f_z 和位移相同時， f_x 越大所需的力越小。這是因為較大的 f_z 值(較小的 f_x)代表是較平滑的面，所以在相同的位移下要壓縮較多的材料，因此需要較大的力。

觀察圖二和圖三可知，受力和位移的關係隨著表面型態的不同而有定性上的差異。在圖二中，可以很明顯的看出加力的過程隨著彈、塑性變形分成兩個階段。在彈性變形部分，力隨著位移的增加而快速的增加。當某些凸起開始塑性變形時，力隨著位移增加的速度逐漸減小。相反的對一個相對的較粗糙的面(圖三)，由力和位移的曲線無法明顯的區分出彈性和塑性變形的階段。



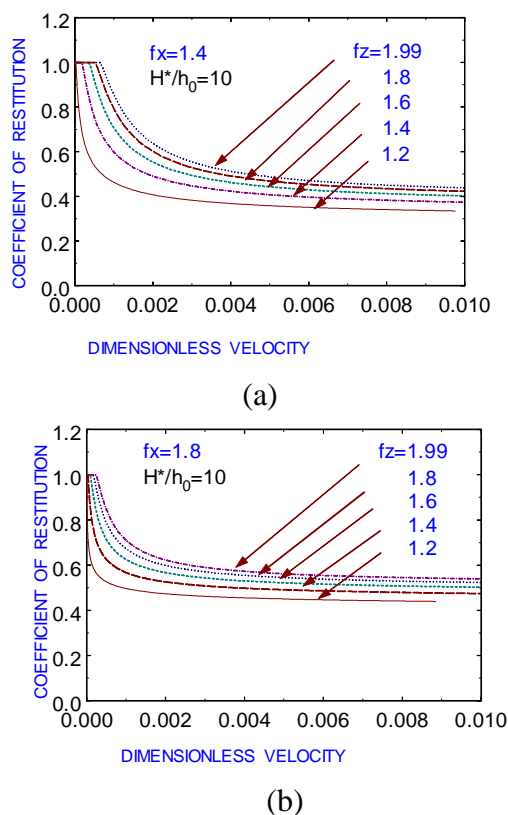
圖二、不同的 f_z 值下力和位移的關係圖



圖三、不同的 f_x 值下力和位移的關係圖

圖四表示不同的表面型態下，恢復係數和初始速度的關係。在初始速度小於一特定值時，不會產生塑性變形，所以恢復係數為 1。當初始速度大於這一特定值後，塑性變形的量隨著速度的增加而加大，因此恢復係數逐漸減小，但減小的速度隨著速度的增加而降低。由圖四可知，恢復係數隨著速度的增加會趨近一定值，這個值和

表面型態有關。在塑性變形產生的範圍內（恢復係數小於 1），恢復係數隨著 f_z 的增加（ f_x 減小）而加大。這是因為平滑表面有較多的凸起來承受壓力，所以產生塑性變形的量較小，因此有較小的能量損耗。



圖四、不同的 f_z 值下恢復係數和初始速度的關係(a) $f_x = 1.4$, (b) $f_x = 1.8$ 。

六、參考文獻

- [1] D. Tabor, 1951, *The hardness of metals*, Oxford University Press, London.
- [2] K. L. Johnson, 1985, *Contact Mechanics*, Cambridge University Press.
- [3] F. F. Ling, 1958, "On asperity distributions of metallic surface," *Journal of Applied Physics*, Vol. 29, pp. 1168-1174.
- [4] F. P. Bowden and D. Tabor, 1964, *Friction and Lubrication of Solids: Part II*, Oxford University Press, London.
- [5] J. F. Archard, 1957, "Elastic deformation and the laws of friction," *Proc. Roy. Soc. Lond.*, Vol. A243, pp. 190-205.
- [6] J. A. Greenwood and J. B. P. Williamson,

- 1966, "Contact of nominally flat surfaces," *Proc. Roy. Soc. Lond.*, Vol. A295, pp. 300-319.
- [7] Wen-Ruey Chang and F. F. Ling, 1991, "Normal impact model of rough surfaces," *ASME Journal of Tribology*, Vol.
- [8] B. B. Mandelbrot, 1967, "How long is the coast of Britain? Statistical self-similarity and fractional dimension," *Science*, Vol. 156, pp. 636-638.
- [9] B. B. Mandelbrot, 1983, *The Fractal Geometry of Nature*, Freeman, New York, NY, U.S.A.
- [10] David Avnir, Dina Farin and Peter Pfeifer, 1984, "Molecular fractal surfaces," *Nature*, Vol. 308, No. 15, pp. 261-263.
- [11] S. R. Brown and C. H. Scholz, 1985, "Closure of random elastic surfaces in contact," *Journal of Geophysical Research*, Vol. 90, No. B7, pp. 5531-5545.
- [12] Paul Meakin, "Fractal scaling in thin film condensation and material surfaces," in *CRC Critical Reviews in Solid State and Materials Science*, Vol. 13, Issue 2, pp. 143-189.
- [13] F. F. Ling, 1989, "The possible role of fractal geometry in tribology," *STLE Tribology Transactions*, Vol. 32, pp. 497-505.
- [14] A. Majumdar and B. Bhushan, 1990, "Role of fractal geometry in roughness characterization and contact mechanics of surfaces," *ASME Journal of Tribology*, Vol. 112, pp. 205-216.
- [15] A. Majumdar and B. Bhushan, 1991, "Fractal model of elastic-plastic contact between rough surfaces," *ASME Journal of Tribology*, Vol. 113, pp. 1-11.
- [16] F. M. Borodich and A. B. Mosolov, 1992, "Fractal roughness in contact problems," *J. Appl. Maths. Mechs.*, Vol. 56, No. 5, pp. 681-690.
- [17] T. L. Warren, A. Majumdar and D. Krajcinovic, 1996, "A fractal model for the rigid-perfectly plastic contact of rough surfaces," *ASME Journal of Tribology*, Vol. 63, pp. 47-54.