交錯格點應用於寬頻元素法上的研究

計畫編號：NSC 87-2212-E-002-063
執行期限：86. 8. 1 - 87. 7. 31
主持人：顏瑞和　　國立台灣大學機械工程學系

一、中文摘要

每一種數值方法都有其缺點，尤其是在計算 Navier-Stokes 方程式（亦稱動量方程式）的壓力場時，大部分的數值方法對於少部分例子都得不到合理的壓力場，就連最新的寬頻法及寬頻元素法也不例外，所以本文是用交錯格點應用在寬頻法及寬頻元素法上，來解不可壓縮之 Navier-Stokes 方程式，以得到較合理的壓力場。所謂交錯格點就是在解動量方程式時，在空間分割上，將速度及壓力分別配置於不同的格點上，而形成速度格點與壓力格點互相交錯的情況，非交錯格點則是速度與壓力配置於相同的格點上。在本文中，我們先簡單地敘述及證明理論基礎，然後驗證交錯格點程式的正確性，最後再計算實際無解析解的例子，並比較交錯格點交錯格點所算出的壓力之異同。

二、緣由與目的

早期用有限差分法來解一些熱流問題時，在壓力方面會產生震盪的現象，於是在 1965 年，由 Harlow 及 Welch 首先提出交錯格點（staggered grid or staggered mesh）的方法。之後的有限元素法，在解某些例子上，壓力仍然會有震盪現象產生，於是 Hood 及 Taylor 在 1973 年也將有限差分法交錯格點的觀念應用於有限元素法上面，並且得到不錯的結果。寬頻法、寬頻元素法與有限元素法皆屬於權重殘餘值法（MWR），所以在性質上與有限元素法幾乎一樣，在某些例子上，壓力仍然會有震盪的現象產生，所以解決的方法仍然是採用交錯格點的方法。

本文採用與 M. Iskandarani *et. al.*類似的壓力格點，就是速度為 N 階的 Gauss-Lobatto Legendre 格點，壓力為 N-1 階的 Gauss-Lobatto Legendre 格點。

三、理論基礎

在有限差分法、有限元素法、寬頻法及寬頻元素法中，會造成壓力震盪的原因是因為在解壓力時，除了得到真正符合物理意義的壓力之外，另外還存在一個與壓力相關的多維度的次空間，我們稱之為假性壓力模數（spurious pressure modes）或稱為寄生蟲壓力模數（parasite pressure modes），這個假性壓力模數會影響到真正的壓力解，使我們得到會有震盪情形的壓力。

四、數值方法

(i)時間座標離散化

考慮一個二維不可壓縮、黏滯係數為常數的Navier-Stokes方程式與連續方程式

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = \left[\vec{V} \times \vec{\omega} - \nabla\left(\frac{1}{2}\vec{V}\cdot\vec{V}\right)\right] - \nabla p + \nu\nabla^2\vec{V} + \vec{f} \qquad (1)$$

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0 \qquad \text{in } \Omega \qquad (2)$$

其中 $\vec{V}$ 是速度向量，$\vec{V}(\mathbf{x},t) = (u, v)$，$\vec{\omega}$ 是渦度（vorticity），$\vec{\omega} = \nabla \times \vec{V}$，$p$ 是壓力，ν 為動黏滯係數，$\vec{f}$ 是外力項，密度

$\text{°}=1$。Navier-Stokes 方程式中的對流項改寫成旋性形式，是因為如此可以減低數值運算上的誤差。我們用剛性顯性隱性積分法對（1）式作時間的積分，所以（1）式可近似為

$$\frac{\text{¥}_0\mathbf{v}^{n+1}-\sum_{q=0}^{J_i-1}\text{~}_q\mathbf{v}^{n-q}}{\Delta t}=-\sum_{q=0}^{J_e-1}\ {}_q\mathbf{N}\left(\mathbf{v}^{n-q}\right)-\nabla p^{n+1}+\mathbf{L}\left(\mathbf{v}^{n+1}\right)$$

(3)

上式中 $\mathrm{N}\left(\mathbf{v}^{n-q}\right)$ 為顯性處理的非線性項及作用力 $\left(\frac{1}{2}\nabla\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}-\mathbf{v}\times\mu-\mathbf{f}\right)$，$\mathrm{L}\left(\mathbf{v}^{n+1}\right)$ 為隱性處理的線性項($\text{¬}\nabla^2\mathbf{v}$)， J_i 和 J_e 代表積分階數。

分離法把式(3)其分成為下面三個步驟處理:

第一步驟為顯性非線性項

$$\frac{\hat{\mathbf{v}}-\sum_{q=0}^{J_i-1}\text{~}_q\mathbf{v}^{n-q}}{\Delta t}=-\sum_{q=0}^{J_e-1}\ {}_q\mathbf{N}\left(\mathbf{v}^{n-q}\right) \qquad (4)$$

第二步驟為壓力的積分

$$\frac{\hat{\hat{\mathbf{v}}}-\hat{\mathbf{v}}}{\Delta t}=-\nabla p^{n+1} \qquad (5)$$

第三步驟為線性黏滯項的積分，求取新的速度

$$\frac{\text{¥}_0\mathbf{v}^{\mathrm{n+1}}-\hat{\hat{\mathbf{v}}}}{\Delta t}=\text{¬}\,\mathbf{L}\left(\mathbf{v}^{\mathrm{n+1}}\right) \qquad (6)$$

上面式中 $\hat{\mathbf{v}}$ 和 $\hat{\hat{\mathbf{v}}}$ 各為一中間速度。不可壓縮條件使用在中間速度 $\hat{\hat{\mathbf{v}}}$

$$\nabla\cdot\hat{\hat{\mathbf{v}}}=0 \qquad (7)$$

第二步驟式(5)，就改寫為解以下的壓力 Poisson 方程式

$$\nabla^2 p^{n+1}=\nabla\cdot\left(\frac{\hat{\mathbf{v}}}{\Delta t}\right) \qquad (8)$$

此為分離法所要解的壓力方程式。式(6)和式(8)均為二階微分方程式，而 Dirichlet type 速度邊界條件

$$\mathbf{v}^{n+1}=\mathbf{v}_0 \qquad (8)$$

將應用到式(6)解出新的 $(n+1)$ 時間速度場。

(ii)空間座標離散化

觀察分離法所產生的速度與壓力的方程式（6）式與（8）式，可發現它們都是屬於 Helmholtz 方程式，Helmholtz 方程式的一般式如下：

$$-\nabla\cdot\left(\mathrm{h}_1\nabla\mathrm{u}\right)+\mathrm{h}_2\mathrm{u}=\mathrm{f} \qquad \text{in }\Omega \qquad (9)$$

其中 h_1、 h_2 為已知常數或變數，u 為待解變數， f 為已知的外力項。

我們應用變分學將 Helmholtz 方程式乘上權重函數 ¤，化為 weak form 的形式為

$$\sum_{k=1}^{K}\int_{\Omega^k}\left(\nabla\text{¤}\cdot\nabla\mathrm{u}+\text{¤}\mathrm{u}\right)dxdy=\sum_{k=1}^{K}\int_{\Omega^k}\text{¤}\,\mathrm{f}\ dxdy \quad 10)$$

最後我們可以得到 Helmholtz 方程式的張量積（tensor product）的數值積分式：

$$\sum_{k=1}^{K}\left(\mathrm{A}_{ijmn}^{k}+\mathrm{B}_{ijmn}^{k}\right)\mathrm{u}_{mn}^{k}=\sum_{k=1}^{K}\mathrm{B}_{ijmn}^{k}\mathrm{f}_{mn}^{k} \qquad (11)$$

$$\mathrm{A}_{ijmn}^{k}=\text{°}_p\text{°}_q\frac{1}{\left|J_{pq}^{k}\right|}\nabla_{pqij}^{k}\cdot\nabla_{pqmn}^{k} \qquad (12)$$

$$\mathrm{B}_{ijmn}^{k}=\text{°}_i\text{°}_j\left|J_{ij}^{k}\right|\text{¢}_{im}\text{¢}_{jn} \qquad (13)$$

其中

$$\nabla_{pqmn}^{k}=\left[\left(y_s\right)_{pq}^{k}D_{pm}\text{¢}_{qn}-\left(y_r\right)_{pq}^{k}\text{¢}_{pm}D_{qn}\right]\vec{i}+\left[\left(x_r\right)_{pq}^{k}\text{¢}_{pm}D_{qn}-\left(x_s\right)_{pq}^{k}D_{pm}\text{¢}_{qn}\right]\vec{j}$$

(14)

$$\text{°}_i=\frac{2}{N(N+1)\left[L_N\left(x_i\right)\right]^2} \qquad i=1,2,\ldots,N \qquad (15)$$

使用交錯格點，在 Navier-Stokes 方程式中，每個元素的應變數 u、 v 及 p 被內插近似成

$$u(r,s)=\sum_{m=1}^{N}\sum_{n=1}^{N}u_{mn}h_m(r)h_n(s) \qquad 16)$$

$$v(r,s)=\sum_{m=1}^{N}\sum_{n=1}^{N}v_{mn}h_m(r)h_n(s) \qquad (17)$$

$$p(r,s)=\sum_{m=1}^{N-1}\sum_{n=1}^{N-1}p_{mn}h_m(r)h_n(s) \qquad (18)$$

$$h_m(\text{¶})=\frac{-\left(1-\text{¶}^2\right)L'_{N-1}}{N(N-1)L_{N-1}\left(\text{¶}_m\right)\left(\text{¶}-\text{¶}_m\right)} \quad ,m=1,2,\ldots,N$$

……………………………………………… (19)

由時間之離散化配合 Helmholtz 方程式與 Poisson 方程式的離散化, 便可解得交錯格

點的速度場與壓力場。

五、數值方法之驗證

Kovasznay 流場是一個有解析解，沒有源性項且符合Navier-Stokes方程式的流動，其對應於 Navier-Stokes 方程式的解析解為：

$$u = 1 - \exp(\lambda \cdot x) \cdot \cos(2\pi y) \qquad (20)$$

$$v = \frac{\lambda}{2\pi} \exp(\lambda \cdot x) \cdot \sin(2\pi y) \qquad (21)$$

$$p = \frac{1}{2}\left[1 - \exp(2\lambda \cdot x)\right] \qquad (22)$$

其中 $\lambda = \frac{\mathrm{Re}}{2} - \sqrt{\frac{\mathrm{Re}^2}{4} + 4\pi^2}$ 。此測試例的計算區域為 $\Omega = \left]0,1\right[^2$ ，元素個數 K=1 及 K=4，雷諾數 Re=1。

寬頻法與寬頻元素法的計算結果如圖 4-2 及圖 4-3 所示，圖 4-2 是屬於非交錯格點的計算結果，而圖 4-3 是屬於交錯格點的計算結果。觀察圖 4-2 及圖 4-3 可發現不論非交錯格點與交錯格點的速度、壓力的誤差均有寬頻精確性，且寬頻法比寬頻元素法的精確性要來的好，這是因為寬頻元素法中，元素與元素之間只是 C^0-連續（C^0-continuity），並沒有給予高階微分也連續的限制，所以精確性比寬頻法還差。

六、實例應用

用來描述不可壓縮、密度及黏滯係數為常數的穴流問題，其統御方程式就是 Navier-Stokes 方程式及連續方程式

Navier-Stokes 方程式：

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \vec{V} = -\nabla p + \frac{1}{\mathrm{Re}} \nabla^2 \vec{V} \qquad (23)$$

連續方程式：

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0 \qquad (24)$$

我們的計算區域為 $\Omega = \left]-1,1\right[^2$ ，邊界條件為：

$u = v = 0$ at $x = 1$ or $x = -1$ ， $\forall y \in [-1,1]$

and at $y = -1$， $\forall x \in [-1,1]$ （25）

$u = -\left(1 - x^2\right)^2$ at $y = 1$， $\forall x \in [-1,1]$ (26)

$v = 0$ on $\partial\Omega$ （27）

七、結果與討論

圖 5-1 為穴流問題之幾何形狀；圖 5-4 與圖 5-5 為主格點階數 Nx=13 在不同位置時的速度剖面圖；圖 5-6 及圖 5-7 為主格點階數 Nx=13 在不同位置時的壓力剖面圖；圖 5-8 及圖 5-9 為主格點階數 Nx=15 在不同位置時的壓力剖面圖；圖 5-10 至圖 5-11 為主格點階數 Nx=17 在不同位置時的壓力剖面圖。

由速度剖面圖中我們可以發現，非交錯格點與交錯格點的速度幾乎是重合的，而且也沒有震盪的現象，另外由壓力剖面圖中，我們可以發現使用交錯格點所計算出來的壓力，震盪現象有是有（此與 Bernardi *et. al.*，1988 的理論相符），但震盪的幅度很小；反觀非交錯格點的壓力，震盪現象非常明顯，不過隨著主格點的階數增加，非交錯格點的壓力震盪現象便逐漸消失，這是因為寬頻法及寬頻元素法有寬頻精確度的緣故，不過在有限元素法也有相同的性質(Sani，1981)。

圖中所示的參考解實際上是用高階的交錯格點所算出的壓力來取代，因為我們在數值方法的驗證中證明，若格點的階數愈高，則數值解就愈趨近於正解，所以我們才把它當作解析解，作為低階的交錯格點與非交錯格點壓力的參考依據。

八、結論與建議

本文主要目的是將交錯格點應用到寬頻法及寬頻元素法上，並與非交錯格點法做比較，最後得到以下的結論：

(1)**使用交錯格點解壓力時，可以很明顯的消除使用非交錯格點時的壓力震盪現象。**

(2)**如果我們所要解的問題，並不著重壓力場的話，則使用非交錯格點會比較好。**

(3)**交錯格點應用於寬頻法寬頻元素法上，其誤差的收斂情形仍有寬頻精確性。**

(4)**因為另外再建立了一組壓力格點，所以比非交錯格點需要更多的記憶體空間。**

參 考 資 料

Bernardi, C. and Maday, Y. (1988): “A Collocation Method over Staggered Grids for the Stokes Problem”, *International Journal of Numerical Methods in Fluids*, **8**, 537-557.

Canuto, C. ,Hussaini, M. Y. , Quarteroni, A. , and Zang, T. A. (1988): *Spectral Methods in Fluid Dynamics*, Springer-Verlag, New York.

Harlow, F. H. and Welch, J. E. (1965): “Numerical Calculation of Time-Dependent Viscous Incompressible Flow of Fluid with Free Surface”, *Phys. Fluids*, **8**, pp. 2182-2189.

Huser, A. and Biringen, S. (1992): “Calculation of Two-Dimensional Shear-Driven Cavity Flow at High Reynolds Numbers”, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, **14,** 1087-1109.

Karniadakis, G. E. , Israeli, M. and Orszag, S. A. (1991): “High-Order Splitting Method for the Incompressible Navier-Stokes Equations”, *Journal of Computational Physics*, **97**, 414-443.

Mohamed Iskandarani, Haidvogel, D. B. and Boyd, J. P. (1995): “A Staggered Spectral Element Model with Application to the Oceanic Shallow Water Equations”, *International Journal of Numerical Methods in Fluids*, **20**, 393-414.

Montigny-Rannou, F. , and Morchoisne, Y. (1987): “A Spectral Method with Staggered Grid for Incompressible Navier-Stokes Equations”, *International Journal of Numerical Methods in Fluids*, **7**, 175-189.

Patera, A. T. (1984): “A Spectral Element Method for Fluid Dynamics: Laminar Flow in a Channel Expansion”, *Journal of Computational Physics*, **54**, 468-488.

Reddy, J. N. and Gartling, D. K. (1994): “Viscous Incompressible Flows”, chap. 4 in *The Finite Element Method in Heat Transfer and Fluid Dynamics*, CRC Press, Florida.

Ronquist, E. M. (1988): “Optimal Spectral Element Methods for the Unsteady Three-dimensional Incompressible Navier-Stokes Equations”, *Ph.D. Thesis*, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA.

Sani, R. L., Gresho, P. M., Lee, R. L. Griffiths, D. F. and Engelman, M. (1981): “The Cause and Cure (?) of the Spurious Pressures Generated by Certain FEM Solutions of the Incompressible Navier-Stokes Equations: Part 1”, *International Journal of Numerical Methods in Fluids*, **1**, 17-43.

Tomboulides, A. G. (1993): “Direct and Large-eddy Simulation of Wake Flows: Flows Past a Sphere”, *Ph.D. Thesis*, Princeton University.