

轉換矩陣法用於具多 Holonomic 運動對機構之運動分析

陳鈞泊*

李志日**

中華民國 台北市
國立臺灣大學
機械工程學系

林鎮洲***

中華民國 臺灣省 基隆市
國立臺灣海洋大學
船舶機械系

摘要

一般分析機構的運動，有多種方法可以使用，如向量法 (Vector algebra method)、矩陣法 (Matrix method) 或雙數法 (Dual number method) 等。其中矩陣法可清楚描述物體之幾何外形與關係，較易於處理複雜的物體與運動對。為了對具滾動接觸對之機構進行分析，本文首先討論建立滾動接觸對之轉換矩陣的方法，其次利用轉換矩陣所得之位置方程式，並加上滾動接觸之運動限制，得到完整的運動分析方程組，最後以數值解析法求得機構之位置解。

關鍵詞：滾動接觸對、運動分析、矩陣法、數值解。

一、前言

兩剛體 (以下泛稱物體) 間之相對運動，可分為滾動運動、滑動運動及二者混合之運動形式。對於兩物體間為滾動接觸之研究，Bottema 及 Roth [1] 指出空間中兩物體之滾動接觸其運動束縛方程式為 Nonholonomic 形式，亦即表示成兩物體速度參數之關係式，較直接表為位移參數關係式更為適當。Kerr 與 Roth [2] 曾研究多指式機械手抓取物體時之運動分析，並以速度形式表示其運動方程式。Cole 等人 [3] 亦推導出空間機械手操作物體的運動分析式，並進一步簡化，討論平面機械手之運動分析。Cai 及 Roth [4] 則針對具點接觸之平面物體，得到接觸點的相對遷移速度 (Shift velocity) 與兩接觸平面曲線外形的曲

率半徑相關。據此，Chen 及 Kumar [5] 探討具規則幾何形狀物體 (直線形指尖抓取圓形之物體) 之接觸運動，推導出兩者之運動束縛方程式；因物體外型曲線之曲率半徑為常數，故可表為位移之形式，亦即為 Holonomic 形式之束縛方程式。Agrawal 及 Pandravada [6] 在討論滾動接觸之運動束縛方程式時，亦以規則之外形為研究方向。由於上述研究均以向量法建立運動方程式，當物體之幾何外形較複雜時，向量法將不易描述接觸表面之幾何條件。本文利用轉換矩陣法具有易於描述物體幾何外形與運動對的特性，首先建立具滾動接觸運動對機構之運動方程式；並加上滾動接觸之運動束縛方程式得到完整的位置分析方程組，最後以數值法求得機構在連續運動時之解，並以電腦作圖模擬物體之運動狀況。

* 研究生 ** 助理教授 *** 副教授



二、矩陣法與轉換矩陣

2.1 D-H 矩陣法

Denavit 與 Hartenberg [7] 提出齊次轉換矩陣於空間機構之運動分析。D-H 轉換矩陣法利用兩相鄰連桿之幾何關係所構成之齊次轉換矩陣，可表示不同座標系間的轉換，以通式表示，可為 $\mathbf{X}_{i-1} = {}^{i-1}\mathbf{T}_i \mathbf{X}_i$ ，其中 \mathbf{X}_i 為座標系 i 之座標值， \mathbf{X}_{i-1} 為座標系 $i-1$ 之座標值， ${}^{i-1}\mathbf{T}_i$ 為轉換矩陣。

2.2 Sheth-Uicker 之轉換矩陣法

Sheth 及 Uicker [8] 方法是在相鄰的兩桿上建立不同的座標系統。每一桿上有兩個座標系統， (xyz) 與 (uvw) 。此兩個座標系統分別固定在桿件上接頭之位置，座標系統則依接觸對之運動特徵及桿件間之幾何關係來決定。如圖 1 所示，當欲建立相鄰接桿件間之轉換矩陣 ${}^{i-1}\mathbf{T}_i$ ，即由座標系統 $(uvw)_i$ 轉換至座標系統 $(uvw)_{i-1}$ 時，將轉換矩陣 ${}^{i-1}\mathbf{T}_i$ 可分成兩個子矩陣，

$${}^{i-1}\mathbf{T}_i = \mathbf{S}_{i-1} {}^{i-1}\mathbf{P}_i \quad (1)$$

其中矩陣 \mathbf{S}_{i-1} 稱為形狀矩陣 (Shape matrix)，為自座標 $(xyz)_{i-1}$ 至 $(uvw)_{i-1}$ 之轉換矩陣，主要描述連桿 $(i-1)$ 之幾何形狀；矩陣 ${}^{i-1}\mathbf{P}_i$ 稱為對偶矩陣 (Pair matrix)，為自座標 $(uvw)_i$ 至 $(xyz)_{i-1}$ 之轉換矩陣，用以描述相鄰桿件對偶元素 (Pair element) 上座標系統間的轉換。對於形狀矩陣與對偶矩陣內參數的訂定與矩陣的形成，可參閱 [8]。

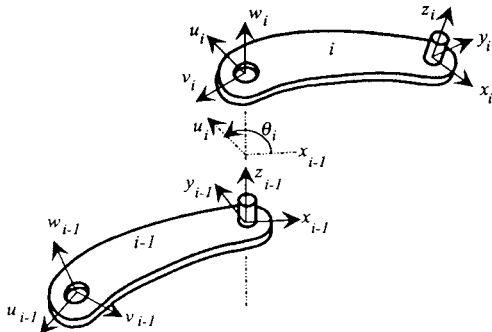


圖 1 Sheth-Uicker 轉換法中之座標系統

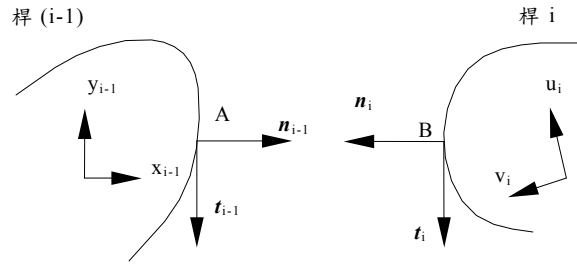


圖 2 兩表面接觸物體間之座標轉換

2.3 兩表面接觸物體間之對偶矩陣

對於具表面接觸之兩物體，Gutkowski 及 Kinzel [9] 進一步將上節中的對偶矩陣細分為三個子矩陣。如圖 2 所示，桿件 $i-1$ 及桿 i 相接觸於一點。設桿 $i-1$ 上之接觸點為 A ，桿 i 上之接觸點為 B ，今分別於兩接觸點 A 、 B 上分別定義一「浮動座標系統」(Floating coordinate system)，如此即可以下列之形式表示兩表面接觸物體間之對偶矩陣：

$${}^{i-1}\mathbf{P}_i = {}^{i-1}\mathbf{T}_A {}^A\mathbf{T}_B {}^B\mathbf{T}_i \quad (2)$$

其中 ${}^{i-1}\mathbf{P}_i$ 為兩表面接觸物體間之對偶矩陣，自座標系統 $(uvw)_i$ 至座標系統 $(xyz)_{i-1}$ 的座標轉換矩陣， ${}^{i-1}\mathbf{T}_A$ 為自浮動座標系統 $[\hat{t}_{i-1}, (\hat{n}_{i-1} \times \hat{t}_{i-1}), \hat{n}_{i-1}]$ 至座標系統 $(xyz)_{i-1}$ 的座標轉換矩陣， ${}^A\mathbf{T}_B$ 為自浮動座標系統 $[\hat{t}_i, (\hat{n}_i \times \hat{t}_i), \hat{n}_i]$ 至浮動座標系統 $[\hat{t}_{i-1}, (\hat{n}_{i-1} \times \hat{t}_{i-1}), \hat{n}_{i-1}]$ 的座標轉換矩陣， ${}^B\mathbf{T}_i$ 為自座標系統 $(uvw)_i$ 至浮動座標系統 $[\hat{t}_i, (\hat{n}_i \times \hat{t}_i), \hat{n}_i]$ 間的座標轉換矩陣。式 (2) 中接觸點浮動座標系統的建立，可以利用表面的幾何特性，以接觸點當原點，建立分屬兩桿件之直角座標系統，例如，取 \hat{t}_i 為沿著接觸點兩表面的公切線之單位向量； \hat{n}_i 為接觸點處兩表面的公法線單位向量；最後取 $(\hat{t}_i \times \hat{n}_i)$ 為座標系的第三軸。上述向量 \hat{t}_i 與 \hat{n}_i 可利用微分幾何的原理求得 [10]。是故，桿 i 上，浮動座標系統至桿件上的座標 $(uvw)_i$ 的轉換矩陣 ${}^i\mathbf{T}_B$ ，可如下式所示：

$${}^i\mathbf{T}_B = \begin{bmatrix} \hat{t}_{i,u} & (\hat{n} \times \hat{t})_{i,u} & \hat{n}_{i,u} & u_{i,s} \\ \hat{t}_{i,v} & (\hat{n} \times \hat{t})_{i,v} & \hat{n}_{i,v} & v_{i,s} \\ \hat{t}_{i,w} & (\hat{n} \times \hat{t})_{i,w} & \hat{n}_{i,w} & w_{i,s} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

上式中，1~3 行 (Column) 分別為浮動座標系各座標軸在座標系 $(uvw)_i$ 上的分量，第 4 行 $(u_{i,s}, v_{i,s}, w_{i,s})^T$ 為浮動座標系原點在座標系統 $(uvw)_i$ 上之座標。是故座標 $(uvw)_i$ 至浮動座標系統的轉換矩陣 ${}^B\mathbf{T}_i$ 即為 ${}^i\mathbf{T}_B$ 的反矩陣，

$${}^B\mathbf{T}_i = ({}^i\mathbf{T}_B)^{-1} \quad (4)$$

同理，桿 $i-1$ 上，浮動座標系至 $(xyz)_{i-1}$ 之轉換矩陣為

$${}^{i-1}\mathbf{T}_A = \begin{bmatrix} \hat{t}_{i-1,x} & (\hat{n} \times \hat{t})_{i-1,x} & \hat{n}_{i-1,x} & x_{i-1,s} \\ \hat{t}_{i-1,y} & (\hat{n} \times \hat{t})_{i-1,y} & \hat{n}_{i-1,y} & y_{i-1,s} \\ \hat{t}_{i-1,z} & (\hat{n} \times \hat{t})_{i-1,z} & \hat{n}_{i-1,z} & z_{i-1,s} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

剩下列則為兩浮動座標系統間之轉換。由於桿件運動時兩接觸面需一直保持接觸，即分屬於不同桿上兩接觸點 A 及 B 的浮動座標，其原點將保持重合，且將致使 \hat{n}_i 與 \hat{n}_{i-1} 共線。由於在此所定義之公法線向量是指出物體的表面，故 \hat{n}_i 與 \hat{n}_{i-1} 的方向相反。如圖 3 所示，則兩浮動座標系統 $[\hat{t}_i, (\hat{n}_i \times \hat{t}_i), \hat{n}_i]$ 與 $[\hat{t}_{i-1}, (\hat{n}_{i-1} \times \hat{t}_{i-1}), \hat{n}_{i-1}]$ 間之轉換矩陣 ${}^A\mathbf{T}_B$ ，可表示如下：

$${}^A\mathbf{T}_B = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 & 0 \\ \sin \varphi & -\cos \varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

其中 φ 是以 \hat{n}_{i-1} 為旋轉軸，由 \hat{t}_i 旋轉至 \hat{t}_{i-1} 的角度；由 \hat{n}_{i-1} 朝座標 $[\hat{t}_{i-1}, (\hat{n}_{i-1} \times \hat{t}_{i-1}), \hat{n}_{i-1}]$ 的原點看，逆時針為正。

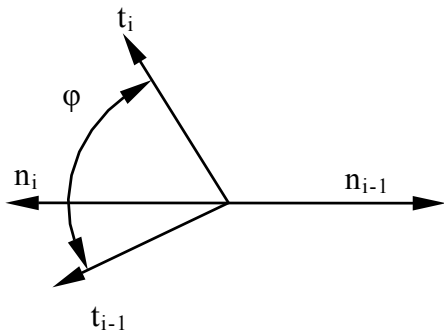


圖 3 接觸點上兩浮動座標之夾角

2.4 整體對偶矩陣

將式(4)、(5)及(6)代入式(2)，我們可求得具表面接觸運動對之兩物體的對偶矩陣表示式，且能清楚描述物體之幾何外形與接觸點移動位置之關係，

$$\mathbf{P} = {}^{i-1}\mathbf{T}_A {}^A\mathbf{T}_B {}^B\mathbf{T}_i = \begin{bmatrix} \hat{t}_{i-1,x} & (\hat{n} \times \hat{t})_{i-1,x} & \hat{n}_{i-1,x} & x_{i-1,s} \\ \hat{t}_{i-1,y} & (\hat{n} \times \hat{t})_{i-1,y} & \hat{n}_{i-1,y} & y_{i-1,s} \\ \hat{t}_{i-1,z} & (\hat{n} \times \hat{t})_{i-1,z} & \hat{n}_{i-1,z} & z_{i-1,s} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 & 0 \\ \sin \varphi & -\cos \varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{t}_{i,u} & (\hat{n} \times \hat{t})_{i,u} & \hat{n}_{i,u} & u_{i,s} \\ \hat{t}_{i,v} & (\hat{n} \times \hat{t})_{i,v} & \hat{n}_{i,v} & v_{i,s} \\ \hat{t}_{i,w} & (\hat{n} \times \hat{t})_{i,w} & \hat{n}_{i,w} & w_{i,s} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \quad (7)$$

三、滾動接觸之運動限制

對於兩物體表面間為純滾動之運動，在接觸點之運動條件將滿足：

- (1) 兩接觸點的速度必定相等，亦即兩接觸點之相對速度為零。
- (2) 因兩物體需保持接觸，故接觸點的位置會相等。
- (3) 兩物體的表面互相接觸，在接觸點處兩表面朝外的單位法線向量必定相等且反向。

Bottema 及 Roth [2] 曾提到，滾動接觸的運動限制以兩物體之速度式表示，若無法表示為可積分之形式則為 Nonholonomic 限制條件，若速度方程式可被積分，則為 Holonomic 限制式。Cai 及 Roth [3] 嘗針對具點接觸之平面兩物體，導得接觸點之接觸速度如下：

$$\dot{D}_{i-1} = -\frac{\omega + k_{i-1}v}{(k_{i-1} + k_i)} \quad (8a)$$

$$\dot{D}_i = \frac{-\omega + k_i v}{(k_{i-1} + k_i)} \quad (8b)$$

其中 \dot{D}_{i-1} 及 \dot{D}_i 分別為別物體 $i-1$ 及 i 上接觸點的移動速度； k_{i-1} 及 k_i 分別為物體之曲率半徑， ω 為物體 i 相對於物體 $i-1$ 之滾動角速度， v 為兩物體相對滑動速率（在滾動接觸時為零）。當曲率半徑不為常數（非為圓形或直線）時，亦無法由上式積分得到位移形式之限制式。故以此限制對於具滾動接觸對之機構進行運動分析時，皆需對複雜

的速度限制式進行數值積分，或僅能對具簡單接觸表面外形之機構建立位置及角度的限制式。

對於平面機構，當我們知道物體表面的函數時，將式(8a)及(8b)積分，而得到滾動接觸運動第一個限制條件的另一形式：

$$\mathbf{D}_{i-1} = \mathbf{D}_i \quad (9)$$

其中 $\mathbf{D}_{i-1} = \int_a^b \sqrt{1 + [f'_{i-1}(\zeta)]^2} d\zeta$ ， $\mathbf{D}_i = \int_c^d \sqrt{1 + [f'_i(\xi)]^2} d\xi$ 。

\mathbf{D}_{i-1} 和 \mathbf{D}_i 即為接觸點分別於兩物體之運動路徑長度， a 與 b 表示接觸點在運動路徑 \mathbf{D}_{i-1} 之初始位置及末了位置， c 、 d 表示接觸點在運動路徑 \mathbf{D}_i 之初始位置及末了位置，而函數 f^* 為物體 (*) 之表面函數。式(9)即表示平面物體在滾動接觸運動時，接觸點在兩物體表面所經路徑之位移必相等，此一限制式，可直接求得閉合解 (簡單外形) 或是藉由數值法求得數值解。是故，藉由式(9)的限制式與前節矩陣轉換所得的位置方程式，我們可以對平面上具複雜外形滾動對之機構進行運動分析。

四、具雙滾動接觸對之機構的運動分析

本節中，將應用前述之方法，對具雙滾動接觸對之平面機構建立桿件間之轉換矩陣以及滾動接觸限制式，並探討其解。

如圖 4(a) 所示之四桿機構，桿 2 與桿 4 夾持桿 3 運作，且桿 2 與桿 3 之間及桿 4 與桿 3 之間為滾動接觸。桿 2 及桿 4 的幾何外形為直線，桿 3 的幾何外形為半徑長 r 的圓。在進行運動分析前，為方便建立桿件與接頭間之轉換矩陣，須先定義出桿件上的每個座標系統。圖 4(b) 為機構之分離圖，圖上每個座標系統之定義為： $u_1-v_1-w_1$ ：位於桿 1 上之座標系統，原點與 O_B 重合； $x_1-y_1-z_1$ ：位於桿 1 上之座標系統，原點與 O_A 重合； $u_2-v_2-w_2$ ：位於桿 2 上之座標系統，原點與 O_A 重合； $x_2-y_2-z_2$ ：位於桿 2 上之座標系統，原點在 v_2 方向上，與 $(uvw)_2$ 的原點相距 l_2 ； $u_3-v_3-w_3$ ：位於桿 3 上之座標系統，原點在桿 3 的圓心上； $x_3-y_3-z_3$ ：位於桿 3 上之座標系統，原點在圓心上， x_3 軸與 u_3 軸共線並反向； $u_4-v_4-w_4$ ：位於桿 4 上之座標系統，原點在 y_4 方向上，與座標 $(xyz)_4$ 的原點相距 l_4 ； $x_4-y_4-z_4$ ：位於桿 4 上之座標系統，原點與 O_B 重合。

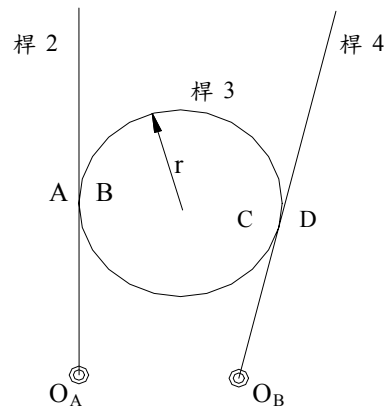


圖 4a 具簡單外形之雙滾動接觸對機構

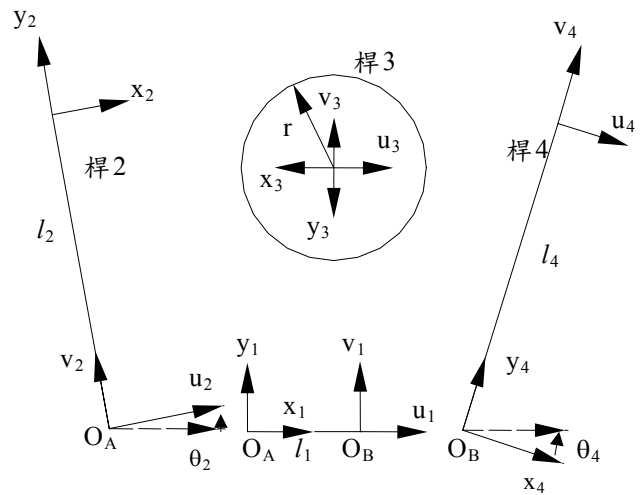


圖 4b 機構上所定義之座標系統

4.1 機構之轉換矩陣

設 \mathbf{S}_1 、 \mathbf{S}_2 、 \mathbf{S}_3 及 \mathbf{S}_4 分別為自座標系統 $(xyz)_1$ 至座標系統 $(uvw)_1$ 、 $(xyz)_2$ 至 $(uvw)_2$ 、 $(xyz)_3$ 至 $(uvw)_3$ 及 $(xyz)_4$ 至 $(uvw)_4$ 間的形狀矩陣，則

$$\mathbf{S}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -l_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & l_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{S}_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -l_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

其中 l_1 為座標 $(xyz)_1$ 原點至座標 $(uvw)_1$ 原點的距離， l_2 為 $(xyz)_2$ 原點至 $(uvw)_2$ 原點的距離， l_4 為座標 $(xyz)_4$ 至座標 $(uvw)_4$ 的距離。另外， 1P_2

及 4P_1 分別為座標系 $(uvw)_2$ 至 $(xyz)_1$ 及 $(uvw)_1$ 至 $(xyz)_4$ 之對偶矩陣，則

$${}^1P_2 = \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 & 0 & 0 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$${}^4P_1 = \begin{bmatrix} \cos \theta_4 & -\sin \theta_4 & 0 & 0 \\ \sin \theta_4 & \cos \theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

式中， θ_2 為 x_1 軸與 u_2 軸間的夾角。同理， θ_4 為 x_4 軸與 u_1 軸間的夾角。

4.2 滾動接觸對之對偶矩陣

由於桿 2 與桿 3 間為一滾動接觸對，故利用式(2)，可得桿 3 上座標系統 $(uvw)_3$ 至桿 2 上座標系統 $(xyz)_2$ 的對偶矩陣。

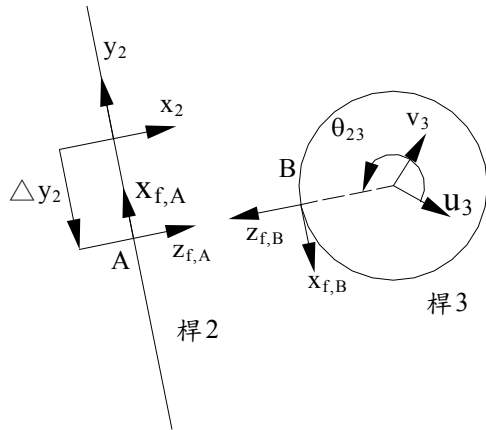


圖 5a 接觸點 A 及 B 的浮動座標系統

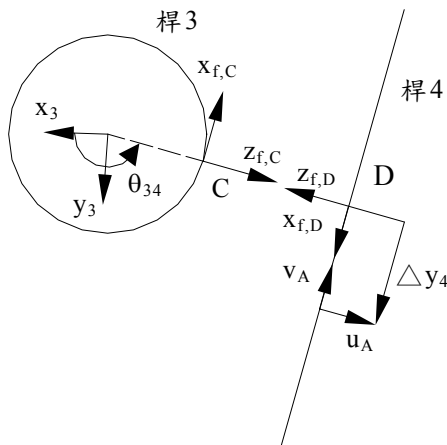


圖 5b 接觸點 C 及 D 的浮動座標系

如圖 5(a) 所示，假設接觸點位於桿 2 及桿 3 上的點分別為 A 及 B。在接觸點 A 上建立一個浮動座標系統 $(xyz)_{floating,A}$ ，其座標軸 $z_{f,A}$ 垂直於桿 2，軸 $x_{f,A}$ 延著桿 2 的方向。故從浮動座標系統 $(xyz)_{floating,A}$ 至座標系統 $(xyz)_2$ 間的座標轉換 2T_A 為：

$${}^2T_A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \Delta y_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (10)$$

式中， Δy_2 為接觸點 A 沿著 $(xyz)_2$ 的 y_2 軸移動之距離。

桿 3 的接觸外形為一個圓，接觸點 B 之單位切線向量 $\hat{t}_{3,\theta_{23}}$ 為 $[-\sin\theta_{23}, \cos\theta_{23}, 0]^T$ 、單位法線向量 $\hat{n}_{3,\theta_{23}}$ 為 $[\cos\theta_{23}, \sin\theta_{23}, 0]^T$ ， θ_{23} 為 u_3 軸至 B 點的夾角。在接觸點 B 上建立另一個浮動座標系統 $(xyz)_{floating,B}$ ，其座標軸 $z_{f,B}$ 為單位法線向量 $\hat{n}_{3,\theta_{23}}$ ， $x_{f,B}$ 軸為單位切線向量 $\hat{t}_{3,\theta_{23}}$ ，則座標系統 $(uvw)_3$ 至浮動座標系統 $(xyz)_{floating,B}$ 間的轉換矩陣 ${}^B T_3$ 可由式(4)求得：

$${}^B T_3 = ({}^3 T_B)^{-1} = \begin{bmatrix} -\sin \theta_{23} & \cos \theta_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \cos \theta_{23} & \sin \theta_{23} & 0 & -r \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (11)$$

最後，浮動座標系統 $(xyz)_{floating,B}$ 至 $(xyz)_{floating,A}$ 之轉換矩陣 ${}^A T_B$ ，可由式(6)得到：

$${}^A T_B = \begin{bmatrix} \cos \varphi_{23} & \sin \varphi_{23} & 0 & 0 \\ \sin \varphi_{23} & -\cos \varphi_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (12)$$

式中 φ_{23} 等於 π 。

整理式(10)、(11)及(12)，桿 3 上座標系統 $(uvw)_3$ 至桿 2 上座標系統 $(xyz)_2$ 的轉換矩陣對偶矩陣為：

$${}^2P_3 = {}^2T_A {}^A T_B {}^B T_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \Delta y_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -\sin \theta_{23} & \cos \theta_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \cos \theta_{23} & \sin \theta_{23} & 0 & -r \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (13)$$

重覆同樣的步驟，另一接觸點位於桿 3 及桿 4 分別為 C 與 D，可得桿 4 上座標系統 $(uvw)_4$ 至桿 3 上座標系統 $(xyz)_3$ 的轉換矩陣 P 為

$${}^3P_4 = {}^3T_C {}^C T_D {}^D T_4 = \begin{bmatrix} -\sin \theta_{34} & 0 & \cos \theta_{34} & r \cos \theta_{34} \\ \cos \theta_{34} & 0 & \sin \theta_{34} & r \sin \theta_{34} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \varphi_{34} & \sin \varphi_{34} & 0 & 0 \\ \sin \varphi_{34} & -\cos \varphi_{34} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & \Delta y_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (14)$$

式中， θ_{34} 為 x_3 軸至 C 點的夾角； Δy_4 為接觸點 D 沿著 $(uvw)_4$ 的 v_4 軸移動之距離。浮動座標系統 $(xyz)_{floating,C}$ 及 $(xyz)_{floating,D}$ 於桿 3 及桿 4 上之位置與方位如圖 5(b) 所示。

利用機構迴路封閉的特性，我們可以得到機構整個封閉迴路之轉換矩陣：

$$\mathbf{T} = [S_1^{-1} P_2(\theta_2)] [S_2^{-2} P_3(\Delta y_2, \varphi_{23}, \theta_{23})] [S_3^{-3} P_4(\theta_{34}, \varphi_{34}, \Delta y_4)] [S_4^{-4} P_1(\theta_4)] = \mathbf{I} \quad (15)$$

其中 \mathbf{I} 為一 4×4 單位矩陣。將 \mathbf{T} 矩陣展開並整理後， \mathbf{T} 矩陣中每一元素會與單位矩陣中每一元素相等，除去恆等式及相依方程式後，可得三組獨立方程式，其中矩陣第(1,4)及(2,4)項為獨立的位移限制式，而第(1,1)、(1,2)、(2,1)及(2,2)為四條相依的角度限制式，即僅有一條為獨立方程式。由於方程組中共有六個參數， θ_2 、 Δy_2 、 θ_{23} 、 θ_{34} 、 Δy_4 及 θ_4 ，故尚需加上二滾動限制式及一輸入參數，方可解此一問題。

由前述之滾動接觸限制式，式(9)，我們列出兩個滾動接觸對之運動限制條件，亦即接觸點分別在桿 2 和桿 3 運動路徑之長度相等與在桿 4 和桿 3 運動路徑之長度相等：

$$\Delta y_2 - y_{2,ini} = -r(\theta_{23} - \theta_{23,ini}) \quad (16)$$

$$\Delta y_4 - y_{4,ini} = r(\theta_{34} - \theta_{34,ini}) \quad (17)$$

上兩式中， $y_{4,ini}$ 、 $y_{2,ini}$ 、 $\theta_{34,ini}$ 及 $\theta_{23,ini}$ 分別為 Δy_4 、 Δy_2 、 θ_{34} 及 θ_{23} 之初始值。結合式(15)所得之三項獨立方程式及式(16)、(17)可建立完整之位置分析方程組。

4.3 逆向運動分析

在逆向運動分析中，已知運動物體（桿 3）上一點相對於地桿上座標系統 $(xyz)_1$ 之位置 (x_e, y_e) ，欲求得桿 2 及桿 4 旋轉之角度 θ_2 及 θ_4 ，桿 3 分別在桿 2 及桿 4 上滾動之距離 Δy_2 及 Δy_4 ，並桿 3 本身旋轉之角度。由於此機構的自由度為 1，故可令 x_e 或 y_e 為已知。現整理式(15)後可得

$$[S_1^{-1} P_2(\theta_2)] [S_2^{-2} P_3(\Delta y_2, \theta_{23})] = [S_3^{-3} P_4(\theta_{34}, \Delta y_4)]^{-1} [S_4^{-4} P_1(\theta_4)]^{-1} \quad (18)$$

比較第 (1, 4)、(2, 4) 及 (1, 2) 項之元素，可得到下列之關係：

$$\begin{aligned} x_e &= r \cos \theta_2 - (\Delta y_2 + l_2) \sin \theta_2 \\ &= l_1 - r \cos \theta_4 + (\Delta y_4 + l_4) \sin \theta_4 \end{aligned} \quad (19a)$$

$$\begin{aligned} y_e &= r \sin \theta_2 + (\Delta y_2 + l_2) \cos \theta_2 \\ &= r \sin \theta_4 + (\Delta y_4 + l_4) \cos \theta_4 \end{aligned} \quad (19b)$$

$$\sin(\theta_2 - \theta_{23}) = -\sin(\theta_{34} + \theta_4) \quad (19c)$$

是故整理式(19a)、(19b)、(19c)、(16)及(17)可得一方程組，如下所示：

$$r \cos \theta_2 - (\Delta y_2 + l_2) \sin \theta_2 = x_e \quad (20a)$$

$$r \sin \theta_2 + (\Delta y_2 + l_2) \cos \theta_2 = y_e \quad (20b)$$

$$\Delta y_2 - y_{2,ini} = -r(\theta_{23} - \theta_{23,ini}) \quad (20c)$$

$$l_1 - r \cos \theta_4 + (\Delta y_4 + l_4) \sin \theta_4 = x_e \quad (20d)$$

$$r \sin \theta_4 + (\Delta y_4 + l_4) \cos \theta_4 = y_e \quad (20e)$$

$$\Delta y_4 - y_{4,ini} = r(\theta_{34} - \theta_{34,ini}) \quad (20f)$$

$$\sin(\theta_2 - \theta_{23}) = -\sin(\theta_{34} + \theta_4) \quad (20g)$$

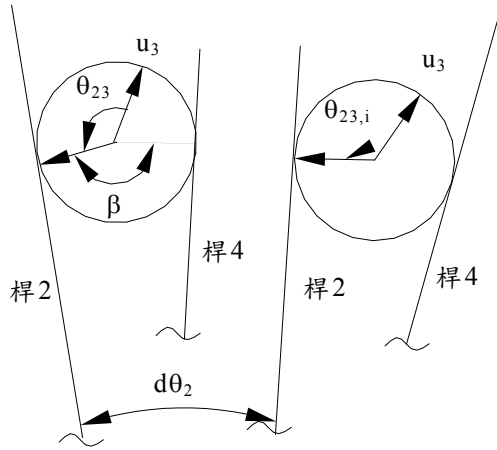


圖 6 桿 3 相對於地桿運動的角度

式(20a)~(20g)為一含七個未知數、七條方程式之聯立方程組，吾人可運用一般之數值方法，如 Newton-Raphson 法，求得其解。當解出所有變數後，桿 3 相對於地桿運動的角度可由下式求得：

$$\alpha = d\theta_2 + (\theta_{23,ini} - \theta_{23}) \quad (21)$$

其中 $d\theta_2$ 為桿 2 運動的角度，如圖 6 所示；此外兩接觸點所夾角度 β ，可表示為：

$$\beta = \pi + \theta_{34} - \theta_{23} \quad (22)$$

此一夾角可做為接觸點是否過於逼近的指標。

4.4 順向運動分析

由式(15)之第(1,1)、(1,4)及(2,4)得到一組獨立方程組，並加上滾動接觸限制式(16)和(17)，可得到完整運動分析方程式如下。

$$\cos(\theta_2 - \theta_{23} + \theta_{34} + \theta_4) = 1 \quad (23)$$

$$r \cos\theta_2 - (\Delta y_2 + l_2) \sin\theta_2 - l_1 + r \cos\theta_4 - (\Delta y_4 + l_4) \sin\theta_4 = 0 \quad (24)$$

$$r \sin\theta_2 + (\Delta y_2 + l_2) \cos\theta_2 - r \sin\theta_4 - (\Delta y_4 + l_4) \cos\theta_4 = 0 \quad (25)$$

$$\Delta y_4 - y_{4,ini} = r(\theta_{34} - \theta_{34,ini}) \quad (26)$$

$$\Delta y_2 - y_{2,ini} = -r(\theta_{23} - \theta_{23,ini}) \quad (27)$$

將式(24)乘 $\cos\theta_2$ 加上式(25)乘 $\sin\theta_2$ ，整理後可得 Δy_4 為

$$\Delta y_4 = \frac{r - l_1 \cos\theta_2 + r \cos(\theta_4 + \theta_2)}{\sin(\theta_4 + \theta_2)} - l_4 \quad (28)$$

將式(25)乘 $\sin\theta_4$ 減式(24)乘 $\cos\theta_4$ ，整理後可得 Δy_2 為

$$\Delta y_2 = \frac{r \cos(\theta_4 + \theta_2) - l_2 \sin(\theta_4 + \theta_2) - l_1 \cos\theta_4 + r}{\sin(\theta_4 + \theta_2)} \quad (29)$$

又式(26)加上式(27)可得到

$$\Delta y_4 + \Delta y_2 = r(\theta_{34} - \theta_{23} + \theta_{23,ini} - \theta_{34,ini}) + (y_{4,ini} + y_{2,ini}) \quad (30)$$

由式(23)可得到機構之角度限制式，

$$\theta_2 - \theta_{23} + \theta_{34} + \theta_4 = 2k\pi \quad (31)$$

上式中之 k 可為任意整數，但由於機構為一封閉迴路，可知 $k = 0$ 。將式(30)與式(31)消去 θ_{23} 與 θ_{34} 可得

$$\Delta y_4 + \Delta y_2 = r(-\theta_4 - \theta_2 + \theta_{23,ini} - \theta_{34,ini}) + (y_{4,ini} + y_{2,ini}) \quad (32)$$

將式(28)及式(29)帶入式(32)可得

$$\begin{aligned} & \frac{2r \cos(\theta_4 + \theta_2) - l_1 \cos\theta_4 - l_1 \cos\theta_2 + 2r}{\sin(\theta_4 + \theta_2)} - l_4 - l_2 \\ & = r(-\theta_4 - \theta_2 + \theta_{23,ini} - \theta_{34,ini}) + (y_{4,ini} + y_{2,ini}) \end{aligned} \quad (33)$$

由以上導證過程可知，分析順向運動時，當給定輸入角度 θ_2 後，可利用式(33)解出 θ_4 ；然後，將 (θ_2, θ_4) 代入式(28)與(29)分別解得 Δy_4 與 Δy_2 ；最後再以式(26)與(27)解 θ_{34} 與 θ_{23} 。

4.5 數值例說明

如圖 4(a)之機構，令 $l_1 = 2.5$ ， $l_2 = 4$ ， $l_4 = 4$ ， $r = 2$ ，並假設初始位置條件如下： $\theta_2 = 0$ ， $\theta_{23,ini} = \pi$ ， $y_{2,ini} = 0$ ，且桿 3 圓心位置 $(x_e, y_e) = (2, 4)$ 。利用式(20a)及(20b)可求得 Δy_2 有兩個值， $\Delta y_2 = 0$ 或 $\Delta y_2 = -8$ 。所以相對應的變數 $(\Delta y_2, \theta_2, \theta_{23}) = (0, 0, 180^\circ)$ or $(-8, 126.87^\circ, 306.87^\circ)$ 。同理，可求得兩組解 $(\Delta y_4, \theta_4, \theta_{34}) = (-0.5, 22.62^\circ, 157.38^\circ)$ 以及 $(\Delta y_4, \theta_4, \theta_{34}) = (-7.5, 143.13^\circ, 36.87^\circ)$ 。在此取 $(\theta_2, \theta_{23}, \Delta y_2, \theta_4, \theta_{34}, \Delta y_4) = (0, 180^\circ, 0, 22.62^\circ, 157.38^\circ, -0.5^\circ)$ 當作機構之初始條件。

當 θ_2 已知時，式(33)中之 θ_4 具有多組解。例如 $\theta_2 = 30^\circ$ 時， $\theta_4 = -6.2041^\circ$ 與 $\theta_4 = -380.3683^\circ$ 可為式(33)的兩個解。利用式(26)~(29)可計算出 $(\Delta y_2, \theta_{23}, \theta_{34}, \Delta y_4, \theta_4) = (-0.6674, 199.1208^\circ, 175.3249^\circ, 0.1264, -6.2041^\circ)$ 與 $(5.7261, 15.9626^\circ, 366.3263^\circ, 6.793, -380.3683^\circ)$ 為方程組的兩組解。第一組解的情形中，桿 2 上的接觸點 A 由初始位置 $y_2 = 0$ 朝 y_2 軸的負向移動至 $y_2 = -0.6674$ ，桿 3 上的接觸點 B 則沿桿 3 以逆時針方向移動至 $\theta_{23} = 199.1208^\circ$ ，而桿 4 上的接觸點 D 由 $y_4 = 0$ 移至 $y_4 = 0.1264$ 的位置，接觸點 C 沿逆時針方向移至 $\theta_{34} = 175.3249^\circ$ ，如圖 7(a) 所示，此為 $\theta_2 = 30^\circ$ 時合理的解。反之，第二組解中，接觸點 A 由 $y_2 = 0$ 朝 y_2 軸的正向移動至 $y_2 = 5.7261$ ，接觸點 B 則沿桿 3 以順時針方向移動至 $\theta_{23} = 15.9626^\circ$ ，此時接觸點 D 由朝 v_4 軸至 $v_4 = 6.793$ 的位置，接觸點 C 沿逆時針方向移至 $\theta_{34} = 366.3263^\circ$ ，如圖 7(b) 所示，此一運動不合乎機構的物理限制，所以此組解為不合理的解。故 $\theta_2 = 30^\circ$ 時，所求得的多組解中只有 $(\Delta y_2, \theta_{23}, \theta_{34}, \Delta y_4, \theta_4) = (-0.6674, 199.1208^\circ, 175.3249^\circ, 0.1264, -6.2041^\circ)$ 為合理的解，其餘的解皆不符機構實際的運動。因此對此機構而言，對每一個輸入角 θ_2 ，合理的解只有一組。

求解過程中，令桿 2 做正、逆時針旋轉，可發現 θ_2 約在 230° 附近，及在 -68° 附近，機構產生奇異點，如圖 8 所示， Δy_2 與 Δy_4 產生不連續之值。將所得的數據以電腦作圖模擬機構運動過程，可得如圖 9 所示之結果。

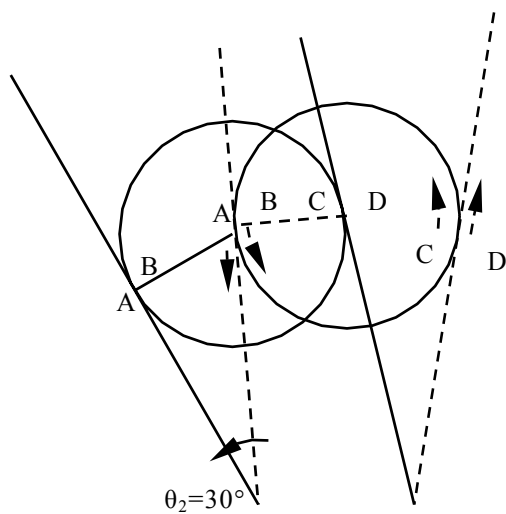


圖 7a $\theta_2 = 30^\circ$ 時，機構之合理運動情形

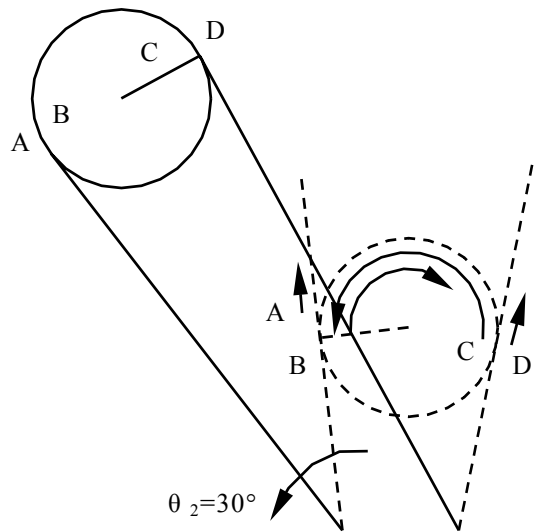


圖 7b $\theta_2 = 30^\circ$ 時，機構之不合理運動情形

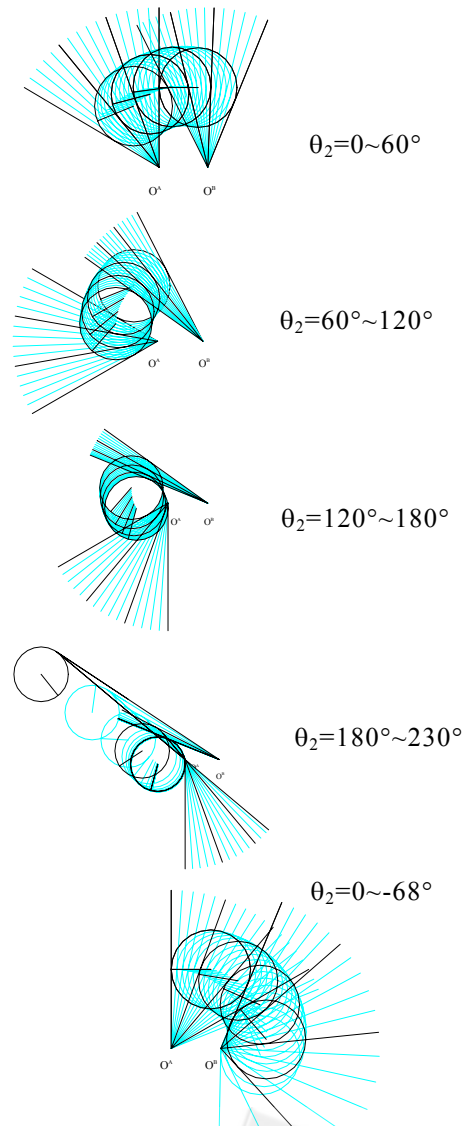
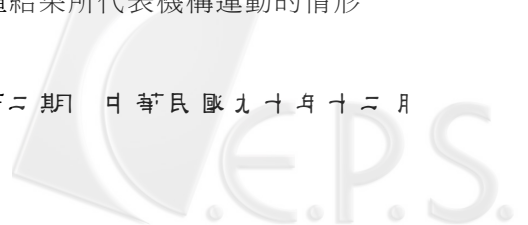


圖 8 數值結果所代表機構運動的情形



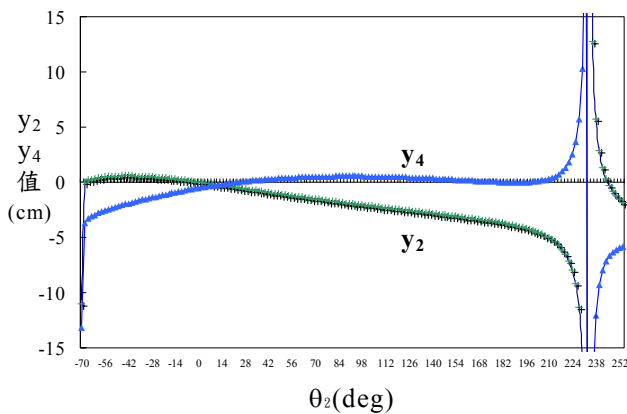


圖 9 Δy_2 與 Δy_4 在 θ_2 於 -70° 及 230° 時不連續

7、結 論

在本文中我們利用轉換矩陣法對平面上具雙滾動接觸機構進行運動分析，討論了矩陣轉換法在表面接觸時的應用，並利用路徑長之積分方法可得到滾動接觸運動限制之位移表示式。藉此對具雙滾動接觸對的四桿機構，建立了完整運動方程組。而順向運動分析時，機構對於每一個輸入角度，只有一組合理的解。另外，由數值解的結果得知，所舉例的機構具有奇異點，無法做 360° 的運動。由於轉換矩陣法可清楚描述物體之幾何外形與接觸點位置之關係，若以其他曲線外形代替簡單之直線後，亦能有效率地建立其完整之分析方程組，可彌補向量法在這一方面的缺點。

參考文獻

1. Bottema, O. and Roth, B., *Theoretical Kinematics*, Amsterdam; New York: North-Holland Pub. Co. (1979).
2. Kerr, J. and Roth, B., "Analysis of Multifingered Hands," *Int. J. Rob. Res.*, Vol. 4, No. 4, pp. 3-17 (1986).
3. Cole, A., Hauser, J. and Sastry, S., "Kinematics and Control of Multifingered Hands with Rolling Contact," *Proc. of IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, pp. 228-233 (1988).
4. Cai, C. S. and Roth, B., "On the Planar Motion of Rigid Bodies with Point Contact," *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 21, No. 6, pp. 453-466 (1986).

5. Chen, W., and Kumar, V., "Workspace of Planar Cooperating Robots with Rolling Contacts," *Advanced Robotics, The Int. J. of the Robotics Soc. of Japan*, Vol. 9, No. 5, pp. 483-504 (1995).
6. Agrawal, S. K. and Pandravada, R., "Kinematics and Workspace of a Rolling Disk Between Planar Manipulators," *Proc. of A. C. C.*, San Francisco, California, pp. 741-745 (1993).
7. Denavit, J. and Hartenberg, R. S., "A Kinematic Notation for Lower Pair Mechanisms Based on Matrices," *ASME J. of Applied Mechanics*, Vol. 22 (1955).
8. Sheth, P. N. and Uicker, J. J., "A Generalized Symbolic Notation for Mechanisms," *ASME J. of Engineering for Industry*, Vol. 93 (1971).
9. Gutzowski, L. J. and Kinzel, G. L., "Kinematic Transformation Matrices for 3D Surface Contact Joints," ASME, Design Engineering Division (Publication) DE-Vol. 46, pp. 599-606 (1992).
10. Thomas, G. B., *Calculus and Analytic Geometry*, Addison-Wesley Pub. Com., 4th Edition (1969).

APPLICATION OF MATRIX METHOD ON THE KINEMATIC ANALYSIS OF MECHANISMS WITH HOLONOMIC PAIRS

Chun-Po Chen * Jyh-Jone Lee **

*Department of Mechanical Engineering
National Taiwan University
Taipei, Taiwan 10617, R.O.C.*

Chen-Chou Lin ***

*Department of Mechanical and Marine Engineering
National Taiwan Ocean University
Keelung, Taiwan 202, R.O.C.*

ABSTRACT

There are several methods for the kinematic analysis of mechanisms such as Vector algebra method, Dual number method, and Matrix method. Among these methods, the matrix method has the advantage of describing the geometric relations of link members such that it is easy to handle kinematic pairs of complex configuration. In this paper, a procedure for modeling the higher pair in the mechanism is established using the matrix transformation method. Then, the loop closure equations from the overall transformation matrix and displacement constraints for two links in rolling pair are derived. Finally, the comprised simultaneous equations for the position analysis of the mechanism are solved via the numerical method. An example is also given to illustrate the procedure.

Keywords: Rolling pairs, Position analysis, Matrix transformation method, Numerical solution.

* Graduate Student ** Assistant Professor
*** Associate Professor

(Manuscript received July 6, 2001,
Manuscript revised Sept. 4, 2001,
Accepted for publication Oct. 9, 2001.)