寬頻元素穩態流場解法的研究發展

計畫編號：NSC88-2212-E-002-035
執行期限：87 年 8 月 1 日至 88 年 7 月 31 日

主持人：顏瑞和　國立台灣大學機械系

一、 中文摘要

利用時間趨近法來逼近穩態解的方法，通常都會產生時間間隔無法跨大，或是每個時間間隔中，因對流項的非線性疊代而花費相當多的計算時間。本文將發展一套穩態計算法則，來解不可壓縮之 Navier-Stokes 方程式。本法以完全隱性積分分離法為基礎，但為求快速達到穩態收斂的目的，在分離步驟中的壓力方程式中加入穩態壓力方程式所應擁有的非線性項。在解對流擴散方程式的步驟時，對流速度以上個疊代值近似，然後用雙正交共軛梯度法解之。從實例測試可知，本文所發展的方法具有快速穩態收斂。

關鍵字：穩態解、完全隱性法、分離法、共軛梯度

二、 ABSTRACT

In this research a novel steady state solver was proposed. This method is based on the fully implicit time integration scheme and it is applied to the fractional time splitting scheme. In order to come to the convergence solution quickly, In the step to solve the pressure . The Laplace form of the pressure in the steady state is imposed . In the second step the equations consists of convection and diffusion terms for the velocity variables. This nonlinear convection term is linearized by lagging the convective velocity. The resulting equation is solved by the biorthogonal conjugate gradient method. The numerical experiments show that this method is promising, but further study is needed to understand whether this method can be applied to different kinds of the problems.

Keywords: Steady method , Fully implicit , Splitting scheme , Biorthogonal conjugate gradient method

三、 緣由與目的

近年在熱流學的數值模擬上，寬頻元素法(Spectral Element Method)是為一個相當新且熱門的方法，由於它結合了有限元素法(Finite Element Method)具有處理複雜幾何形狀的能力，與寬頻法(Spectral Method)所具有高準確度之特性，因而受到相當的注意。

早期用有限差分法來解一些熱流問題時，在時間積分方面一般都採用顯性積分法(Gresho et al. 1984)，此種 scheme 方便且簡單，只需給定足夠的初始值及邊界條件，一代入便能很快得到解答。但是此種積分法存在著缺點，如時間跨距無法的跨大，造成我們在用數值計算一個物理系統，要能夠計算到穩態時，必需花費很長的 CPU 時間。鑑於此，所以一些科學家便又提出了隱性積分法(implicit scheme)，如此可以把時間跨距跨大，以便進速達到穩態，這兩種積分法以上所示的優缺點在 Schneider(1993)及 Arora(1997)論文中有提到。　另外一種處理的方法是採用 mixed explicit/implicit scheme，但其

時間跨距會受到限制。

所以在本文中，我們將針對非線性的對流項，也類似以隱性積分法來處理，把它放在跟線性黏滯項一起求解，不過在針對穩態問題上仍具有隱性積分法時間跨大的特性。而在解的過程中，還是採用原來的高階分離法，因此在解壓力邊界條件時，會遇到非線性項coupled的處理問題，我們還是採用高階壓力邊界條件的形式處理壓力邊界，以顯性積分法來近似。以上整個過程我們把它稱為穩態計算法則。

四、 數值方法

我們現在就將完全隱性積分法應用於Navier-Stokes方程式上面。我們使用分離法(splitting scheme)，分成三個步驟解速度與壓力(Karniadakis 1993).

在穩態的條件下，對動量方程式式取散度可得到

$$\nabla^2 p = \nabla \cdot N(\vec{V})$$

為求壓力方程式符合穩態的條件，完全隱性積分法的壓力方程式的步驟必須加以修正如下

$$\nabla^2 p^{n+1} = \nabla \cdot \left(\frac{\hat{V}}{\Delta t} + N\left(\vec{V}^{n}\right) \right)$$

五、 實例應用

在上一章利用一些例子來驗證數值方法的正確性後，我們可以看到將穩態計算法則運用於寬頻元素法上，能夠得到時間跨距的增大，因而減少CPU計算時間，在本章節中，我們將更進一步探討實際應用的例子，探討其CPU計算時間，及所求得的流場結果。我們所舉的例子為一個穴流問題(driven cavity problem)，分四組來作模擬，第一組為Re=100，element=4時，第二組為Re=200，element=4時，第三組為Re=100，element=16時，第四組為Re=200，element=16時，以上四組所求的結果將跟剛性顯性隱性混合積分法作比較，比較其CPU計算時間跟計算結果。

第一組(Re=100，element=4)：

由在表1中可以知道，穩態計算法則的最大時間跨距都比剛性顯性隱性混合積分法還要大。再由表1可知，穩態計算法則由於時間跨距的跨大，因此在針對穩態問題時，在相同order的穩態收斂標準下，則需要較少的時間疊代次數，但是其平均一個time step所需要的CPU時間反而會比剛性顯性隱性混合積分法還要大，不過整體上而言，由於時間跨距的增大，穩態計算法則比剛性顯性隱性混合積分法還要能夠節省CPU的計算時間，而且能得到蠻吻合的結果。

第二組(Re=200，element=4):

由表2中可知，利用穩態計算法則所求得的最大時間跨距比剛性顯性隱性混合積分法還要大，因此能夠使用較少的時間疊代次數去作計算，因而能夠節省CPU花費的時間，而穩態收斂度也有相同的order，且在速度跟壓力的計算也能得到大致上吻合的結果。

第三組(Re=100，element=16)：

由表3可知，穩態計算法則的最大時間跨距都能比剛性顯性隱性混合積分法還要跨大，因此在CPU時間的花費上也能夠節省。

第四組(Re=200，element=16)：

由表4可知，穩態計算法則的最大時間跨距比剛性顯性隱性積分法大上好幾倍，而在CPU時間的花費也能節省。

綜合以上的實例應用可知，穩態計算

法則使用跨大的的時間跨距，都能夠得到相當精確度的流場，且在雷諾數愈大時，所節省的 CPU 時間更為明顯，這是因為剛性顯性隱性混合積分法在雷諾數愈大時，其時間跨距不易跨大，而顯的非常的小，而穩態計算法則仍保有較大的時間跨距，相對地在 CPU 時間能夠節省，在速度上，兩種積分法所求得的結果都能吻合，而壓力的吻合度就顯的比較差。在以上實例的應用中，我們最主要驗證了時間跨距能跨大，且使用跨大的時間跨距，仍能預測出相當精確度的流場趨勢以及大大的降低了 CPU 的計算時間。

六、 結論

本文主要目的是將穩態計算法則應用於寬頻元素法上，並與剛性顯性隱性混合積分法作比較，最後由計算時間跟精確度的比較可得到以下的結論：

1. 本文是以完全隱性積分分離法為基礎，但為求快速達到穩態收斂的目的，在分離步驟中的壓力方程式中加入穩態壓力方程式中所應有的非線性項，在解對流擴散方程式的步驟時，對流速度以上個疊代值近似，然後用雙正交共軛梯度法解之。從實例測試可知，本文所發展的方法具有快速穩態收斂的特性。
2. 穩態計算法由於時間跨距比剛性顯性隱性混合積分法跨大好幾倍，因此在作穩態計算時，穩態計算法則需要較少的疊代次數，但相對地每次疊代需要較長的時間計算量，不過總體而言，穩態計算法則因為疊代次數的減少，而能夠大大的減少 CPU 的計算時間。

七、 參考文獻

1. Arora, J. S. (1997):” Explicit and Implicit for design sensitivity analysis of nonlinear structure under dynamic loads.”, Applied Mechanics Reviews 50, 11 pt 2, (Nov, 1997) 47384,s11-s19.
2. Ascher, U.M. (1997):” Implicit-explicit Runge-Kutta methods for time-dependent partial differential equations.”, Applied Numerical Mathematics 25, 2-3, 151-167
3. Gresho P. M. and Sani R. L. :”On Pressure Boundary Conditions for the Incompressible Navier-Stokes Equation(1987)”,International Journal for Numerical Methods in Fluids,Vol.7, 1111-1145.
4. Schneider, G.E. (1993)” Explict vs implicit schemes for the spectral method for the heat equation”, Journal of Thermophysics and Heat Transfer v 7, n 3, p 454-461.
5. Turek , Stefan (1996)”A Comparative of Time-Stepping Techniques for the Incompressible Navier-Stokes Equations: From Fully-Implicit Non-linear Schemes to Semi-Implicit Projection Methods”, International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol. 22 , 987-1011.

表 1　CPU 計算時間的關係圖(Cavity flow)
(Re=100，4 element)

Mixed explicit/implicit (13×13)				
$\Delta t_{\max}$	時間跨距 Δt	Time steps (N)	Div2	CPU
0.04	0.04	1900	0.4052E-2	263.26
Steady method (13×13)				
$\Delta t_{\max}=0.75$				
時間跨距 Δt	N steps	Div2	CPU	
0.2	250	0.2652E-2	45.86	

表 2　CPU 計算時間的關係圖(Cavity flow)
(Re=200，4 element)

Mixed explicit/implicit (13×13)				
$\Delta t_{\max}$	時間跨距	Time steps	Div2	CPU
0.02	0.02	4000	0.1640E-1	491.24
Steady method (13×13)				
$\Delta t_{\max}=0.30$				
時間跨距 Δt	N steps	Div2	CPU	
0.1	620	0.1231E-1	94.97	

表 3　CPU 計算時間的關係圖(Cavity flow)
(Re=100，16element)

Mixed explicit/implicit (9×9)				
$\Delta t_{\max}$	時間跨距	Time steps	Div2	CPU
0.04	0.04	2000	0.4608E-2	496.14
Steady method (9×9)				
$\Delta t_{\max}=0.81$				
時間跨距 Δt	N steps	Div2	CPU	
0.2	190	0.2608E-2	83.16	

表 4　CPU 計算時間的關係圖(Cavity flow)
(Re=200，16element)

Mixed explicit/implicit 9×9				
$\Delta t_{\max}$	時間跨距	Time steps	Div2	CPU
0.02	0.02	4000	0.1709E-1	412.76
Steady method 9×9				
$\Delta t_{\max}=0.31$				
時間跨距	N steps	Div2	CPU	
0.1	610	0.1133E-1	177.63	