

# 行政院國家科學委員會專題研究計畫成果報告

## 直接頻譜元素法二維穩態流數值模擬開發

### Direct Solver of 2D Steady Flows in Use of Spectral Element Method

計畫編號：NSC 89-2212-E-002-071

執行期限：88年8月1日至89年7月31日

主持人：黃美嬌 國立臺灣大學機械工程研究所

計畫參與人員：洪榮泰、陳俊宇、許家銘 國立臺灣大學機械工程研究所

#### 一、中文摘要

本計畫成功以頻譜元素法離散穩態不可壓縮流場運動方程式。三種不同流場測試結果顯示：完全及不完全交錯格點搭配超參映射(相對於壓力場)，程式皆可收斂，假性壓力模態並未出現；分離誤差確實完全消失。研究結果並發現壓力格點與速度格點靠近之交錯格點分佈，其收斂情形出乎意外地遠快於壓力格點與速度格點均勻分佈之情形。至於完全或不完全交錯，則影響不大。另，比較使用分離技術法得到之流場解，發現分離誤差確實對牆邊界處細微的流場組織有污染，建議牆邊界處之重要物理量，如剪刀或壓力分佈，應謹慎處理。

**關鍵詞：**頻譜元素法、超參映射、假性壓力模態、分離誤差

#### Abstract

A direct steady incompressible Navier-Stokes solver has been successfully implemented. The simulation results of three different flow fields show that both complete or incomplete staggered grids work fine with super-parametric mapping. Spurious pressure modes never appear and splitting errors vanish thoroughly. The convergence speed is much faster when used is the staggered grid in which the pressure nodes are distributed closely to the velocity nodes. Being completely or incompletely staggered turns out to affect little. Flows obtained through the splitting technique are compared. The data shows that detailed flow information near walls are in deed contaminated by the splitting errors.

**Keywords:** spectral element method, super-parametric, spurious pressure modes, splitting errors

#### 二、緣由與目的

穩態不可壓縮流場的模擬通常有兩種方法來獲得：一是數值解 unsteady Navier-Stokes 方程式，直到數值解不再隨積分時間的增加而改變時，該數值解即可視為穩態解的近似解；一是直接尋找 steady Navier-Stokes 方程式的解。前者所面臨的數值困難多在於全域矩陣龐大，而且為 ill-conditioned (見 Noor and Oden [1])，收斂緩慢；搭配分離技術(見 Orszag and Kells [2]、Karniadakis [3]、Korcrak and Patera [4]) 是一個解救的辦法，可簡化計算，節省相當大的計算時間，然而卻會引起所謂的分離誤差(Orszag et al [5])。以往的計算多忽略分離誤差的影響，取其  $L_2$ -norm 達  $10^{-4}$  或更小的值，然而詳細的研究(黃美嬌 [6]、Marcus [7])可以發現其  $L_\infty$ -norm 常高達  $10^{-1}$  甚至更高，也就是說流場少部分區域，局部體積守恆很差。對於著重平均值預測的工業應用而言，分離誤差或許不是問題，但對於一些尋求臨界點的基礎研究(如預測 separation point 的位置)，或富細微流場組織的紊流場模擬，分離誤差將造成很大的困擾。

本計畫因此選擇直接尋找 steady Navier-Stokes 方程式的解。空間離散方面，選擇頻譜元素法，取其高準確性與處理空間幾何之高彈性。然而，受限於元素法的內差誤差及元素邊界連續性不佳的影響，如以上述第一種方法，分離誤差的控制並不容易。至於第二種方法，以往研究較少，發展較不

完全，如 spurious pressure modes 是否存在，尚無法證實。因此，本計畫研究的目標主要有二：一是針對內差點、內差函數與座標轉換的多種選擇(組合)，包括完全/不完全 staggered grid，測試 spurious pressure modes 在何種情況下可以不存在，特別是針對一般非四方之幾何邊界流場問題做測試；二是完成一個確實無分離誤差的頻譜元素法-steady Navier-Stokes solver，我們將選擇適當流場，同時以具分離誤差的頻譜元素法-unsteady Navier-Stokes solver 來模擬，以比較分析分離誤差的影響。

### 三、結果與討論

經測試發現以頻譜元素法離散對流式(convective form)動質量方程式，有最佳結果；skew-symmetric form 其次；而守恆式(conservative form)最差。

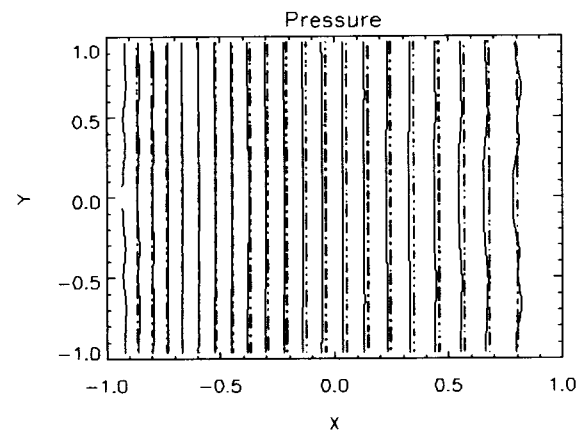
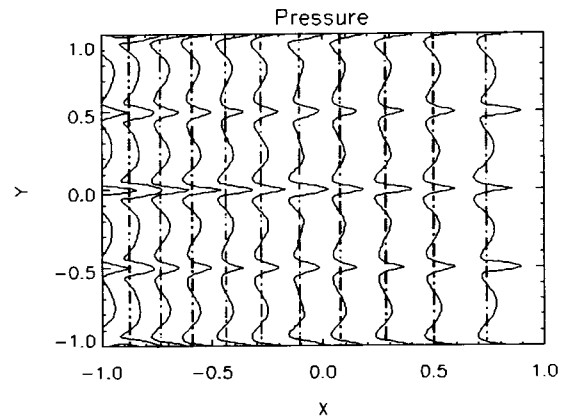
計畫中選擇 KOVASZNAY 流場、均勻圓柱流、及突張流為測試流場，以使用分離技術所得之解(具分離誤差)為疊代初始值，測試結果分述於下。

#### (a) KOVASZNAY 流場:

Re=200，測試結果見表一，其中速度場使用 N 階內差、壓力場使用  $N_p-1$  階內差； $L_2$ 、 $L_\infty$  為分離誤差之值； $L_\infty(p)$  表數值解與解析解之壓力最大誤差；# 則表  $L_\infty$  分離誤差收斂至  $10^{-6}$  所需遞迴次數。

表一: KOVASZNAY 流場

	N	$N_p$	$L_2$	$L_\infty$	$L_\infty(p)$	#
Case1	Splitting		7.7e-4	3.7e-3	1.81e-3	-
	6	6	1.3e-7	7.1e-7	7.01e-5	59
	6	5	2.0e-7	7.4e-7	3.86e-5	26
Case2	Splitting		8.9e-3	6.8e-2	1.83e-3	-
	7	7	1.1e-7	8.2e-7	9.18e-4	65
	7	6	7.1e-8	6.2e-7	2.61e-4	29
Case3	Splitting		7.0e-2	4.5e-1	5.10e-2	-
	5	5	1.e5-7	6.9e-7	1.58e-2	54
	5	4	1.8e-7	6.0e-7	4.77e-3	24

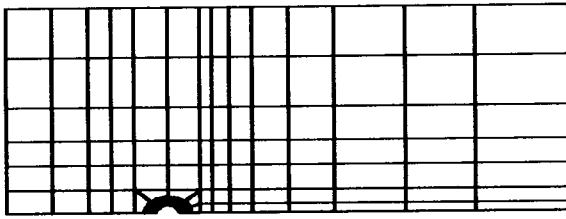


圖一: case3 具(上圖)與不具(下圖)分離誤差之壓力場數值解(黑線)與解析解(紅線)

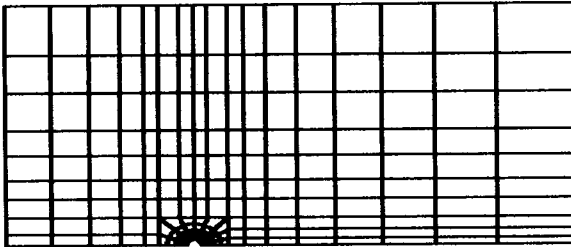
表一顯示不論使用那一種格點分佈，程式皆可收斂，且無假性壓力模態出現。表中也顯示出若使用分離技術，局部質量守恆很差，如 case3，雖然  $L_2$  可控制至 0.07，但  $L_\infty$  卻大到 0.45。最後，表中顯示去除分離誤差後，壓力場準確性至少提高一個 order。圖一為壓力等高線，可明顯看出分離誤差對壓力場有嚴重的污染。

#### (b) 均勻圓柱流

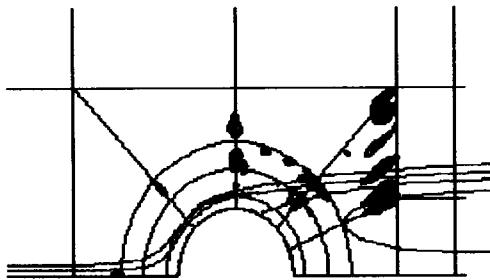
Re=100，測試結果見表二。其中 case1 及 case2 元素分佈見圖二(a)，case3 及 case4 元素分佈見圖二(b)。CPU 為 HP C160 上執行至  $L_\infty$  分離誤差  $< 10^{-6}$  所需時間。圖三為分離誤差去除前聚集處代表。表二清楚顯示  $N_p=N$ (壓力格點與速度格點均勻分佈)之收斂情形慢很多，圖四為收斂過程。詳細檢查流場後發現，( $N_p=N$ )與( $N_p=N-1$ )準確



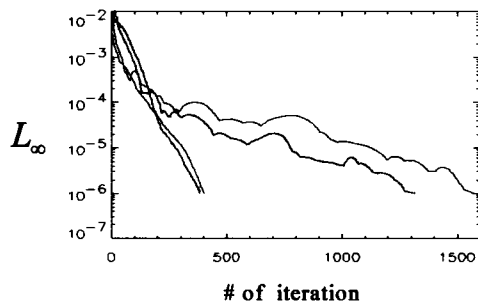
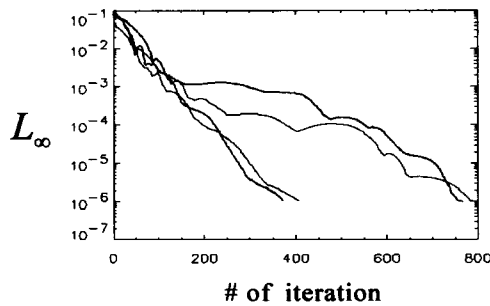
圖二(a)



圖二(b)



圖三: case1



圖四: 分離誤差收斂過程。上圖: case1 (紅) & 2(黑); 下圖: case3 (紅)& 4(黑)。較快者為  $N_p=N-1$ 。

性相當。因此, 考慮 CPU, 建議應採後者。

表二: 均勻圓柱流

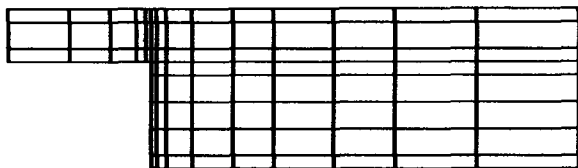
	N	$N_p$	CPU/ $L_\infty$
Case1	Splitting		0.027498
	5	5	13m16.7s
	5	4	6m33.22s
Case2	splitting		0.017457
	6	6	23m41.95s
	6	5	10m28.66s
Case3	splitting		
	5	5	
	5	4	21m14.50s
Case4	splitting		0.00401
	6	6	2h31m37.59s
	6	5	37m52.48s

(c) 突張流

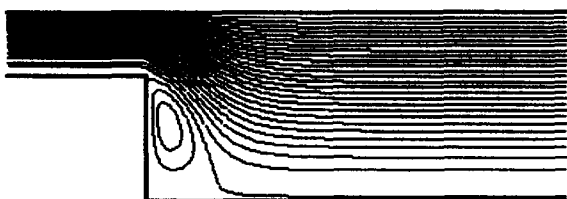
$Re=26$ , 結果見表三。表三中所有 cases 皆使用同一元素分佈(見圖五)。圖六為穩態解流線圖。已知突張流在突張處分離誤差最嚴重, 且無法以提高空間解析度來降低。圖七繪製有分離誤差的收斂過程。測試結果顯示即使是突張流, 也可使用本程式將分離誤差徹底清除。同時, ( $N_p=N-1$ ) 的選擇仍為宜, 收斂速度約為另一個選擇的 3 倍。尤其即使是 case3, 格點總數最多 ( $N=7$ ), 但( $N_p=N-1$ ) 的收斂速度比 case1 或 case2 較少格點數之 ( $N_p=N$ ) 還來得快。( $N_p=N-1$ ) 時, 疊代次數幾乎與  $N$  值無關。另外, 檢查分離誤差對流場的影響, 發現

表三: 突張流

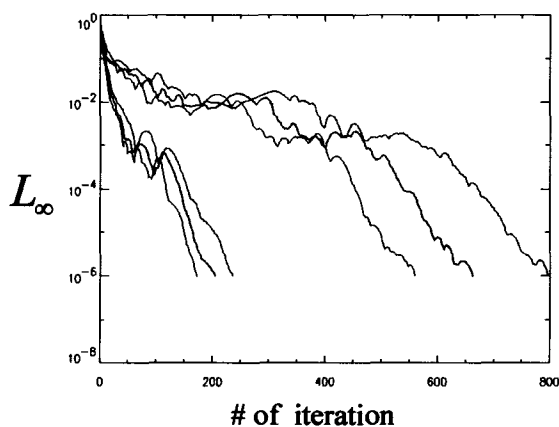
	N	$N_p$	CPU/ $L_\infty$
Case1	splitting		0.5167
	6	6	24m34.41s
	6	5	8m23.40s
Case2	splitting		0.3679
	5	5	14m50.91s
	5	4	4m37.96s
Case3	splitting		0.6640
	7	7	50m14.97s
	7	6	15m0.38s



圖五：入出口寬度比為 1:3



圖六：突張流流線圖。Y=0 為中心對稱軸。

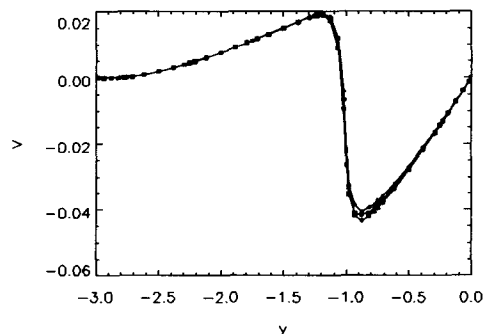
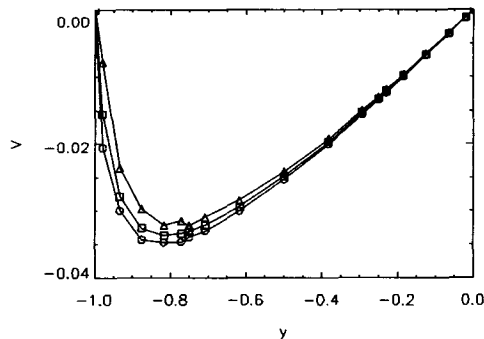


圖七：分離誤差收斂過程。黑：N=5；紅：N=6；藍：N=7。較快者為 Np=N-1。

X 方向速度場幾乎沒什麼差異，Y 方向則僅在靠近突張處有些微差異，以 splitting 與 Np=N-1 結果較相近，見圖八。以是，非線性項確可以具分離誤差之解計算之，但速度微分量，如渦度、減力等，應會受分離誤差污染。

#### 四、計畫成果自評

本研究確實成功以頻譜元素法離散穩態不可壓縮流場運動方程式，並可清理所有分離誤差，所得流場，完美滿足不可壓縮條件。格點測試也完成，考慮所需 CPU，建議採用 N 階 Gauss-Lobatto-Legendre 速度格點，搭配 N-1 階 Gauss-Legendre 壓力格點，收斂情況最好。成果與原計畫大略相符、預期目標有達成。研究成果具有學術價值、已準備發表於國內學術期刊上。



圖八：Y 方向速度分佈(case1)；上圖 X=0，下圖 X=0.042。O: splitting,  $\Delta$ : Np=N,  $\square$ : Np=N-1。

#### 五、參考文獻

- [1] A.K. Noor and J.T. Oden, State-of-the-Art Surveys on Computational Mechanics, The American Society of Mechanical Engineers (1994).
- [2] S.A. Orszag and L.C. Kells, Transition to turbulence in plane Poiseuille flow and plane Couette flow, J. Fluid Mech. 96 (1980), 159-206.
- [3] G. Em Karniadakis, Spectral element simulations of laminar and turbulent flows in complex geometries, App. Numer. Math. 6 (1989), 85-105.
- [4] K.Z. Korczak and A.T. Patera, An isoparametric spectral element method for solution of the Navier-Stokes equations in complex geometry, J. Comp. Phys. 62, 361.
- [5] S.A. Orszag, M. Israeli, and M.O. Deville, Boundary conditions for incompressible flows, J. Sci. Computing 1 (1986), 75.
- [6] 黃美嬌，國科會專題研究計畫成果報告，“無分離誤差之二維頻譜元素法流場解析”，NSC 87-2212-E-002-060-.
- [7] P.S. Marcus, Simulation of Taylor-Couette flow. Part 1. Numerical methods and comparison with experiment, J. Fluid Mech. (1984), 45-64.