

行政院國家科學委員會專題研究計畫成果報告

精簡微機電元件模型之建立與動態分析研究

Methodology of Compact Model Generation and Study of Dynamic Response for MEMS Devices

計畫編號：NSC 90-2218-E-002-031

執行期限：90年8月1日至91年7月31日

主持人：楊耀州 台大機械系

計畫參與人員：曾思遠 蔡宗勳 台大機械系

中文摘要：

本篇文章的主旨是將動態模型，藉由有限差分法(Finite Difference Method)計算出的解，建構出來有效率且精確度高的精簡模型，用此精簡模型分析動態系統，可用來分析動態方程式為非線性且耦合的系統。精簡模型所建構的方式是紀錄數次有限差分的結果(snapshot)，經由 Karhunen-Loeve Decomposition 求出精簡模型。此精簡模型可有效率且高精確的模擬出動態系統暫態反應。並以微機電元件壓力感測器(pressure sensor)作為驗證，精簡模型計算出的結果，平均誤差 $<1\%$ ，計算的速度(speedup factor)可達到 5 以上，可驗證降階模型具有高精確度與高效率。

關鍵詞： 模型降階演算法、微機電系統、Karhunen-Loeve Decomposition

Abstract:

In this work, we present a reduced order modeling technique for extracting compact macromodel from complex MEMS coupled systems. This methodology uses the snap-shots of finite-element/finite-difference simulation runs, and applies Karhunen-Loeve decomposition to extract reduced-order models. Comparison of computational efficiency as well as experimental verification are also provided.

一、 簡介

微機電系統(MEMS)通常整合數個不同的領域能量[1][2]，如：動能(kinetic energy)、彈性能量(elastic energy)、電能(electrostatic stored energy)以及磁能(magnetostatic stored energy)，在多個能量維度的問題中，需要用有限差分的方式求解聯立偏微分方程式，可是利用有限差分法求解偏微分方程式的暫態解，需

要大量的計算，尤其在系統中含有多個元件更是如此，如果不直接計算有限差分，而利用降階的精簡模型計算，可以快速且精確的求出系統的解，成爲一個很重要的課題。

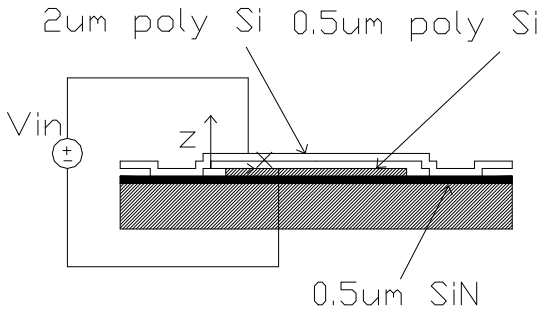
在文獻中，有利用線性化將原系統統馭方程式轉換爲線性方程式[3]，但因許多系統本身爲非線性，因此在線性化之後，不能得到理想的結果，也有文獻是將原系統作二次展開[4]，也因為會受到系統非線性程度的影響，所得到的解與真實的解比較，誤差也是相當大。

針對非線性系統無法單純用一線性系統取代之的問題，於是衍生出片段線性(piecewise linear)的方法[5][6]，此方法是在非線性的系統中，針對不同狀態分別作線性化的展開，再將線性化的系統作 Arnoldi algorithm[7]降階計算，此方法可以有效的模擬出系統真實的解，但是在建構出片段線性的系統時，需要先輸入一訓練輸入(training input)，再根據原系統所模擬的結果找出片段線性的模型，此方法所得出之精簡模型與原訓練輸入有很大的相關性，若改變環境的參數，則精簡模型的輸出會有很大的誤差。

另一用來分析非線性系統的方式爲 Karhunen-Loeve Decomposition [8][9][10]，此方法是利用有限差分或有限元素法模擬數次原系統，紀錄原系統的暫態解(snapshot)，再將此結果使用 Karhunen-Loeve Decomposition 求出基底函數(basis function)，再利用這些基底函數找出精簡模型，雖然在找出此精簡模型之前，需要先使用有限差分或有限元素法模擬原系統，但是只要經過一次這樣完整的模擬所建構出的精簡模型是可以有高精確度、高效率且具有很大的彈性的模型，此降階演算法是可以用來分析單一元件，或是分析一整個系統，都可以得到令人滿意的結果。

本篇論文是採用 Karhunen-Loeve

Decomposition 分析壓力感測器通電壓時產生的 pulling-in 現象(如圖一)，壓力感測器的動態方程式是整合桿的方程式(固力部分)與雷諾方程式(流體部分)，為一非線性且耦合的系統，分析的方式是先用有限差分法求解此聯立偏微分方程式，並紀錄完整有限差分法不同時間的高度與壓力(snapshot)，進而利用 Karhunen-Loeve Decomposition 求出基底函數(basis function)進而建構出精簡模型，將原本非線性且耦合的偏微分方程式，化簡為二個常微分方程式的精簡模型，且精簡模型狀態的數目遠少於原有限差分狀態的數目，此精簡模型與有限差分法模擬結果顯示，精簡模型有著高計算效率與高精確度的優點。



圖一 壓力感測器示意圖

二、 Karhunen-Loeve Decomposition

介紹 Karhunen-Loeve Decomposition 之前，先定義數個符號及函數， N 個任意的函數，我們稱之為 snapshots，符號為 $\{v_n\}$ ， $n=1,2,\dots,N$ ，要探討的重點是如何從這些 $\{v_n\}$ ，找出最具代表性的的函數 $w(x)$ ，幾個數學的符號如下：

$$v_n(x, y) :$$

a function defined in a function space(1)

$$\{v_n\} :$$

ensemble of snapshots (2)

$$(f, g) = \int_{\Omega} f(x)g(x)d\Omega :$$

inner product in the function space (3)

$$\langle v_n \rangle \equiv \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N v_n(x) :$$

ensemble average of snapshots (4)

$$\text{我們的目標為最大化 } \mathcal{J} = \frac{\langle (w, v_n)^2 \rangle}{(w, w)} \quad (5),$$

利用(3)內積的定義，可將(5)式改為如下的型式

$$\langle (w, v_n)^2 \rangle = \left\langle \int_{\Omega} w(x)v_n(x)dx \int_{\Omega} w(x')v_n(x')dx' \right\rangle$$

$$= \int_{\Omega} \left\langle \int_{\Omega} v_n(x)v_n(x')w(x)dx'w(x)dx \right\rangle \quad (6)$$

接著定義函數 $k(x, x')$ 如下：

$$k(x, x') = \langle v_n(x)v_n(x') \rangle = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N v_n(x)v_n^T(x')$$

(7)

以及線性運算子 R ：

$$R \bullet \equiv \int_{\Omega} k(x, x') \bullet dx' \quad (8)$$

因此可將(6)表示為

$$\langle (w, v_n)^2 \rangle = \int_{\Omega} \{RW\} \{w\} dx = (RW, w) \quad (9)$$

因此最大化的問題(5)，可以轉變為特徵值(eigenvalue)的問題：

$$RW = \mathcal{J}w \quad (10)$$

將最大化(5)的 \mathcal{J} ，變為求出(10)中最大的特徵值，利用 Schmidt-Hilbert technique，將 $w(x)$ 假設如下：

$$w(x) = \sum_k r_k v_k(x) \quad (11)$$

將(11)帶入(10)可得：

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N v_n(x)v_n^T(x') \sum_k r_k v_k(x') dx' \\ & = \mathcal{J} \sum_n r_n v_n(x) \end{aligned} \quad (12)$$

可將上式化簡為

$$C_{nk} r_k = \mathcal{J} r_n \quad (13)$$

$$C_{nk} \equiv \frac{1}{N} \int_{\Omega} v_n^T(x')v_k(x')dx' \quad (14)$$

C_{nk} 是對稱(symmetric)且正定(positive definite)的矩陣，由(13)特徵值問題所求出的特徵向量(eigenvector)，可代入(11)中找出 w_k ，特徵值依大小排列 $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_n$ ，分別對應了 w_1, w_2, \dots, w_N ， w_1 對應了最大的特徵值，也代表了 $\{v_n\}$ 中最主要的結構， w_2 對應第二大的特徵值，也代表了 $\{v_n\}$ 次主要的結構，依此類推，因此可以將非線性系統作幾次完整的計算，紀錄不同時間的結果(snapshot)，利用 Karhunen-Loeve Decomposition 轉換為較精簡的模型，以便我們可以快速且精確的計算出系統的解。

三、壓力感測器分析

壓力感測器(圖一)，是一微結構之彈性桿(elastic beam)，當施以一電壓，此彈性樑會因為靜電力的作用而吸附(pull in)，在分析吸附過程中，此桿的暫態反應非常敏感於樑下方的壓力[11][12]，此吸附的現象可用一維的樑

方程式與二維可壓縮絕熱雷諾方程式聯立分析[13]，

$$EI \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} - S \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = F_{elec} + F_{air} - \dots \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \quad (15)$$

$$\nabla \cdot ((1+6K)z^3 p \nabla p) = 12y \frac{\partial(pz)}{\partial t} \quad (16)$$

$$F_{elec} = -V_0 \tilde{S} V^2 / (2z^2) \text{ 此為靜電力，}$$

$F_{air} = \int_0^w (p - p_0) dy$ 此為桿下方與上方壓力差所產生的負載， $z(x,t)$ 為桿的高度， $p(x,y,t)$ 為桿下方的空氣壓力，Knudsen's number $K(x,t) = \lambda / z$ ，空氣的平均自由路徑(mean free path) $\lambda = 0.064 \sim m$ ，楊氏彈性模數 $E = 149 Gpa$ ，桿的轉動慣量 $I = wh^3 / 12$ ，桿之寬度 $w = 40 \sim m$ ，桿之長度 $l = 610 \sim m$ ，桿之厚度 $h = 2.2 \sim m$ ，桿之原始高度 $z_0 = 2.3 \sim m$ ，內應力 $S / hw = -3.7 Mpa$ ，密度為 $[\dots / hw] = 2330 kg / m^3$ ，空氣黏滯係數 $\nu = 1.82 \times 10^{-5}$ 。此桿是假設為兩端固定，壓力沿著桿的方向是開放的，在桿的兩個尾端是封閉的(沒有氣流)。

四、精簡模型的推導

首先我們假設偏微分方程式為以下的型式：

$$L(u) = f \quad (17)$$

L 為一微分運算子，且 L 允許為非線性的運算子， u 為此偏微分方程式的解，接著假設解是 $u(x,t)$ ，外力為 $f(x,t)$ ，根據 KL Decomposition 可得知解可以寫成以下的型式：

$$\hat{u}(x,t) = \sum_{i=1}^N r_i(t) a_i(x) \quad (18)$$

引入 Galerkin condition：

$$(a_i, L(\hat{u}) - f) = \int a_i^T (L(\hat{u}) - f) dx = 0 \quad (19)$$

對於所有的 $i \in \{1, 2, 3, \dots, N\}$ 。

接著寫出壓力感測器 pull-in 解的型式：

$$\hat{z}(x,t) = z_0 + \sum_{i=1}^M S_i(t) b_i(x) \quad (20)$$

$$\hat{p}(x,y,t) = p_0 + \sum_{i=1}^N r_i(t) a_i(x) \quad (21)$$

z_0 為桿未變形的電壓， p_0 為一大氣壓，利用 Galerkin condition 可將原偏微分方程式化為兩聯立的常微分方程式，

桿的偏微分方程式可推導為如下的常微分方程式：

$$M\ddot{S} + KS + f = 0 \quad (22)$$

$$M_{ij} = \int_L \dots b_i b_j dx$$

$$K_{ij} = \int_L (EI \frac{\partial^2 b_i}{\partial x^2} \frac{\partial^2 b_j}{\partial x^2} + S \frac{\partial b_i}{\partial x} \frac{\partial b_j}{\partial x}) dx$$

$$f_i = - \int_L b_i (F_{elec} + F_{air}) dx$$

L 是桿的長度。

雷諾方程式可以推導如下：

$$A\dot{r} + Br + C = 0 \quad (23)$$

$$A_{ij} = \int_{\Omega} 12y a_i a_j \hat{z} dx dy$$

$$B_{ij} = \int_{\Omega} \{ (1+6K) \hat{z}^3 \hat{p} \left(\frac{\partial a_i}{\partial x} \frac{\partial a_j}{\partial x} + \frac{\partial a_i}{\partial y} \frac{\partial a_j}{\partial y} \right) \right.$$

$$\left. + 12y a_i a_j \frac{\partial \hat{z}}{\partial x} \right\} dx dy$$

$$c_i = \int_{\Omega} 12y p_0 a_i \frac{\partial \hat{z}}{\partial x} dx dy$$

Ω 為桿的面積。

而 $a_i(x)$ 與 $b_j(x)$ (basis function) 所選擇的方式是利用有限差分法模擬原系統，分別模擬不同電壓 9v, 10v, 12v, 16v，以固定時間間隔紀錄桿的高度與壓力(snapshot)，再將這些 snapshots 作 SVD(singular value decomposition)[14]，

$$U = V \Sigma W^T \quad (24)$$

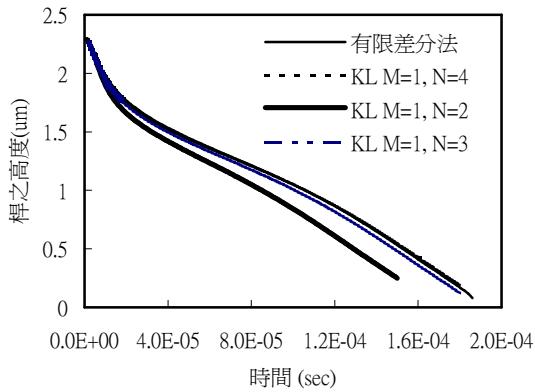
V 的行向量 $[v1, v2, v3, \dots]$ ，分別對應了基底函數，由最具代表性的基底、次代表性的基底，依此類推。

五、結果與討論

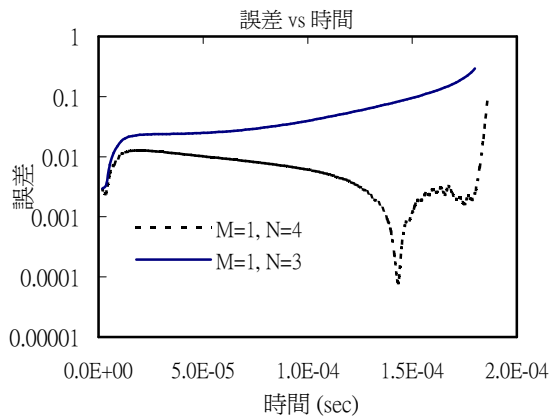
分析壓力感測器的方式是先將桿作網格化(mesh)，將桿面分為 41×20 個格點，再利用有限差分法，將(15)(16)對 x 與 y 偏微分的部分改為差分，對時間積分採用的是 Runge-Kutta 的方法來計算，桿的方程式是一維，壓力的方程式是二維，用有限差分法共需要解 ODE 數目為 $41 \times 2 + 820 = 902$ 個。

精簡模型模擬的結果與有限差分法模擬的結果比較，如圖二， M 代表高度的基底函數個數， N 代表壓力的基底函數個數，模擬的電壓為 10v，精簡模型相對於有限差分法的誤差，如圖三。

有限差分與KL Decomposition比較



圖二 桿的最低點對時間的變化圖，輸入為 10v。



圖三 誤差對時間的變化圖，電壓 10v

由圖二可知，當基底函數達到 $M=1$, $N=3$ ，精簡模型所繪出曲線與有限差分的曲線相當接近，由圖三可知，基底函數在 $M=1$, $N=4$ 時，平均誤差在 1% 以下。

	time elapsed (sec)	speedup factor
Full mesh	394	1
$M=1, N=4$	78	5.1
$M=1, N=3$	22	17.9
$M=1, N=2$	4	98.5

表一 精簡模型與有限差分模擬時間比較

如表一，可知精簡模型計算的時間較完整有限差分法的時間大幅減小，可驗證精簡模型為有效率，且高精確度的模型。

六、參考文獻

[1] Lynn D. Gabbay, Jan E. Mehner, and Stephen D. Senturia, "Computer-Aided Generation of Nonlinear

Reduced-Order Dynamic Macromodels-I," *Journal of MICROELECTROMECHANICAL SYSTEMS*, Vol. 9, NO. 2, June 2000

[2] Jan E. Mehner, Lynn D. Gabbay, and Stephen D. Senturia, "Computer-Aided Generation of Nonlinear Reduced-Order Dynamic Macromodels-II," *Journal of MICROELECTROMECHANICAL SYSTEMS*, Vol. 9, NO. 2, June 2000

[3] Jinghong Chen and Sung-Mo (Steve) Kang, "An Algorithm for Automatic Model-Order Reduction of Nonlinear MEMS Devices," *IEEE International Symposium on Circuit and Systems*, May 28-31

[4] Y. Chen, J. White, "A Quadratic Method for Nonlinear Model Order Reduction," in *proceedings of the International Conference on Modeling and Simulation of Microsystems*, pp. 477-480, 2000.

[5] M. Rewienski, J. White, "A Trajectory Piecewise-Linear Approach to Model Order Reduction and Fast Simulation of Nonlinear Circuit and Micromachined Devices," in *the proceedings of the International Conference on Computer-Aided Design*, pp.252-257, 2001.

[6] M. Rewienski, J. White, "Improving Trajectory Piecewise-Linear Approach to Nonlinear Model Order Reduction for Micromachined Devices Using an Aggregated Projection Basis," *Modeling and Simulation of Microsystems*, 2002.

[7] F. Wang, J. White, "Automatic model order reduction of a microdevice using the Arnoldi approach," pp. 527-530, ASME, 1998.

[8] H. M. Park, M. W. Lee, "An Efficient Method of Solving the Navier-Stokes Equations for Flow Control," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 41, 1133-1151, 1998.

[9] Elmer S. Hung, Stephen D. Senturia, "Generation Efficient Dynamical Models for Microelectromechanical Systems from a Few Finite-Element Simulation Runs," *Journal of Microelectromechanical Systems*, Vol. 8, No. 3, 1999.

[10] Jinghong Chen, Sung-Mo Kang, "Model-Order Reduction of Nonlinear MEMS Devices through Arclength-Based Karhunen-Loeve Decomposition," *Circuit and Systems*, 2001.

[11] C. -L. Chen, J. J. Yao, "Damping control of MEMS Devices Using structural design approach," *IEEE Solid-State Sensor and Actuator Workshop*, pp.72-75. 1992.

[12] Y. -J. Yang, M. -A. Gretillat, and S. D. Senturia, "Effect of air damping on the dynamics of nonuniform deformations of microstructures," in *Transducers*, pp. 1093-1096, '97.

[13] B. J. Hamrock, *Fundamentals of Fluid Film Lubrication*. New York: McGraw-Hill, 1994.

[14] Gene H. Golub, Charles F. Van Loan, *Matrix Computations*. Th