光彈等色線條紋細線化之數位影像處理方法

A DIGITAL IMAGE PROCESSING METHOD FOR ISOCHROMATIC FRINGE SHARPENING OF PHOTOELASTICITY

洪 光 民* 馬 劍 清** 曾 垂 拱†

Kuang-Ming Hung *Chien-Ching Ma* *Chwei-Goong Tseng*

*研究生 **教授 †副教授

*,**國立台灣大學機械工程學系

†國立台灣科技大學機械工程系

*Graduate student **Professor †Associate Professor

Department of Mechanical Engineering, National Taiwan University, Taipei, Taiwan 10617, R.O.C.

Department of Mechanical Engineering, National Taiwan University of Science and Technology, Taipei, Taiwan 10672, R.O.C.

Abstract

The isochromatic fringes obtained from photoelastic system are broad bands instead of thin lines. The uncertainties in the locations of fringe centerlines affect the accuracy of the experimental result. In this paper, a simple image processing method is presented for isochromatic fringe sharpening. This method produces highly sharpened isochromatic fringe contours with only one pixel width at quarter of odd fringe order locations. The result is a pattern of isochromatic fringe contour with twice as many as those in the light field or dark field and provides enhanced accuracy of experimental data for photoelastic analysis. A Compact optic system for digital photoelasticity using a He-Ne laser as light source is used to obtain the digital images of isochromatic of a circular disk subjected to diametral distributed compression. The quarter of odd order isochromatic fringes obtained by the proposed image processing method have good agreements with the theoretical ones over the full field.

Keywords: digital photoelasticity, isochromatics, dark-field, light-field, sharpening, pixel.

摘 要

一般而言光彈實驗中所獲得的等色線條紋大都有不等的寬度，而由於決定條紋中心線的不確定性，因而限制了實驗結果的正確性，本文中提出了一套簡潔的光彈等色線細線化的影像處理方法，這套方法可獲得一個畫素寬度的四分之奇數條紋序號等色線條紋圖，而這些條紋比一般的暗場或亮場的條紋數多一倍且能正確的顯示光彈實驗的結果，本文中亦應用一套以氦氖雷射光爲光源的緊密式數位光彈系統擷取圓盤受局部均佈壓力的等色線條紋，並由本文所提出的細線化方法對此圓盤試片之等色線條紋作處理後所得的四分之奇數序號條紋與理論計算的結果做全場的比對有十分一致之結果。

關鍵詞： 數位光彈、等色線、暗場、亮場、細線化、畫素。

1. 前 言

光彈實驗法 (Photoelasticity) 是一種發展相當完整之量測全域性應力場的光學實驗方法。從光彈實驗中我們可以獲得兩種干涉條紋，即等色線 (Isochromatics) 與等傾線 (Isoclinics)。等色線代表著最大與最小主應力間差值 (Difference in Principal Stresses) 的資訊，而等傾線則是相同主應力方向 (Orientation) 的連線。值得注意的是，若試件的狀態可用平面問題來處理而且兩個主應力互爲異號，則等色線又可以視爲各點最大剪應力的訊息。近年來數位光彈 (Digital Photoelasticity) 的研究與發展頗受重視，在實驗中是直接使用 CCD 攝影機擷取干涉條紋的數位影像，有別於傳統的底片曝光，使用 CCD 攝影機取像不但省去暗房冗長的底片處理時間，而且顯示在監視器 (Monitor) 中的取像過程幾乎是即時 (Real Time) 可見。除此之外，光彈影像數位化的處理方式有助於實驗結果的儲存以及後處理工作的進行，其主要目的即是將全場的實驗結果以量化的方式完整表現出來並可和理論計算的結果做全場且直接的比較。

Ramesh 和 Mangal [1] 在一篇回顧性的論文中詳細闡述了過去二十年來從數位光彈實驗法發展出的數位影像處理技巧的研究進展。他們在論文中直接指

出在數位光彈實驗過程中，數位影像的後處理工作是應該加強的，同時也說明數位光彈實驗法的數位影像處理技巧有雜訊消除 (Reducing Noise)、條紋倍增 (Multiplying Fringe)、和條紋細線化 (Identifying Skeleton Fringe) 等三個主要方向。而在雜訊消除方面的文獻有 Chen 和 Taylor [2] 提出 3 × 3 中值濾波 (Median Filter) 法，可以有效消除影像中離散點狀雜訊 (Discrete Impulse Noise)，而 5 × 5 鄰域平均 (Neighborhood Averaging) 法可以有效消除平滑化過程所產生的雜訊。條紋倍增方面的相關文獻有 Voloshin 和 Burger [3] 提出可以增加等色線到 512 條的半條紋光彈法 (Half-Fringe Photoelasticity)。Toh、Tang 和 Hovanesian [4] 則提出對暗場 (Dark Field) 等色線影像和亮場 (Light Field) 等色線影像做特定的相減算術可以得到四倍等色線條紋數。Chen [5] 從餘弦半角公式推演出的算術可以倍增等色線條紋到 2″ 或 3″ 倍。而條紋細線化方面的文獻有 Gillies [6] 以一種複雜的算術尋得條紋邊界，再從條紋邊界決定條紋中心線。Ramesh 等 [7,8] 則對已經臨界值化 (Threshold) 的影像做二值化，接著從二值化的影像描出條紋的邊界，最後找出條紋邊界之間具有灰度極值的點連接成爲條紋的中心線。

條紋細線化可以說是數位影像處理最後一個也是最重要的步驟，因爲它直接影響了實驗結果的呈現是否準確。Han [9] 以影疊紋 (Shadow Moiré) 實驗爲例證首先提出一種可同時倍增和細線化條紋的影像處理方法叫做光學暨數位條紋倍增法 (Optical/Digital Fringe Multiplication 簡稱爲 ODFM)。接著 Han 和 Wang [10] 將 ODFM 其中兩張相位差 π 的影像相減後取絕對值然後再做灰階截值 (Truncation) 的理論使用在數位光彈實驗法上面。之後，他們也成功地把上述方法應用在破壞力學的研究議題上 [11]。本文在下面章節中將先說明 ODFM 使用於數位光彈實驗法時發生的困難與問題，然後再提出不同方式的細線化處理方式，最後，本文以圓盤的邊界上受局部均佈壓力問題的解析解和本文所提出光彈影像細線化的結果做直接的比對，而誤差也將被討論。

2. 圓盤邊界沿直徑方向受局部均佈壓力的理論解析

圓盤沿直徑方向承受大小相同方向相反的兩集中力的問題是一個經典的力學問題且已有理論函數式的解析解，而這個問題也常被用來當作實驗量測的標準試片來驗證實驗方法的可行及正確性，然而集中力的施力方式僅存在於理論的分析，在一般實驗中僅能進行小範圍的分布壓力來模擬集中負荷。圓盤沿直徑方向受局部均佈壓力的問題如圖 1 所示，Hondros [12] 針對此一問題提出極座標全場應力級數解如下，

$$\sigma_\theta = -\frac{2p}{\pi}\left\{\alpha + \sum_{n=1}^{n=\infty}\left[1-\left(1-\frac{1}{n}\right)\rho^2\right]\rho^{2n-2}\sin 2n\alpha\cos 2n\theta\right\} \tag{1}$$

$$\sigma_\theta = -\frac{2p}{\pi}\left\{\alpha - \sum_{n=1}^{n=\infty}\left[1-\left(1+\frac{1}{n}\right)\rho^2\right]\rho^{2n-2}\sin 2n\alpha\cos 2n\theta\right\} \tag{2}$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{2p}{\pi}\left\{\sum_{n=1}^{n=\infty}[1-\rho^2]\rho^{2n-2}\sin 2n\alpha\sin 2n\theta\right\} \tag{3}$$

其中 p 是徑向壓力，2α 是徑向壓力範圍的夾角，R 是圓盤半徑，ρ 是 r/R。Hung 和 Ma [13] 則進一步獲得此問題的函數解析解如下，

$$\sigma_r(r,\theta) = -\frac{p}{\pi}\left\{\begin{array}{l}(1-\rho^2)\left[\dfrac{\sin 2(\alpha+\theta)}{\rho^4+1-2\rho^2\cos 2(\alpha+\theta)}+\dfrac{\sin 2(\alpha-\theta)}{\rho^4+1-2\rho^2\cos 2(\alpha-\theta)}\right]\\ +\tan^{-1}\left[\dfrac{1+\rho^2}{1-\rho^2}\tan(\alpha+\theta)\right]+\tan^{-1}\left[\dfrac{1+\rho^2}{1-\rho^2}\tan(\alpha-\theta)\right]+\Phi\end{array}\right\} \tag{4}$$

$$\sigma_\theta(r,\theta) = -\frac{p}{\pi}\left\{\begin{array}{l}-(1-\rho^2)\left[\dfrac{\sin 2(\alpha+\theta)}{\rho^4+1-2\rho^2\cos 2(\alpha+\theta)}+\dfrac{\sin 2(\alpha-\theta)}{\rho^4+1-2\rho^2\cos 2(\alpha-\theta)}\right]\\ +\tan^{-1}\left[\dfrac{1+\rho^2}{1-\rho^2}\tan(\alpha+\theta)\right]+\tan^{-1}\left[\dfrac{1+\rho^2}{1-\rho^2}\tan(\alpha-\theta)\right]+\Phi\end{array}\right\} \tag{5}$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{p}{\pi}\left\{(1-\rho^2)\left[\frac{-\rho^2+\cos 2(\alpha-\theta)}{\rho^4+1-2\rho^2\cos 2(\alpha-\theta)}-\frac{-\rho^2+\cos 2(\alpha+\theta)}{\rho^4+1-2\rho^2\cos 2(\alpha+\theta)}\right]\right\} \tag{6}$$

其中

$$\Phi=\begin{cases}0 & 0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}-\alpha\\ \pi & \dfrac{\pi}{2}-\alpha\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$$

而此問題的兩個主應力 σ_1 及 σ_2 亦可表示爲函數形式的全場分佈如下，

$$\sigma_1,\sigma_2=-\frac{p}{\pi}\left\{\tan^{-1}\left[\frac{1+\rho^2}{1-\rho^2}\tan(\alpha+\theta)\right]+\tan^{-1}\left[\frac{1+\rho^2}{1-\rho^2}\tan(\alpha-\theta)\right]+\Phi\right\}$$
$$\pm\frac{2p}{\pi}(1-\rho^2)\sin 2\alpha\frac{1}{\sqrt{\rho^4-2\rho^2\cos 2(\alpha+\theta)+1}\sqrt{\rho^4-2\rho^2\cos 2(\alpha-\theta)+1}} \tag{7}$$

此兩主應力之差的一半爲，

$$\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}=\frac{2p}{\pi}(1-\rho^2)\sin 2\alpha\frac{1}{\sqrt{\rho^4-2\rho^2\cos 2(\alpha+\theta)+1}\sqrt{\rho^4-2\rho^2\cos 2(\alpha-\theta)+1}} \tag{8}$$

式(8)式亦可視爲此模型光彈實驗的等色線函數。

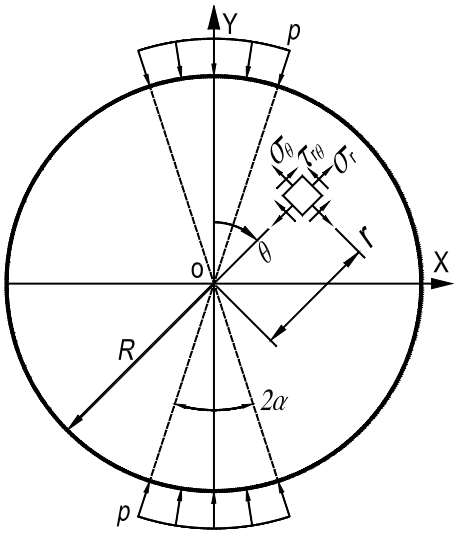

圖 1 圓盤沿其徑受局部均佈壓力

Fig. 1 A circular disk subjected to diametral distributed compression

3. 數位光彈實驗與條紋細線化

3.1 緊密型數位光彈儀

一般實驗用光彈系統大都相當佔空間，本文應用光學鏡片自組光彈系統，其特點爲所佔空間不大，在一般小型光學桌上即可完成架設，且所使用的光源爲雷射光源。圖 2 是本文所提出緊密型數位光彈儀的系統架設示意圖，氦氖雷射光源穿過起偏振光片 (Polarizer)、四分之一波片 (1/4 Wave Plate) 後經過空間濾波器 (Spatial Filter) 成擴散光。接著，拋物面鏡 (Parabolic Mirror) 把擴散光反射成的平面光通過試片後把影像投射在毛玻璃螢幕上。螢幕上的影像經過四分之一波片、檢偏振光片 (Analyzer) 後由 CCD 攝影機擷取，再經影像卡 (Frame Grabber) 最後由電腦螢幕顯示光場條紋。CCD 攝影機解析度爲 752 × 582 畫素 (Pixel)，型號品牌是 XC-75CE，SONY CO. JAPAN。影像卡型號品牌是 OCULUS F/64-DSP，CORECO CO. CANADA。得到的影像是 0 ~ 255 的灰階值 (Gray Levels) 影像。上述的自組數位光彈儀將用來觀察圓盤受局部均佈壓力的實驗結果，圓盤試片的材料是直徑 76mm，厚度 8mm，受壓的應力冷凍光彈片，α 約爲 4.5°。

3.2 ODFM 應用於數位光彈法之結果

依據 ODFM 的理論，首先擷取兩張相位差 π 的數位影像，做相減後取絕對值。在光彈實驗法中，暗場等色線和亮場等色線相位差恰爲 π。如圖 3(a) 所示是圓盤受局部均佈壓力的暗場等色線數位影像，圖 3(b) 是亮場等色線數位影像，而圖 3(c) 是暗場等色線減亮場等色線取絕對值後的數位影像。若編列等色線暗紋爲條紋序號 (Fringe Order) 時，在暗場圖中序號是 0、1、2、…，在亮場圖中則爲 0.5、1.5、2.5、…，暗場等色線減亮場等色線取絕對值的條紋序號 (四分之奇數條紋序號) 則是 0.25、0.75、1.25、…。暗場等色線減亮場等色線取絕對值的條紋數是暗場或亮場的兩倍，但是三者的條紋序號並不一樣。

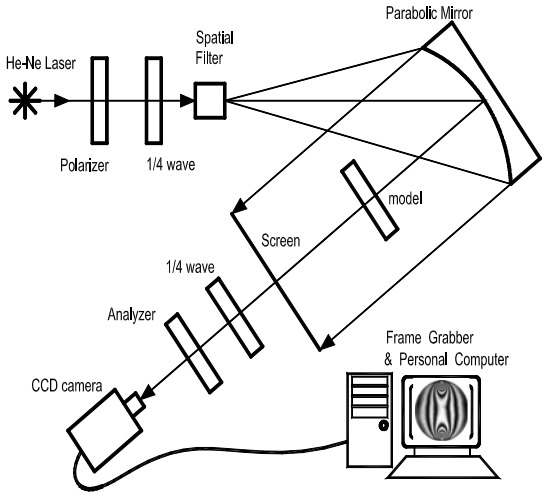

圖 2 自組式緊密型數位光彈系統

Fig. 2 A compact collimated-light digital photoelastic system

ODFM 接著提出對暗場等色線減亮場等色線取絕對值的數位影像做接近 0 的灰階截值然後二值化 (Binarlize) 可以得到四分之奇數序號條紋細線化的效果。圖 3(d) 爲圖 3(c) 作 40 灰階截值後二值化的影像，此時條紋已經離散化爲一群斑點而不是連續式的細線，灰階門檻值愈小於 40 時斷線的情形愈加嚴重，也就是說我們無法得到如 ODFM 所說的趨向 0 灰階截值後的高品質細線化影像。本文則提出下列的光彈條紋細線化方法並做實際的應用與實例分析，所有的影像處理算術都以商業軟體 Matlab 的 *.m 程式完成。

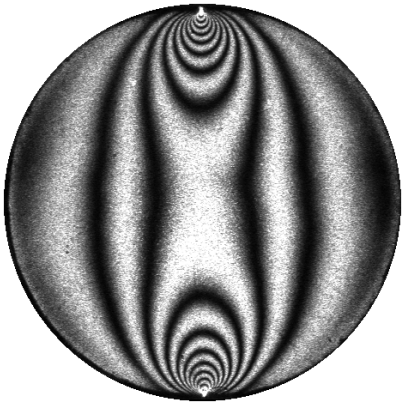

圖 3(a) 暗場等色線數位影像

Fig. 3(a) Digital image of dark field isochromatic fringe patterns

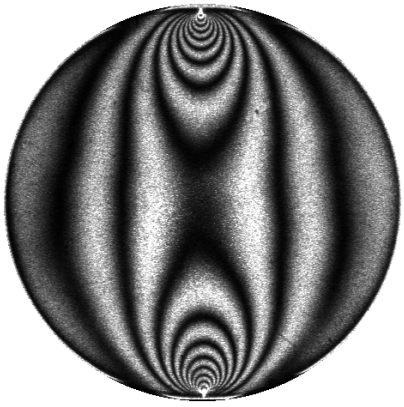

圖 3(b) 亮場等色線數位影像

Fig. 3(b) Digital image of light field isochromatic fringe patterns

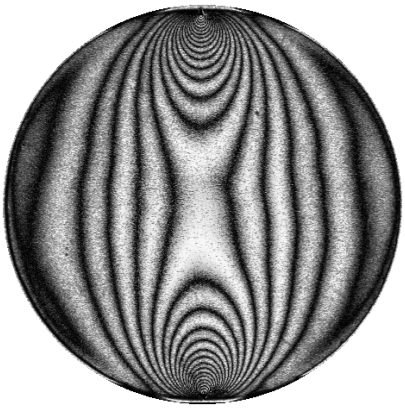

圖 3(c) 暗場等色線減亮場等色線取絕對值後的數位影像

Fig. 3(c) Digital image of absolute of dark field isochromatic subtracts to light field

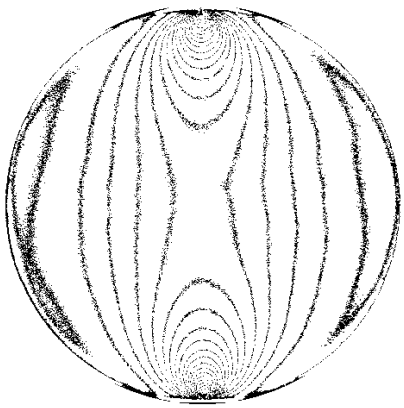

圖 3(d) 應用 ODFM 理論對圖 3(c) 做灰階 40 截值後再二值化的數位影像

Fig. 3(d) Binarilized digital image of applying ODFM theory by 40 gray-levels traction to Fig. 3(c)

3.3 條紋細線化的原理與方法

令暗場等色線影像灰階強度是 I_D，亮場等色線影像灰階強度是 I_L，則

$$I_D = I_a(x, y) + I_{\max} \sin^2[\pi N(x, y)] = I_a(x, y) + \frac{I_{\max}}{2}[1 - \cos 2\pi N(x, y)] \quad (9)$$

$$I_L = I_a(x, y) + I_{\max} \cos^2[\pi N(x, y)] = I_a(x, y) + \frac{I_{\max}}{2}[1 + \cos 2\pi N(x, y)] \quad (10)$$

其中 $I_{\max} > 0$，$I_a(x, y)$ 是背景雜訊。因 CCD 攝影機的取像能力關係，所以 $0 \le I_D \le 255$、$0 \le I_L \le 255$。

首先爲了消除背景雜訊我們實施 I_D 減 I_L 得 I_S，

$$I_S = I_D - I_L = -I_{\max} \cos 2\pi N(x, y) \quad (11)$$

此時 $-I_{\max} \le I_S \le I_{\max}$。接著我們把 I_S 加 $I_{\max}$ 得 I_R，

$$I_R(x, y) = I_{\max}[1 - \cos 2\pi N(x, y)] \quad (12)$$

此時 $0 \le I_R \le 2I_{\max}$。爲了使 I_R 介於 0 ~ 255 之間，我們調整 $I_{\max}$ 值成爲 255/2，即

$$I_R(x, y) = \frac{255}{2}[1 - \cos 2\pi N(x, y)] \quad (13)$$

式(13)告訴我們條紋序號 N = 0、1、2、…所對應的灰階值是 0，條紋序號 N = 0.5、1.5、2.5、…所對應的灰階值是 255，四分之奇數條紋序號 N = 0.25、0.75、1.25、…所對應的灰階值是 127。

接下來我們以 m = 127 爲基準，對 I_R 做二階化。算術如下

$$I_B = \begin{cases} 0 & I_R \le m \\ 255 & I_R > m \end{cases} \quad (14)$$

I_B 影像的條紋並不具特殊意義，但是其暗紋和亮紋的交界卻是相當於四分之奇數條紋序號曲線。

繼續我們對 I_B 實施 3 × 3 的中值濾波運算來消除離散斑點雜訊而得到 I_M。3 × 3 中值濾波並不會對條紋邊界造成很大的侵蝕 (Erode)，當認定 I_M 暗紋和亮紋的交界是四分之奇數條紋序號曲線時，在位置上僅有一到兩個畫素寬度上的誤差。

最後我們撰寫描邊 (Edge Detection) 程式直接對 I_M 描邊，這個邊界是一個畫素寬度的四分之奇數序號條紋，相當於把四分之奇數序號條紋細線化。

4. 結果與討論

4.1 與原始實驗結果比對

圖 4(a) 是圓盤受局部均佈壓力模型的暗場減亮場 I_R 影像，而圖 4(b) 是圖 4(a) 的 I_B 影像。我們可以觀察出圖 4(b) I_B 影像中暗紋和亮紋的交界仍有相當多的離散斑點雜訊，所以圖 4(c) 是對圖 4(b) 實施 3 × 3 中值濾波後的的 I_M 影像，幾乎沒有斑點雜訊。圖 4(d) 是對圖 4(c) 描邊所得到的一個畫素寬度的四分之奇數序號條紋圖，相當於把圖 3(c) 細線化，其品質相當優異。

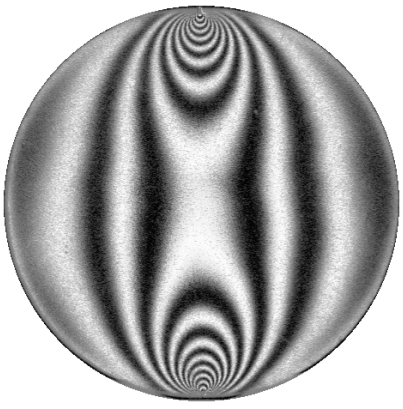

圖 4(a) 暗場等色線減亮場等色線後灰階重新調整的數位影像 I_R

Fig. 4(a) Digital image I_R of gray-levels rearrangement of dark field isochromatic subtracts to light field

圖 4(b) 以整個 I_R 的灰階平均值爲準，對 I_R 做二階化得 I_B

Fig. 4(b) Binarlizing I_R into I_B from the mean value of I_R's gray-levels

圖 4(c) 對 I_B 做 3 × 3 中值濾波後的數位影像

Fig. 4(c) The digital image of I_B after taking 3 × 3 median filter

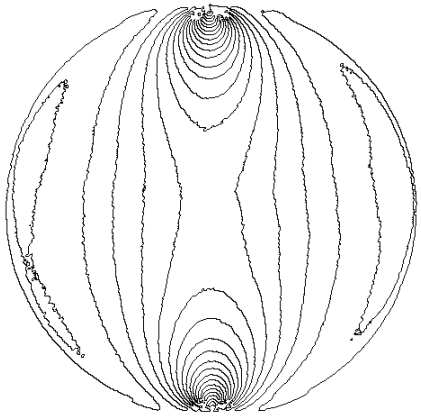

圖 4(d) 描邊得一個畫素寬度的四分之奇數序號條紋

Fig. 4(d) The quarter odd order of isochromatic fringes with one pixel width

圖 5(a) 是直接把暗場等色線減亮場等色線取絕對值後所得的四分之奇數條紋序號的原始條紋影像，和本文所提出方法所得到的四分之奇數序號條紋細線化影像兩者做疊合比對，可清楚看出細線化的結果與原始條紋幾乎相同。圖 5(b) 則是依 ODFM 理論只到 40 灰階截值再二值化後的四分之奇數序號條紋影像，和本文方法所得到的四分之奇數序號條紋兩者做疊合比對。亦可看出本文方法所得到的四分之奇數序號條紋和 ODFM 方法所得幾乎是一致的，但是顯然以本文所使用方法所得四分之奇數序號條紋的細線化影像品質最佳且可做爲實驗結果數據的取樣。

圖 5(c) 的左半部是從式(8)所模擬理論的四分之奇數序號條紋影像，右半部是本文細線化方法所得到的一個畫素寬度四分之奇數序號條紋影像。觀察兩者之間條紋連接的吻合度和左右的對稱性，可以看出由實驗所得的等色線條紋經細線化方法所得影像和理論幾乎是一致的，所以本文所提出細線化的方法其結果是可和理論結果作全場的直接比較。

如圖 5(d) 所示，方塊符號是條紋序號的取樣點，共三條水平線，由下而上每條水平線分別有 19、19、23 個取樣點。我們把取樣點的座標代入式(8)則可得到取樣點的條紋序號理論值。圖 5(e) 是對通過圓心水平線上所有取樣點的實驗值和理論值的比對。圖 5(f) 是對通過距離圓心 1/4 半徑高度水平線上所有取樣點的實驗值和理論值的比對。圖 5(g) 是對通過距離圓心 1/2 半徑高度水平線上所有取樣點的實驗值和理論值的比對。可以觀察出實驗值和理論值幾乎是一致的。

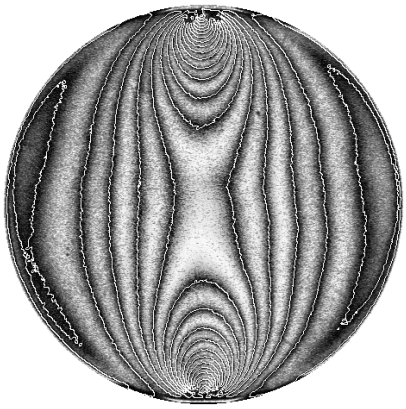

圖 5(a) 圖 3(c) 和圖 4(d) 的疊合

Fig. 5(a) The superposition of Fig. 3(c) and Fig. 4(d)

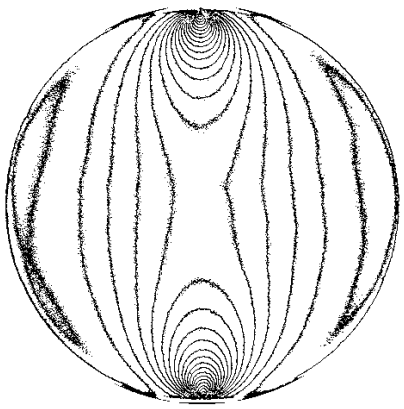

圖 5(b) 圖 3(d) 和圖 4(d) 的疊合

Fig. 5(b) The superposition of Fig. 3(d) and Fig. 4(d)

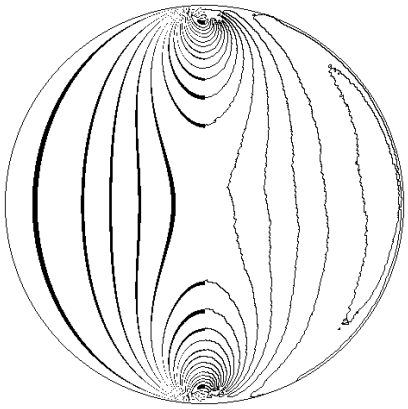

圖 5(c) 理論模擬影像（左）和實驗細線化影像（右）

Fig 5(c) Simulation image (left side) and experiment image (right side)

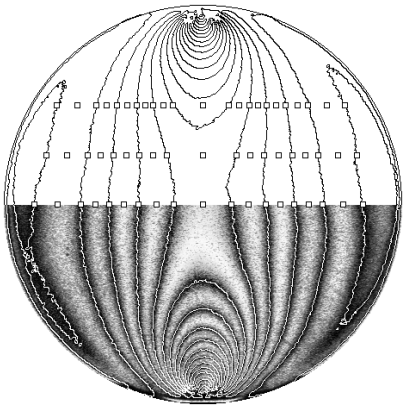

圖 5(d) 條紋序號取樣點

Fig. 5(d) Sampling points of fringe order

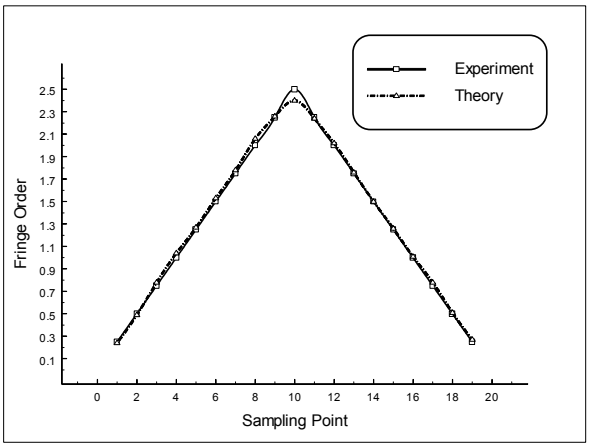

圖 5(e) 通過圓心水平線上所有取樣點的條紋序號實驗值和理論值

Fig. 5(e) Two kinds of the experiment and theory fringe orders of sampling points along the horizontal line, which is passing, centered

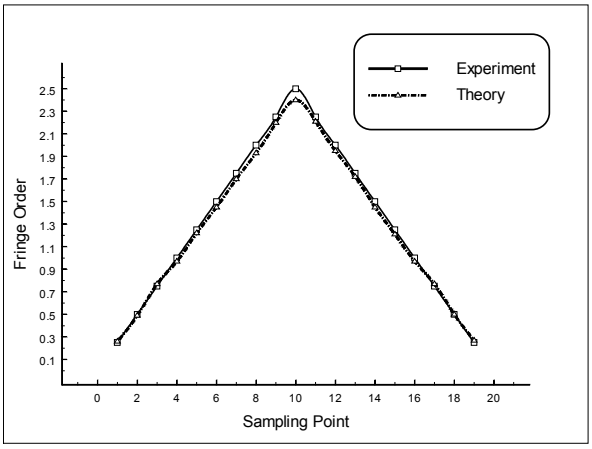

圖 5(f) 通過距離圓心 1/4 半徑水平線上所有取樣點的條紋序號實驗值和理論值

Fig. 5(f) Two kinds of the experiment and theory fringe orders of sampling points along the horizontal line, which is away from centered 1/4 radius

4.2 模擬比對

我們接著以模擬方式討論若等色線條紋粗細相差很大時，本文提出的新方法是否仍然可靠。如圖 6 所示，一個局部橢圓垂直分布力實施在半無窮平面上。局部橢圓垂直分布力的最大值 p_0 位於座標原點上，Smith、Liu [14] 提出應力場的分布解析爲

$$\sigma_{xn} = -\frac{p_0}{\pi} z \left[\frac{a^2 + 2x^2 + 2z^2}{a} \overline{\Psi} - \frac{2\pi}{a} - 3x\psi \right]$$

$$\sigma_{zn} = -\frac{p_0}{\pi} z \left[a\overline{\Psi} - \frac{2\pi}{a} - x\psi \right]$$

$$\tau_{xzn} = -\frac{p_0}{\pi} z^2 \psi \qquad (15)$$

其中

$$\psi = \frac{\pi}{K_1} \frac{1 - \sqrt{\frac{K_2}{K_1}}}{\sqrt{\frac{K_2}{K_1}} \sqrt{2\sqrt{\frac{K_2}{K_1}} + \left(\frac{K_1 + K_2 - 4a^2}{K_1} \right)}}$$

$$\overline{\Psi} = \frac{\pi}{K_1} \frac{1 + \sqrt{\frac{K_2}{K_1}}}{\sqrt{\frac{K_2}{K_1}} \sqrt{2\sqrt{\frac{K_2}{K_1}} + \left(\frac{K_1 + K_2 - 4a^2}{K_1} \right)}}$$

$$K_1 = (a + x)^2 + z^2$$

$$K_1 = (a - x)^2 + z^2$$

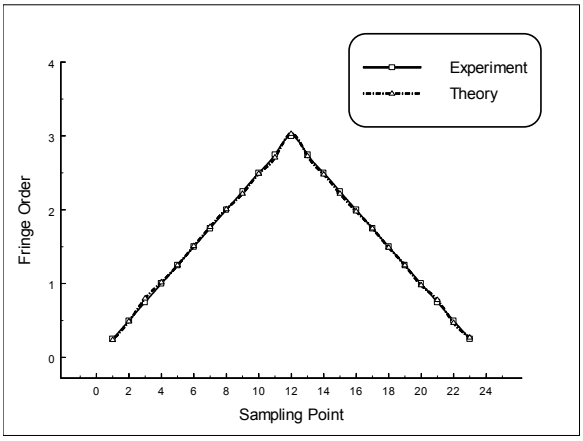

圖 5(g) 通過距離圓心 1/2 半徑水平線上所有取樣點的條紋序號實驗值和理論值

Fig. 5(g) Two kinds of the experiment and theory fringe orders of sampling points along the horizontal line, which is away from centered 1/2 radius

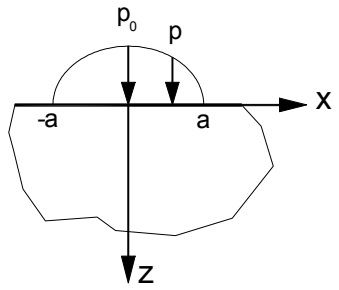

圖 6 半無窮平面的邊界上受局部橢圓垂直分布力

Fig. 6 Partial elliptic distributed loading subject to the boundary of a half plane vertically

圖 7(a) 暗場等色線模擬影像

Fig. 7(a) The simulated isochromatic image of dark field

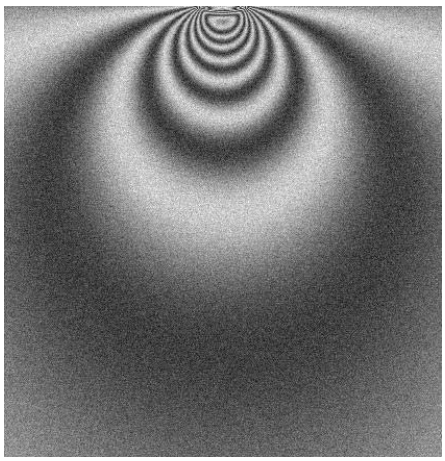

圖 7(b) 亮場等色線模擬影像

Fig. 7(b) The simulated isochromatic image of light field

圖 7(a) 是模擬上述應力場下所得光彈實驗的暗場等色線影像，暗紋條紋級數屬於 0、1、2、3…，爲了更趨近於實驗情況我們以亂數方式模擬斑點的產生。圖 7(b) 是模擬亮場等色線的影像，暗紋條紋級數屬於 0.5、1.5、2.5、3.5…。圖 7(c) 是模擬暗場減亮場取絕對值後的等色線影像，暗紋條紋級數屬於 0.25、0.75、1.25 …。圖 7(d) 是使用 ODFM 理論對圖 7(c) 作到 8 的灰階截值所得的條紋影像，我們可以觀察出當細條紋已經離散化時，粗條紋還有相當的寬度。圖 7(e) 是對圖 7(c) 使用本文新方法所得一畫數寬度的條紋影像，我們也可以觀察出粗條紋所得的一畫數寬度條紋有較大和較多的擾動。圖 7(f) 是圖 7(c) 和圖 7(d) 的疊合，圖 7(g) 是圖 7(c) 和圖 7(e) 的疊合，圖 7(h) 是用三種方法得到條紋級數屬於 0.25、0.75、1.25…的疊合，我們可以觀察出本文新方法和 ODFM 理論在細條紋方面有很好的一致性，但是在粗條紋方面則有出入，但是兩者還是位於絕對值影像的範圍內。

我們繼續模擬不對稱影像的情況。如圖 8 所示，一個局部橢圓水平分布力實施在半無窮平面上。局部橢圓水平分布力的最大值 q_0 位於座標原點上，Smith、Liu [14] 提出應力場的分布解析爲

$$\sigma_{xt}=$$
$$-\frac{q_0}{\pi}\left[(2x^2-2a^2-3z^2)\psi+2\pi\frac{x}{a}+2(a^2-x^2-z^2)\frac{x}{a}\overline{\Psi}\right]$$

$$\sigma_{zt}=-\frac{q_0}{\pi}z^2\psi$$

$$\sigma_{xt}=-\frac{q_0}{\pi}\left[(2x^2+a^2+2z^2)\frac{z}{a}\overline{\Psi}-2\pi\frac{z}{a}-3xz\psi\right] \quad (16)$$

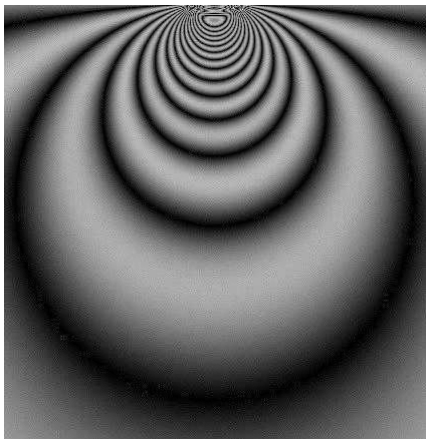

圖 7(c) 暗場減亮場取絕對值後的等色線模擬影像

Fig. 7(c) The simulated isochromatic image of dark field subtracts light field

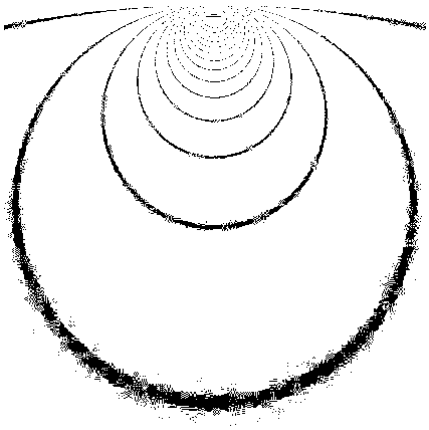

圖 7(d) 使用 ODFM 截值到 8 灰階的等色線模擬影像

Fig. 7(d) The ODFM simulated isochromatic image after truncation by 8 gray-levels

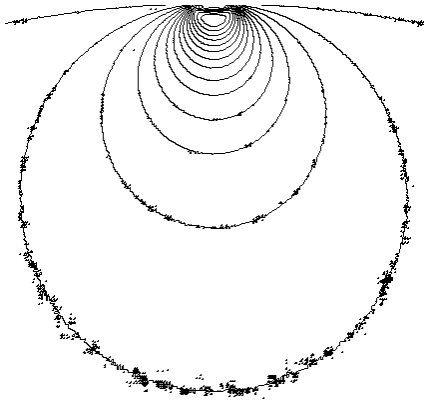

圖 7(e) 使用本文新方法的等色線模擬影像

Fig. 7(e) Simulated isochromatic image from new method of this paper

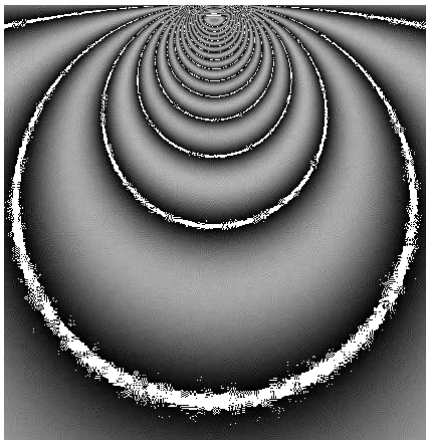

圖 7(f) 圖 7(c) 和圖 7(d) 的疊合比對

Fig. 7(f) The superposition image of Fig. 7(c) and 7(d)

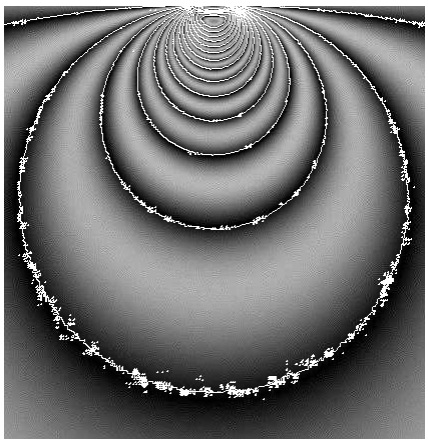

圖 7(g) 圖 7(c) 和圖 7(e) 的疊合比對

Fig. 7(g) The superposition image of Fig. 7(c) and 7(e)

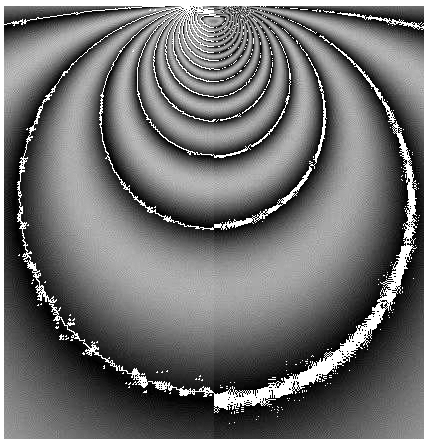

圖 7(h) 三種方法的疊合比對

Fig. 7(h) The superposition image of three image processing methods

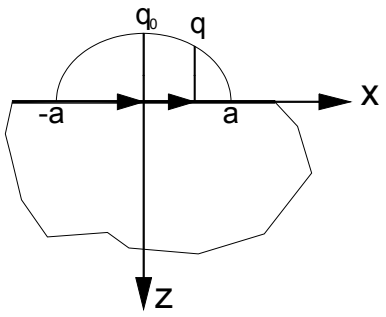

圖 8 半無窮平面的邊界上受局部橢圓水平分布力

Fig. 8 Partial elliptic distributed loading subject to the boundary of a half plane horizontally

我們將觀察一個局部橢圓垂直分布力和一個局部橢圓水平分布力同時實施在半無窮平面上的情況。圖 9(a) 是模擬上述應力場下所得光彈實驗的暗場等色線影像，圖 9(b) 是模擬亮場等色線的影像，圖 9(c) 是模擬暗場減亮場取絕對值後的等色線影像。圖 9(d) 是使用 ODFM 理論對圖 9(c) 作到 8 的灰階截值所得的條紋影像，圖 9(e) 是對圖 9(c) 使用本文新方法所得一畫數寬度的條紋影像，圖 9(f) 是圖 9(c) 和圖 9(d) 的疊合，圖 9(g) 是圖 9(c) 和圖 9(e) 的疊合，圖 9(h) 是用三種方法得到條紋級數屬於 0.25、0.75、1.25…的疊合。我們觀察出對稱或不對稱的影像情況是相近的，本文方法和 ODFM 理論在細條紋方面同樣有很好的一致性，在粗條紋方面兩者都有出入，但是仍然位於絕對值影像的範圍內，不過這時候資料取樣的誤差值得關切。

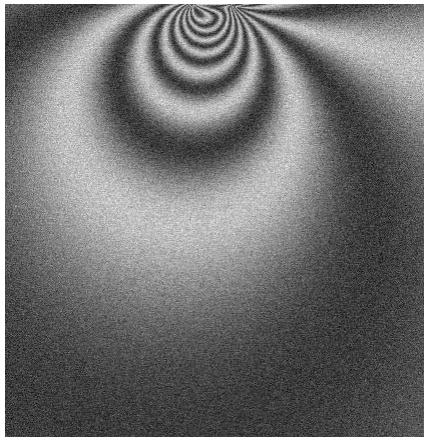

圖 9(a) 暗場的等色線模擬影像

Fig. 9(a) The simulated isochromatic image of dark field

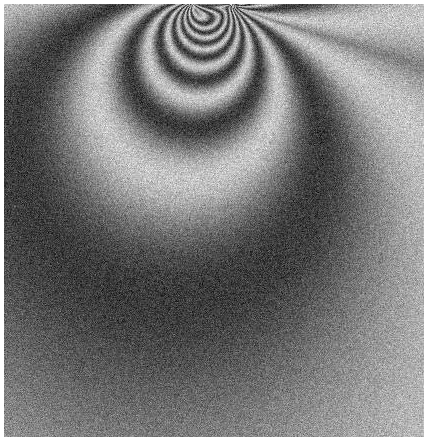

圖 9(b) 亮場的等色線模擬影像

Fig. 9(b) The simulated isochromatic image of light field

圖 9(c) 暗場減亮場取絕對值後的等色線模擬影像

Fig. 9(c) The simulated isochromatic image of dark field subtracts light field

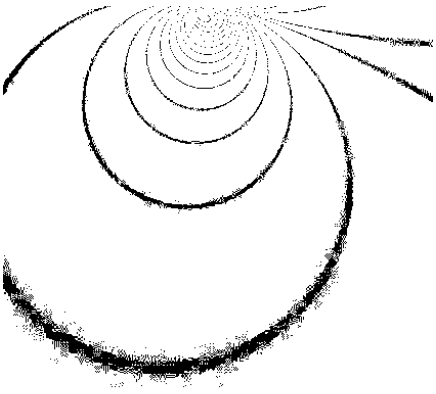

圖 9(d) 使用 ODFM 截值到 8 灰階的等色線模擬影像

Fig. 9(d) The ODFM simulated isochromatic image after truncation by 8 gray-levels

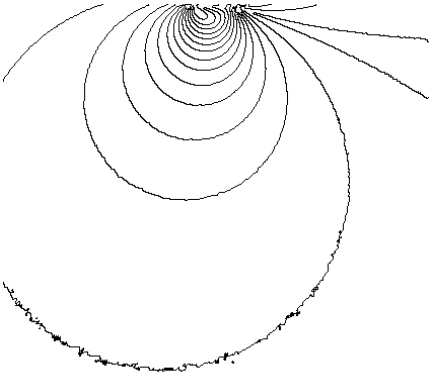

圖 9(e) 使用本文新方法的等色線模擬影像
Fig. 9(e) Simulated isochromatic image from new method of this paper

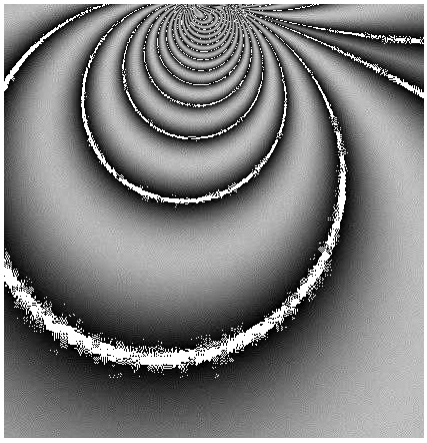

圖 9(f) 圖 9(c) 和圖 9(d) 的疊合比對
Fig. 9(f) The superposition image of Fig. 9(c) and 9(d)

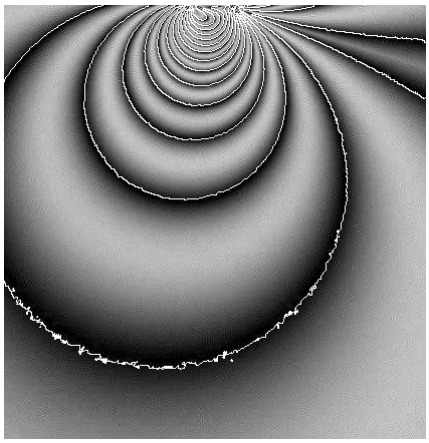

圖 9(g) 圖 9(c) 和圖 9(e) 的疊合比對
Fig. 9(g) The superposition image of Fig. 9(c) and 9(e)

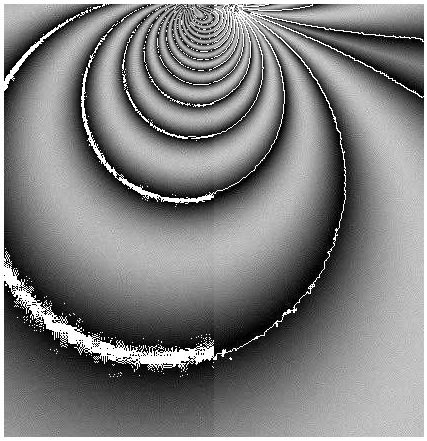

圖 9(h) 三種方法的疊合比對
Fig. 9(h) The superposition image of three image processing methods

4.3 誤差討論

一般而言，1/4 波片可能是誤差的來源之一，問題包括光源波長夠準但是波片有瑕疵沒有真正對該波長延遲 π/4 的相位，或者波片品質夠純但是光源波長沒有真正配合波片。假設上述問題產生的相位誤差是 πε/2，則光彈系統中正 1/4 波片的高斯矩陣將表示成

$$Q'_{+45}=\begin{bmatrix}\dfrac{ie^{i\varepsilon}+1}{2} & \dfrac{ie^{i\varepsilon}-1}{2}\\ \dfrac{ie^{i\varepsilon}-1}{2} & \dfrac{ie^{i\varepsilon}+1}{2}\end{bmatrix} \tag{17}$$

負 1/4 波片的高斯矩陣將表示成

$$Q'_{-45}=\begin{bmatrix}\dfrac{ie^{i\varepsilon}+1}{2} & \dfrac{-ie^{i\varepsilon}+1}{2}\\ \dfrac{-ie^{i\varepsilon}+1}{2} & \dfrac{ie^{i\varepsilon}+1}{2}\end{bmatrix} \tag{18}$$

此時具 1/4 波片暗場佈局的光強將從式(9)變爲

$$I_D=I_a(x,y)+I_{\max}\sin^2[\pi N(x,y)]\,(1-\cos^2 2\beta\sin^2\varepsilon) \tag{19}$$

具 1/4 波片亮場佈局的光強將從式(10)變爲

$$I_L=I_a(x,y)+I_{\max}\cos^2[\pi N(x,y)]\,(1+\tan^2[\pi N(x,y)]\cos^2 2\beta\sin^2\varepsilon) \tag{20}$$

其中 $\cos^2 2\beta$是等傾線的資料。式(19)、(20)兩者顯示當誤差 ε 大到不可忽略時，等傾線資料將不可忽略而和等色線有偶合現象。由於 $\tan^2[\pi N(x, y)]$ 有可能大於 1，所以，亮場影像失真程度又比暗場嚴重，我們於是也可推論一般的暗場影像比亮場可靠。本文的理論推導假設 $\varepsilon \to 0$。

干涉條紋的數位影像實際上是一個元素值介於 0 ~ 255 的矩陣。這個矩陣是從 CCD 攝影機的光細胞 (Photo Cell) 陣列感光後離散取樣轉成電子信號再傳給影像卡做後處理產生的。假設取像是完美的時候，干涉條紋中最暗位置的灰階會被定爲 0，最亮位置的灰階會被定爲 255。以暗場等色線爲例，若把干涉條紋影像中灰階爲 0 的位置點連線會得到序號 0、1、2、3、…的一個畫素寬度條紋，灰階爲 255 的位置點連線會得到序號是 0.5、1.5、2.5、…的一個畫素寬度條紋，灰階爲 127 的位置點連線會得到序號四分之奇數的一個畫素寬度條紋。因爲光細胞的敏感度有限，所以光彈干涉條紋影像經常是一群從灰階 0 到 255 都有寬度的條紋，再加上電子雜訊和外界環境所產生的離散斑點都會影響實驗的結果。要克服離散斑點，使用 3×3 中值濾波就可以有效消除，但對這些具有寬度的條紋作細線化則是不容易，所以有相當多的文獻都在這方面作探討以期解決上述之困難。

Han [9] 提出了一個比較及討論，在尋找序號四分之奇數條紋中心線時，誤差僅有一個灰階值所產生的相位誤差 (相位誤差相當於條紋序號誤差) 是尋找序號是 0、1、2、3、…條紋中心線或者序號是 0.5、1.5、2.5、…條紋中心線的 1/32。若是光細胞處於不正常的曝光而產生溢流 (Overflow) 時，則誤差倍數將會更低。從降低誤差的觀點來看，尋找序號四分之奇數條紋反而比尋找其他兩者更爲有利。

再者，本方法因爲需要有完整條紋數的暗場與亮場影像，所以理論上本方法只能實施在至少能產生一條完整條紋的暗場與亮場影像上。

5. 結 論

本文從使用 ODFM 尋找四分之奇數序號的細線化條紋時所發生的困難中引發出一種新的影像處理方法，這種新的影像處理方法可以得到一個畫素寬度的四分之奇數序號等色線。本文以圓盤受局部均佈壓力問題爲光彈實驗對象，實驗的等色線影像經由新的影像處理方法細線化後作條紋序號的取樣。取樣和理論兩者經過比對後證實本文提出的方法用來尋找一個畫素寬度的等色線是可靠的。

參考文獻

[1] K. Ramesh and S. K. Mangal, “Data acquisition techniques in digital photoelasticity: a review,” *Optics and Lasers in Engineering*, Vol. 30, 1998, pp. 53–75.

[2] T. Y. Chen and C. E. Taylor, “Computerized fringe analysis in photomechanics,” *Experimental Mechanics*, Vol. 29, No. 3, 1989, pp. 323–329.

[3] A. S. Voloshin and C. P. Burger, “Half-fringe photoelasticity: a new approach to whole-field stress analysis,” *Experimental Mechanics*, Vol. 23, No. 9, 1983, pp. 304–314.

[4] S. Toh, L. S. Tang and J. D. Hovanesian, “Computerized photoelastic fringe multiplication,” *Experimental Techniques*, Vol. 14, No. 4, 1990, pp. 21–23.

[5] T. Y. Chen, “Digital fringe multiplication of photoelastic images — a new approach,” *Experimental Techniques*, Vol. 18, No. 2, 1994, pp. 15–18.

[6] A. C. Gillies, “Image processing approach to fringe patterns,” *Optical Engineering*, Vol. 27, No. 10, 1988, pp. 861–866.

[7] K. Ramesh, V. R. Ganesan and S. K. Mullick, “Digital image processing of photoelastic fringes－a new approach,” *Experimental Techniques*, Vol. 5, No. 5, 1991, pp. 41–46.

[8] K. Ramesh and B. R. Pramod, “Digital image processing of fringe patterns in photomechanics,” *Optical Engineering*, Vol. 31, No. 7, 1992, pp. 1487–1498.

[9] B. Han, “Interferometric methods with enhanced sensitivity by optical/digital fringe multiplication,” *Applied Optics*, Vol. 32, No. 25, 1993, pp. 4713–4718.

[10] B. Han and L. Wang, “Isochromatic fringe sharpening and multiplication,” *Experimental Techniques*, Vol. 18, No. 6, 1994, pp. 11–13.

[11] B. Han and L. Wang, “Isochromatic fringe sharpening and interploation along an isoclinic contour, with application to fracture mechanics,” *Experimental Mechanics*, Vol. 36, No. 4, 1996, pp. 305–311.

[12] G. Hondros, “The evaluation of Poisson’s ratio and the modulus of materials of a low tensile resistance by the Brazilian (indirect tensile) test with particular reference to concrete,” *Australia Journal of Applied Science*, Vol. 10, 1959, pp. 243–268.

[13] K. M. Hung and C. C. Ma, “Theoretical analysis and digital photoelastic measurement of circular

disks subjected to partially distributed compressions," submitted to *Experimental Mechanics*, (2001).
[14] J. O. Smith and C. K. Liu, "Stress due to tangential and normal loads on an elastic solid with application to some contact stress problems," *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 10, 1953, pp. 157–166.

馬 劍 清 (Chien-Ching Ma) 民國 45 年 9 月 1 日出生於台北縣瑞芳鎮金瓜石，民國 67 年畢業於台灣大學農業工程學系，民國 69 年赴美進修，分別於民國 71、72 年與 73 年獲得美國布朗大學 (Brown University) 機械工程碩士、應用數學碩士及機械工程博士學位。民國 73 年至 74 年在布朗大學作博士後研究一年，之後於民國 74 年 8 月返國服務，任職於台灣大學機械工程系副教授，民國 78 年升任機械系教授迄今。目前研教興趣包括動力破壞、應力波傳、異向性力學、光學量測以及反算問題。

曾 垂 拱 (Chwei-Goong Tseng) 民國 43 年生，台灣大學機械系學士，美國愛荷華州立大學工程力學博士，現任教於國立台灣科技大學機械系。

洪 光 民 (Kuang-Ming Hung) 民國 46 年 10 月 12 日出生於高雄市。民國 77 年畢業於台灣科技大學機械工程研究所後服務於華夏工商專校機械工程科迄今。研究興趣有光測力學，電腦繪圖，與創新玩具機構。

收稿日期 91 年 6 月 6 日、修訂日期 91 年 6 月 24 日、接受日期 91 年 6 月 24 日
Manuscript received June 6, 2002, revised June 24, 2002, accepted June 24, 2002