

彈性單層板承受反平面週期動力載荷之暫態分析

馬劍清*

陳熙洪**

中華民國 台北市
國立台灣大學
機械工程學系

摘 要

本篇論文主要探討彈性單層板承受反平面週期性動力載荷時的暫態波傳反應，並詳細研究其自暫態反應趨近於穩態反應之過程及特性。文中首先以數學解析配合映射的觀念得到單層板問題的暫態及穩態的理論解析正解，並以解析解為基礎的數值計算技巧精準地獲得長時間的暫態反應，此數值計算的方法對於低頻及高頻的計算精度亦能完全掌握，本文詳細探討了各不同範圍頻率的動力載荷作用下暫態反應趨向穩態解的特性及所需時間，除此之外，由於數值計算的精度控制使本文有能力探討在系統的共振頻率附近，甚至在共振頻率時其暫態的正確反應及特性。

關鍵詞：單層板、反平面載荷、暫態反應、穩態。

一、前 言

以往應力波傳的研究著重於基礎的學術探討，但隨著時代的進步以及數值計算能力的提高，目前應力波傳的研究成果在多方面都有實際的應用，例如可輔助地層內部的結構分析以及石油的探勘，以超音波為基礎的各種非破壞檢測，地震波傳的動力分析（地表位移、速度和加速度），複合材料內部的破壞評估，以及聲波或電磁波各種應用。

Lamb 為研究雷利波 [1] 而求解半無窮域表面上受一點或線簡諧載荷其域內的應力波傳解析，其論文中亦提及受衝擊載荷時的暫態解，原則上可透過整個頻譜上穩態波疊加而得。Lamb 開啓了半無窮域受載荷相關的研究先河並對此問題有相當重大的貢獻，因此，半無窮域受動力載荷問題亦被稱作 Lamb 問題。在 1939 年，Cagniard [2] 發展了一套分析暫態彈性波在兩完美接合半無窮域中傳遞的解析方法，Cagniard 將 Laplace

轉換域中的解，透過積分路徑變換的方法得到形式上與正向 Laplace 轉換公式一樣的積分，而可直接得到在時域中的解。de Hoop [3] 將 Cagniard 的方法做了進一步的化簡使其在解析上更為簡潔。Ma 和 Huang [4] 利用 Cagniard 的方法解析了暫態彈性波在兩完美接合半無窮域的二維平面問題，並利用長時間的波動解作逼近分析並求得相關問題的靜力解。Cagniard 所提出的逆轉換方法實為分析彈性體內暫態應力波傳播的重大突破，並使得暫態的波傳解析變成可行。

以兩個平行面為邊界的平板問題的動力解析，如 Lamb [5] 所提議，常常藉由傅利葉合成法 (Fourier synthesis) 將其所有的模態 (normal mode) 一一加總，而得其暫態反應。Miklowitz [6] 利用將傅利葉合成法所求得之積分，利用殘值定理 (residual theorem) 及臨靜相法 (stationary phase)，求得板受對稱加載時的動態響應。Santosa 和 Pao [7] 利用相同的理論與快速傅利葉轉換 (FFT) 分別解析了板中受軸對稱與非軸對稱點力作用下的三維暫態響應。然此種傅立葉合成法常牽涉到由傅立葉

*教授 **研究生



積分中留數 (residues) 所構成的無窮級數。此時解的精確度受到所取項數多寡的影響。且由於數值計算時對級數的截斷 (truncation), 會喪失訊號的因果性, 因而對於初期的暫態分析此理論較不適用。

為分析層狀地球模型中的波傳現象, Thomson [8] 與 Haskell [9] 提出一種轉移矩陣的方法來研究多層介質的頻散方程 (dispersion equation)。另一方面, 基於傳播矩陣法的推導, Fuchs [10], Fuchs 和 Müller [11] 提出先處理平面波在多層介質間反射與透射的情形, 再透過平面波綜合法求出點波源的波場並透過遞迴法求出波形圖。Kennett [12~14] 進一步求出層狀介質域內受點載荷的暫態響應。Ma 和 Huang [15,16] 導出層與層之間通解的轉換關係來求得二維層狀介質表面受點波源的暫態響應。

Spencer [17] 為避免直接解析多層介質的邊界值問題, 在分析個別的波在傳遞時, 遇到界面產生反射與透射的行為, 提出一套方法, 將多層介質中的波有系統的排序, 且每個波均可藉由反射與透射係數的操作而求得其數學上的形式, 並引進了廣義射線路徑 (generalized ray path) 的概念來化簡處理上的困難, Knopoff [18] 同時也發展了類似的概念, Spencer 與 Knopoff 的理論再配合 Cagniard 的方法構成了廣義射線理論的基石。廣義射線理論將層狀固體中之動態反應依觀察時限而極速遞增之波傳射線表達, 而每個波傳射線均可表示成一射線積分, 其主要由波源函數、界面間的反射與透射係數乘積、接收函數與相函數所構成, 每個積分再透過 Cagniard 的方法即可得到其暫態的反應, 而所有射線積分的加總, 即構成了多層介質的暫態解析。

值得一提的是, 透過廣義射線的概念, Shmueli [19] 與 Norwood [20] 將平板中的波以矩陣的方法排序, 使得板內的射線有一較簡潔的表示式。但對於多層板而言, 廣義射線理論仍需追蹤每一個波, 再將其反應算出, 然隨時間之增加, 應力波在界面間交互產生的反射與透射波, 其數目急遽增加, 使得射線理論在長時間的計算上產生困難。如同 Spencer [21,22] 所提, 廣義射線理論中波的退化、射線積分的發散與射線的排序將成為數值計算上的絆腳石。

在近兩年中, Lee 和 Ma [23,24] 以數理解析的方式推導了二維層狀介質平面問題的暫態波傳理論, 並將此問題在轉換域中的波動射線解以矩陣形式的無窮級數表示, 其解的形式亦同廣義射線理論, 是由波源矩陣, 界面間的反射與透射係數矩陣

乘積以及接收矩陣所連乘而成, 並可直接透過 Cagniard 之積分逆轉換求得在時域中的暫態解, 而在 [23,24] 文中亦以波的退化為基本觀念, 提出一套同時能處理數千萬個波乃至數億個波的貢獻之數值方法, 故能比以往學者進行更長時間的暫態計算, 然而由於所處理的問題為平面問題, 縱波及橫波相互耦合使得問題變得十分複雜, 雖然有理論正解以及數值計算上的優勢, 也僅能處理二十次以內的反射計算, 而無法執行長時間的計算。在應力暫態波傳的分析及計算上, 可探討長時間的反應, 唯有二維反平面問題, 由於僅有橫波的波傳, 不僅在分析上, 也在計算上比平面問題簡單許多, Ma 等人 [25] 即探討了反平面薄層 (thin-layer) 問題承受步階函數 (heaviside function) 式的動力載荷作用後由暫態反應趨近於靜態 (static) 解的過程及特性。

本文則針對一彈性單層板承受週期性動力載荷的暫態反應以及其由暫態解趨向於穩態解的過程及特性作深入之探討, 選取本問題的原因為單層板的反平面暫態及穩態正解皆可由數學解析獲得, 再者本問題的數值計算精度可獲得十分精準的控制, 尤其有能力進行高頻週期性作用力之長時間暫態計算, 而有了這些優勢才可詳細探討暫態反應趨向於穩態之過程及所需之時間, 除此之外, 本文更進一步研究了在系統的共振頻率附近或在共振頻率時其暫態反應之特性, 也發現在共振頻率時單層板內兩個剪應力, 一個為無窮大而另一個卻是有限值, 且其暫態反應的數值計算亦正確地收斂到此有限值。

二、單層板之穩態解與暫態解

2.1 半無窮域之穩態解

考慮一個半無窮域受反平面動力週期性負載如圖 1 所示, 其波動方程式為

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = s_T^2 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (1)$$

其中 $s_T = \frac{1}{\beta}$ 為橫波的慢度 (slowness), β 為材料的橫波波速, 而 w 為 z 方向之位移。在 $y = 0$ 之半平面邊界條件為

$$\tau_{yz}(x, 0, t) = -f_z \delta(x) e^{i\omega t} \quad (2)$$

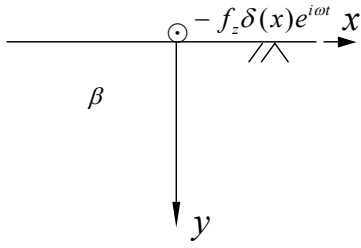


圖 1 半無窮域受反平面動力負載之示意圖

位移場 w 穩態解可假設如下之形式

$$w(x, y, t) = W(x, y) e^{i\omega t} \quad (3)$$

將(3)式代入(1)式則控制方程變為

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + k_T^2 W = 0 \quad (4)$$

其中 $k_T = \frac{\omega}{\beta}$ 。將(3)式代入(2)式則邊界條件變為

$$\mu \frac{\partial W}{\partial y} = -f_z \delta(x) \quad (5)$$

對(4)式作傅利葉轉換，再將邊界條件(5)式代入，則可得到在轉換域下位移場的解為

$$\tilde{W}(\xi, y) = \frac{f_z}{\mu(\xi^2 - k_T^2)^{1/2}} e^{-(\xi^2 - k_T^2)^{1/2} y} \quad (6)$$

再利用傅利葉反轉換得到位移解為

$$W(x, y) = \frac{f_z}{2\mu\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\xi^2 - k_T^2)^{1/2}} e^{-(\xi^2 - k_T^2)^{1/2} y + i\xi x} d\xi \quad (7)$$

利用變數變換的方式令 $x = r \cos \theta$ 、 $y = r \sin \theta$ ，可將(7)式化簡為一特殊的積分式，進而查表求解。

$$W(x, y) = \frac{f_z}{2\mu\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ir[-i(\xi^2 - k_T^2)^{1/2} \sin \theta - \xi \cos \theta]}}{(\xi^2 - k_T^2)^{1/2}} d\xi \quad (8)$$

再令 $s = -i(\xi^2 - k_T^2)^{1/2} \sin \theta - \xi \cos \theta$ ，並解 ξ 之值為

$$\xi_{\pm} = -s \cos \theta \pm i(s^2 - k_T^2)^{1/2} \sin \theta \quad (9)$$

(9)式在複數 ξ 平面上為一雙曲線，其示意圖如圖 2 所示，其漸近線如下

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\text{Im} \left[\frac{\xi_{\pm}}{s} \right]}{\text{Re} \left[\frac{\xi_{\pm}}{s} \right]} = \pm \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \pm \tan \theta$$

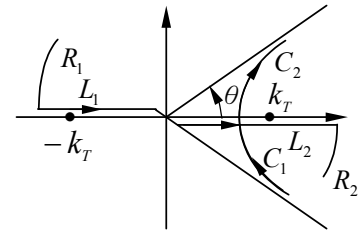


圖 2 ξ 平面之積分路徑轉換示意圖

經由上述的變數變換，原本的積分路徑 L_1 及 L_2 變成 C_1 與 C_2 ，而積分路徑 R_1 及 R_2 在 $|\xi| \rightarrow \infty$ 時為零，所以(8)式變為 (Achenbach [26])

$$W(x, y) = -\frac{f_z}{2\mu\pi} \int_{k_T}^{\infty} (\xi_+^2 - k_T^2)^{-1/2} \frac{\partial \xi_+}{\partial s} e^{-irs} ds - \frac{1}{2\mu\pi} \int_{\infty}^{k_T} (\xi_-^2 - k_T^2)^{-1/2} \frac{\partial \xi_-}{\partial s} e^{-irs} ds \quad (10)$$

將(9)式對 s 微分可得

$$\frac{\partial \xi_{\pm}}{\partial s} = -\cos \theta \pm \frac{is \sin \theta}{(s^2 - k_T^2)^{1/2}} \quad (11)$$

$$\text{且 } (\xi_+^2 - k_T^2)^{-1/2} = (s^2 - k_T^2)^{1/2} \cos \theta - is \sin \theta$$

$$(\xi_-^2 - k_T^2)^{-1/2} = -(s^2 - k_T^2)^{1/2} \cos \theta - is \sin \theta \quad (12)$$

$$\text{所以 } (\xi_{\pm}^2 - k_T^2)^{-1/2} \frac{\partial \xi_{\pm}}{\partial s} = \mu \frac{1}{(s^2 - k_T^2)^{1/2}} \quad (13)$$

將(13)式代入(10)式則

$$W(x, y) = \frac{f_z}{\mu\pi} \int_{k_T}^{\infty} \frac{e^{-irs}}{(s^2 - k_T^2)^{1/2}} ds \quad (14)$$

令 $s = k_T u$ 代入(14)式則變為

$$W(x, y) = \frac{f_z}{\mu\pi} \int_1^{\infty} \frac{e^{-ik_T u r}}{(u^2 - 1)^{1/2}} du \quad (15)$$

而(15)式即為第二類 Hankel function 的形式，所以可以表示成

$$W(x, y) = -\frac{f_z}{2\mu} i H_0^{(2)}(k_T r) \quad (16)$$

將(16)式代回(3)式則



$$w(x, y, t) = -\frac{f_z}{2\mu} i H_0^{(2)}(k_T r) e^{i\omega t} \quad (17)$$

將 $H_0^{(2)}(k_T r) = J_0(k_T r) - i Y_0(k_T r)$ 和 $e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t$ 代入(17)式並加以整理可得

$$w(x, y, t) = \frac{f_z}{2\mu} [Y_0(k_T r) \cos \omega t - J_0(k_T r) \sin \omega t] - \frac{if_z}{2\mu} [J_0(k_T r) \cos \omega t + Y_0(k_T r) \sin \omega t] \quad (18)$$

其中 J_0 及 Y_0 分別為零階的第一類及第二類 Bessel 函數。(18)式中有實部及虛部兩項，是因為施加 $e^{i\omega t}$ 載荷的緣故，所以實部為 $\cos \omega t$ 所造成的效應，而虛部則為 $\sin \omega t$ 所造成的效應。若只考慮 $\sin \omega t$ 的效應的話，則(18)式變為

$$w(x, y, t) = -\frac{f_z}{2\mu} [J_0(k_T r) \cos \omega t + Y_0(k_T r) \sin \omega t] \quad (19)$$

而應力場的解可表示為

$$\tau_{yz}(x, y, t) = \mu \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{f_z}{2} k_T \sin \theta [J_1(k_T r) \cos \omega t + Y_1(k_T r) \sin \omega t] \quad (20)$$

$$\tau_{xz}(x, y, t) = \mu \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{f_z}{2} k_T \cos \theta [J_1(k_T r) \cos \omega t + Y_1(k_T r) \sin \omega t] \quad (21)$$

其中 J_1 及 Y_1 分別為一階的第一類及第二類 Bessel 函數。

2.2 單層板之穩態解

利用映射法如圖 3 所示可以得到半無窮域在域內受反平面點載荷的解可以兩個無窮域的解疊加而成，亦可知無窮域的解是半無窮域承受邊界點載荷解的一半；依同樣的原理，也可利用映射法來滿足兩個邊界條件如圖 4 所示，便可以得到單層板在域內受反平面點載荷的解，且此種映射法可同時適用於穩態及暫態分析，作穩態分析時以每次疊加四點來作數值計算則收斂速度較快，本文以兩種不同邊界條件的單層板來討論，如圖 5 及圖 6 所示，即單層板 (I) 是上下邊界皆為自由邊界，單層板 (II) 是上邊為固定邊界而下邊為自由邊界，皆在域內受一反平面點載荷，在圖中 h 為板厚而 h_s 為波源離上平面之距離。

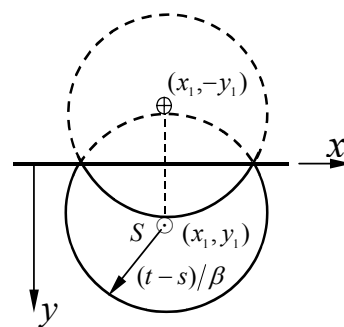


圖 3 半無窮域受反平面點載荷示意圖

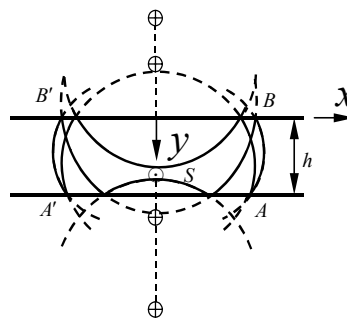


圖 4 單層板受反平面點載荷示意圖

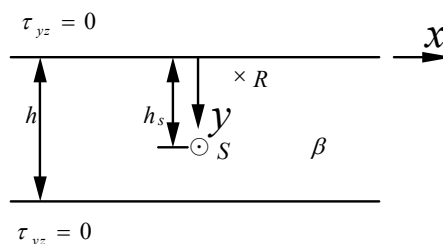


圖 5 單層板 (I) 受反平面點載荷示意圖

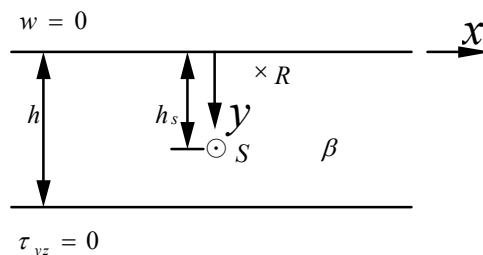


圖 6 單層板 (II) 受反平面點載荷示意圖

單層板 (I) 的全場位移及應力之穩態解

$$w(x, y, t) = -\frac{f_z}{4\mu} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^4 \left[\cos \omega t J_0(k_T \sqrt{x^2 + y_{nj}^2}) + \sin \omega t Y_0(k_T \sqrt{x^2 + y_{nj}^2}) \right]$$

$$\tau_{yz}(x, y, t)$$

$$= \frac{f_z k_T}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^4 \left[\cos \omega t \frac{y_{nj} J_1 \left(k_T \sqrt{x^2 + y_{nj}^2} \right)}{\sqrt{x^2 + y_{nj}^2}} + \sin \omega t \frac{y_{nj} Y_1 \left(k_T \sqrt{x^2 + y_{nj}^2} \right)}{\sqrt{x^2 + y_{nj}^2}} \right]$$

$$\tau_{xz}(x, y, t)$$

$$= \frac{f_z k_T}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^4 \left[\cos \omega t \frac{x J_1 \left(k_T \sqrt{x^2 + y_{nj}^2} \right)}{\sqrt{x^2 + y_{nj}^2}} + \sin \omega t \frac{x Y_1 \left(k_T \sqrt{x^2 + y_{nj}^2} \right)}{\sqrt{x^2 + y_{nj}^2}} \right] \quad (22)$$

單層板 (II) 的全場位移及應力之穩態解

$$w(x, y, t)$$

$$= \frac{-f_z}{4\mu} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^4 (-1)^{j+1} (-1)^{n+1} \left[\cos \omega t J_0 \left(k_T \sqrt{x^2 + y_{nj}^2} \right) + \sin \omega t Y_0 \left(k_T \sqrt{x^2 + y_{nj}^2} \right) \right]$$

$$\tau_{yz}(x, y, t)$$

$$= \frac{f_z k_T}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^4 (-1)^{j+1} (-1)^{n+1} \left[\cos \omega t \frac{y_{nj} J_1 \left(k_T \sqrt{x^2 + y_{nj}^2} \right)}{\sqrt{x^2 + y_{nj}^2}} + \sin \omega t \frac{y_{nj} Y_1 \left(k_T \sqrt{x^2 + y_{nj}^2} \right)}{\sqrt{x^2 + y_{nj}^2}} \right]$$

$$\tau_{xz}(x, y, t)$$

$$= \frac{f_z k_T}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^4 (-1)^{j+1} (-1)^{n+1} \left[\cos \omega t \frac{x J_1 \left(k_T \sqrt{x^2 + y_{nj}^2} \right)}{\sqrt{x^2 + y_{nj}^2}} + \sin \omega t \frac{x Y_1 \left(k_T \sqrt{x^2 + y_{nj}^2} \right)}{\sqrt{x^2 + y_{nj}^2}} \right] \quad (23)$$

其中

$$\begin{aligned} y_{n1} &= 2nh - y - h_s & y_{n2} &= 2nh - y + h_s \\ y_{n3} &= 2(n-1)h + y + h_s & y_{n4} &= 2(n-1)h + y - h_s \end{aligned} \quad (24)$$

2.3 半無窮域受波源 $\sin \omega t$ 載荷之暫態解

考慮一個半無窮域受反平面動力負載如圖 7 所示，在 $y = 0$ 之半平面邊界條件為

$$\tau_{yz}(x, 0, t) = -f_z f(t) \delta(x) \quad (25)$$

若一函數 $g(x, y, t)$ 對時間 t 作單邊拉普拉斯轉換，對位置 x 作雙邊拉普拉斯轉換，定義如下

$$\bar{g}(x, y, p) = \int_0^{\infty} g(x, y, t) e^{-pt} dt \quad (26)$$

$$\bar{g}^*(\eta, y, p) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{g}(x, y, p) e^{-p\eta x} dx \quad (27)$$

則雙邊拉普拉斯轉換的逆轉換為

$$\bar{g}(x, y, p) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \bar{g}^*(\eta, y, p) e^{p\eta x} d\eta \quad (28)$$

其中 Γ 表示 η 的複數平面上沿著虛軸從 $-i\infty$ 到 $i\infty$ 的積分路徑。

利用(26)及(27)式對波動方程作拉普拉斯轉換後，再將邊界條件(25)式代入，可得到轉換域下位移場及應力場之解為

$$\bar{w}^* = \frac{f_z \bar{f}(p)}{\mu p} (s_T^2 - \eta^2)^{-1/2} e^{-p(s_T^2 - \eta^2)^{1/2} y} \quad (29)$$

$$\bar{\tau}_{yz}^* = \mu \frac{\partial \bar{w}^*}{\partial y} = -f_z \bar{f}(p) e^{-p(s_T^2 - \eta^2)^{1/2} y} \quad (30)$$

將(29)及(30)式利用(28)式的逆轉換可得

$$\bar{w} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f_z \bar{f}(p)}{\mu p} (s_T^2 - \eta^2)^{-1/2} e^{-p(s_T^2 - \eta^2)^{1/2} y} e^{p\eta x} d(p\eta) \quad (31)$$

$$\bar{\tau}_{yz} = \frac{-1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f_z \bar{f}(p) e^{-p(s_T^2 - \eta^2)^{1/2} y} e^{p\eta x} d(p\eta) \quad (32)$$

又 $\tau_{xz} = \mu \frac{\partial w}{\partial x}$ ，將(31)式代入則可得

$$\bar{\tau}_{xz} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f_z \bar{f}(p) \eta (s_T^2 - \eta^2)^{-1/2} e^{-p(s_T^2 - \eta^2)^{1/2} y} e^{p\eta x} d(p\eta) \quad (33)$$

接著利用 Cagniard-de Hoop 的逆轉換方法，令 $t = (s_T^2 - \eta^2)^{1/2} y - \eta x$ ，並解 η 之值為

$$\eta_{\pm} = -\frac{t}{r} \cos \theta \pm i (t^2 - s_T^2 r^2)^{1/2} \frac{\sin \theta}{r} \quad (34)$$

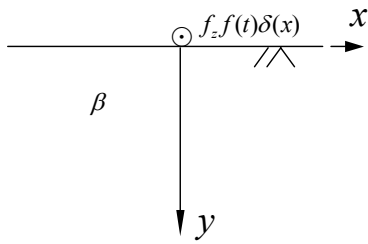


圖 7 半無窮域受反平面動力負載之示意圖

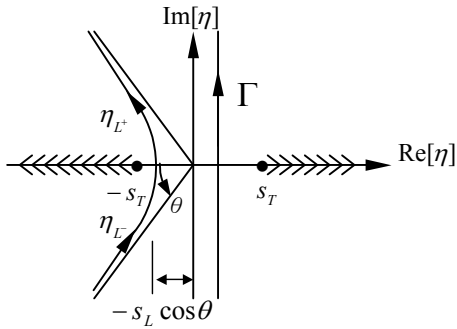


圖 8 η 的複數平面之積分路徑轉換示意圖

其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\theta = \tan^{-1} \frac{y}{x}$ 。(34)式在 η 的複數平面上為一雙曲線如圖 8 所示。經由上述的變數變換後，(31)、(32)及(33)式變為

$$\bar{w} = \frac{f_z \bar{f}(p)}{\mu \pi} \int_0^\infty \left\{ \text{Im} \left[\frac{1}{\sqrt{s_T^2 - \eta_+^2}} \frac{\partial \eta_+}{\partial t} \right] H(t - s_T r) \right\} e^{-pt} dt \quad (35)$$

$$\bar{\tau}_{yz} = \frac{-f_z \bar{f}(p) p}{\pi} \int_0^\infty \left\{ \text{Im} \left[\frac{\partial \eta_+}{\partial t} \right] H(t - s_T r) \right\} e^{-pt} dt \quad (36)$$

$$\bar{\tau}_{xz} = \frac{f_z \bar{f}(p) p}{\pi} \int_0^\infty \left\{ \text{Im} \left[\frac{\eta}{\sqrt{s_T^2 - \eta_+^2}} \frac{\partial \eta_+}{\partial t} \right] H(t - s_T r) \right\} e^{-pt} dt \quad (37)$$

因為(35)、(36)及(37)式與(26)式拉普拉斯正轉換有著同樣的形式，再利用褶積定理，可得到時域下的暫態解為

$$w(x, y, t) = \frac{f_z}{\mu \pi} \left\{ f(t) * \frac{H(t - s_T r)}{\sqrt{t^2 - s_T^2 r^2}} \right\} \quad (38)$$

$$\tau_{yz}(x, y, t) = \frac{-f_z \sin \theta}{\pi r} \left\{ L^{-1} [\bar{f}(p) \cdot p] * \frac{t}{\sqrt{t^2 - s_T^2 r^2}} H(t - s_T r) \right\} \quad (39)$$

$$\tau_{xz}(x, y, t) = \frac{-f_z \cos \theta}{\pi r} \left\{ L^{-1} [\bar{f}(p) \cdot p] * \frac{t}{\sqrt{t^2 - s_T^2 r^2}} H(t - s_T r) \right\} \quad (40)$$

現在進一步探討當承受動力負載為 $f(t) = \sin \omega t H(t)$ 時的位移及應力的暫態反應。利用褶積定理將 $f(t) = \sin \omega t H(t)$ 代入(38)式可得

$$w = \frac{f_z}{\mu \pi} \int_0^t \frac{H(\tau - s_T r)}{\sqrt{\tau^2 - s_T^2 r^2}} \sin[\omega(t - \tau)] H(t - \tau) d\tau$$

$$= \begin{cases} \frac{f_z}{\mu \pi} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\tau^2 - s_T^2 r^2}} [\sin \omega t \cos \omega \tau - \cos \omega t \sin \omega \tau] d\tau & t \geq s_T r \\ 0 & t < s_T r \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{f_z}{\mu \pi} [\sin \omega t \int_0^t \frac{\cos \omega \tau}{\sqrt{\tau^2 - s_T^2 r^2}} d\tau - \cos \omega t \int_0^t \frac{\sin \omega \tau}{\sqrt{\tau^2 - s_T^2 r^2}} d\tau] & t \geq s_T r \\ 0 & t < s_T r \end{cases} \quad (41)$$

利用式(41)的積分方式作數值計算，不但可節省計算時間且有極佳的數值穩定度及精度，尤其在探討高頻且長時間的暫態反應時極優的數值結果，兩個剪應力的數值計算亦作相同的處理。

2.4 單層板之暫態解

單層板的暫態解亦可利用映射法求得，需注意的是因為波傳需要時間，故需疊加映射點的數目跟波傳時間有關，所以在計算某固定時間的暫態反應時是疊加有限個映射點並非無限個。如圖 5 及圖 6 所示，考慮單層板在域內 $(0, h_s)$ 承受一任意負載 $f_z f(t)$ ，則

單層板 (I) 的暫態解：

$$w(x, y, t) = f(t) * w^*(x, y, t) \quad (42)$$

$$\tau_{yz}(x, y, t) = L^{-1} [\hat{f}(p) \cdot p] * \tau_{yz}^*(x, y, t) \quad (43)$$

$$\tau_{xz}(x, y, t) = L^{-1} [\hat{f}(p) \cdot p] * \tau_{xz}^*(x, y, t) \quad (44)$$

其中

$$w^*(x, y, t) = \frac{f_z}{2\pi\mu} \left\{ \text{Im} \left[\frac{1}{\sqrt{s_T^2 - \eta_0^2}} \frac{\partial \eta_0}{\partial t} \right] H(t - t_0) + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{n=1}^4 \text{Im} \left[\frac{1}{\sqrt{s_T^2 - \eta_{jn}^2}} \frac{\partial \eta_{jn}}{\partial t} \right] H(t - t_{jn}) \right\} \quad (45)$$

$$\tau_{yz}^*(x, y, t) = \frac{f_z}{2\pi} \left\{ \text{Im} \left[\frac{\partial \eta_0}{\partial t} \right] H(t - t_0) + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{n=1}^4 (-1)^{n+1} \text{Im} \left[\frac{\partial \eta_{jn}}{\partial t} \right] H(t - t_{jn}) \right\} \quad (46)$$

$$\tau_{xz}^*(x, y, t) = \frac{f_z}{2\pi} \left\{ \text{Im} \left[\frac{\eta_0}{\sqrt{s_T^2 - \eta_0^2}} \frac{\partial \eta_0}{\partial t} \right] H(t - t_0) + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{n=1}^4 \text{Im} \left[\frac{\eta_{jn}}{\sqrt{s_T^2 - \eta_{jn}^2}} \frac{\partial \eta_{jn}}{\partial t} \right] H(t - t_{jn}) \right\} \quad (47)$$

單層板 (II) 的暫態解：

$$w(x, y, t) = f(t) * w^{**}(x, y, t) \quad (48)$$

$$\tau_{yz}(x, y, t) = L^{-1}[\hat{f}(p) \cdot p] * \tau_{yz}^{**}(x, y, t) \quad (49)$$

$$\tau_{xz}(x, y, t) = L^{-1}[\hat{f}(p) \cdot p] * \tau_{xz}^{**}(x, y, t) \quad (50)$$

其中

$$w^{**}(x, y, t) = \frac{f_z}{2\pi\mu} \left\{ \text{Im} \left[\frac{1}{\sqrt{s_T^2 - \eta_0^2}} \frac{\partial \eta_0}{\partial t} \right] H(t - t_0) + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{n=1}^4 (-1)^j (-1)^{n+1} \text{Im} \left[\frac{1}{\sqrt{s_T^2 - \eta_{jn}^2}} \frac{\partial \eta_{jn}}{\partial t} \right] H(t - t_{jn}) \right\} \quad (51)$$

$$\tau_{yz}^{**}(x, y, t) = \frac{f_z}{2\pi} \left\{ \text{Im} \left[\frac{\partial \eta_0}{\partial t} \right] H(t - t_0) + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{n=1}^4 (-1)^j \text{Im} \left[\frac{\partial \eta_{jn}}{\partial t} \right] H(t - t_{jn}) \right\} \quad (52)$$

$$\tau_{xz}^{**}(x, y, t) = \frac{f_z}{2\pi} \left\{ \text{Im} \left[\frac{\eta_0}{\sqrt{s_T^2 - \eta_0^2}} \frac{\partial \eta_0}{\partial t} \right] H(t - t_0) + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{n=1}^4 (-1)^j (-1)^{n+1} \text{Im} \left[\frac{\eta_{jn}}{\sqrt{s_T^2 - \eta_{jn}^2}} \frac{\partial \eta_{jn}}{\partial t} \right] H(t - t_{jn}) \right\} \quad (53)$$

而 η_0 及 η_{jn} 為時間及空間的函數且分別滿足下列兩式

$$\sqrt{s_T^2 - \eta_0^2} |y + h_s| + \eta_0 x = t \quad (54)$$

$$\sqrt{s_T^2 - \eta_{jn}^2} y_{jn} + \eta_{jn} x = t, \quad n=1, 2, 3, 4 \quad (55)$$

其中 y_{jn} 為

$$y_{j1} = 2jh - (y - h_s), \quad y_{j2} = 2(j+1)h + (y - h_s)$$

$$y_{j3} = 2(j+1)h - (y + h_s), \quad y_{j4} = 2(j+1)h + (y + h_s) \quad (56)$$

而 t_0 和 t_{jn} 為波到達的時間。若取 $f(t) = \sin \omega t H(t)$ 的週期性函數時則單層板的暫態反應的數值計算可比照 2.3 節所述來處理，因為此時式(45)~(47)及(51)~(53)的每一項即代表一個在無窮域的暫態解，其數學表示式與前節相似。

三、數值計算

比較單層板 (I) 及 (II) 受反平面點載荷如圖 5 及圖 6 所示之穩態解 (圖 9 至圖 14)，兩者有很大的不同，單層板 (I) 發生共振頻率處為 $\omega = n\pi$ ($n = 1, 2, 3, 4, \dots$) 如圖 9，圖 11 及圖 13，而單層板 (II) 發生共振頻率處為 $\omega = \frac{(2n+1)\pi}{2}$ ($n = 1, 2, 3, 4, \dots$) 如圖 10，圖 12 及圖 14，而從圖中可以清楚看出在共振頻率處 w 及 τ_{yz} 值會趨向無窮大，但值得注意的是 τ_{xz} 值卻是有限值而不是無窮大 (圖 13 及圖 14)。



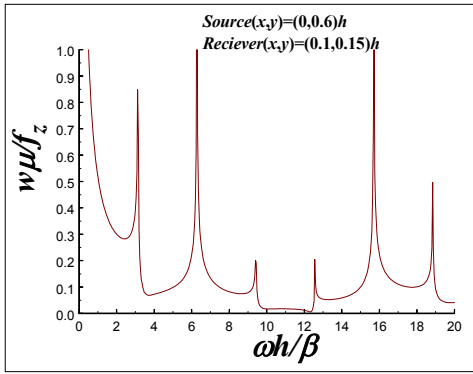


圖 9 單層板 (I) 受點載荷之 w

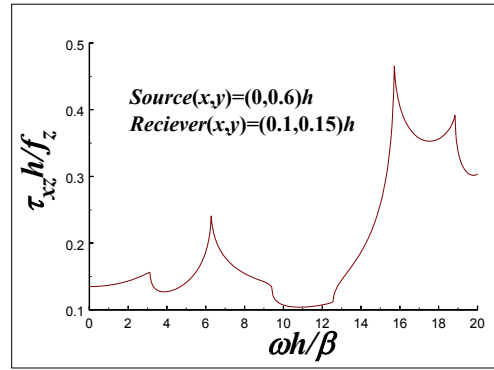


圖 13 單層板 (I) 受點載荷之 τ_{xz}

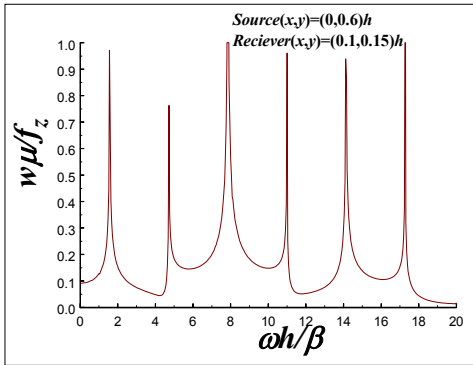


圖 10 單層板 (II) 受點載荷之 w

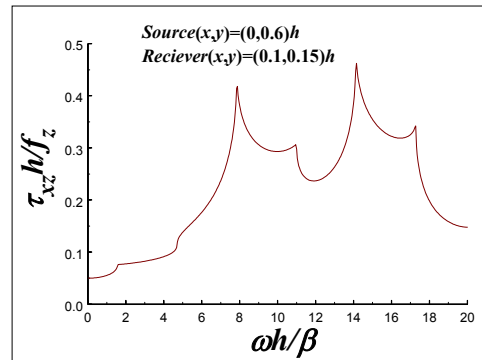


圖 14 單層板 (II) 受點載荷之 τ_{xz}

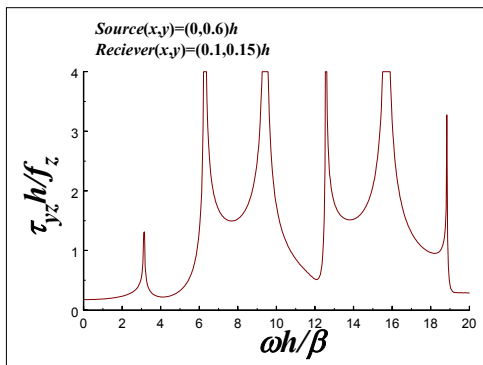


圖 11 單層板 (I) 受點載荷之 τ_{yz}

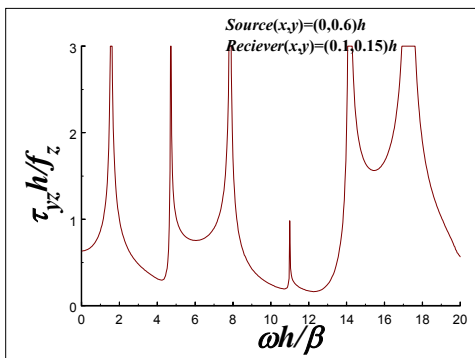


圖 12 單層板 (II) 受點載荷之 τ_{yz}

再來所探討是單層板之暫態解（受負載 $f(t) = \sin \omega t H(t)$ ）趨近於穩態解之過程及特性，同樣是以單層板 (I) 及 (II) 為例，其角頻率則取 $\omega h / \beta$ 為 1 (低頻)，6 (中頻) 及 12 (高頻) 三種不同狀況來作詳細之探討。而當 $\omega h / \beta = 6$ 時，其波長約與板厚相當。

由於波傳需要時間，在暫態解中波自波源產生而到達量測點所需的時間為 $t = r s_T$ ， $r = \sqrt{0.1^2 + (0.6 - 0.15)^2} h = 0.461h$ 所以在無因次時間 $t / s_T h = 0.461$ 時主波到達量測點。單層板 (I) 中，當 $\omega h / \beta = 1$ 時，如圖 15 所示，可以發現 τ_{xz} 很快就達到穩態解且比 τ_{yz} 所需時間快很多， τ_{yz} 在初期的暫態反應會比穩態反應來得大一點，曲線有輕微的抖動，但之後的暫態解跟穩態解就逐漸接近，約在 $t / s_T h = 50$ 左右暫態解就與穩態解幾乎相同。當 $\omega h / \beta = 6$ 時，如圖 16 所示， τ_{xz} 在初期的暫態反應會比穩態反應小一點，在 $t / s_T h = 4$ 左右就很快趨於穩態解，其所需時間仍然比 τ_{yz} 快很多， τ_{yz} 的暫態反應呈現震盪現象且有逐漸朝穩態解接近的趨勢，但是趨近的速度非常緩慢且需要非常久的時間才達到穩態解。當 $\omega h / \beta = 12$ 時，

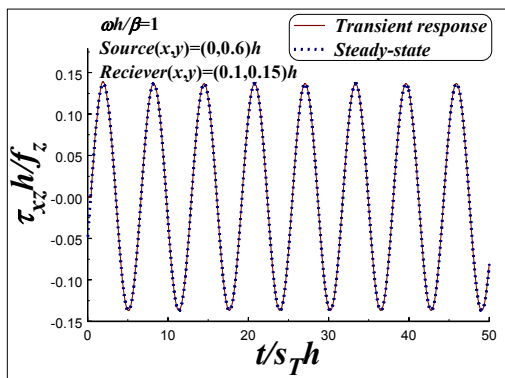
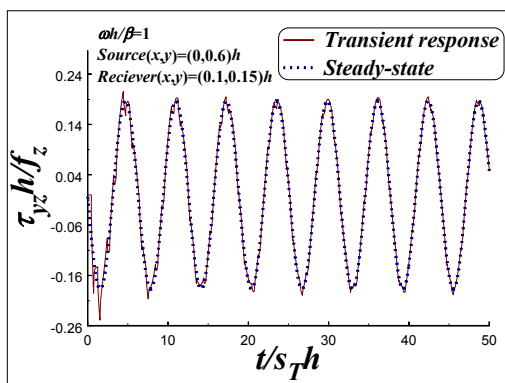


圖 15 單層板 (I) 受 $f(t) = \sin \omega t$ 載荷之暫態解與穩態解比較圖

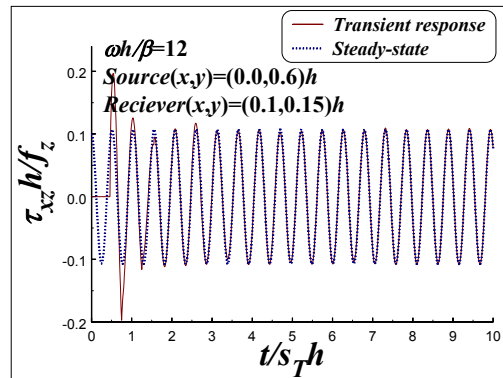
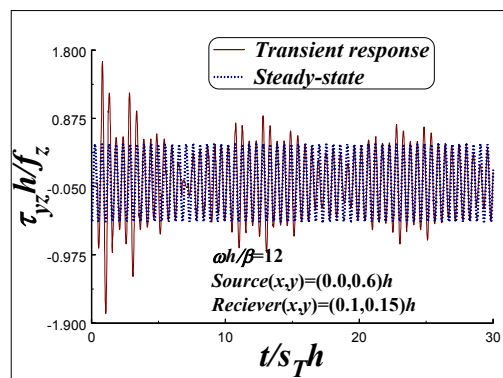


圖 17 單層板 (I) 受 $f(t) = \sin \omega t$ 載荷之暫態解與穩態解比較圖

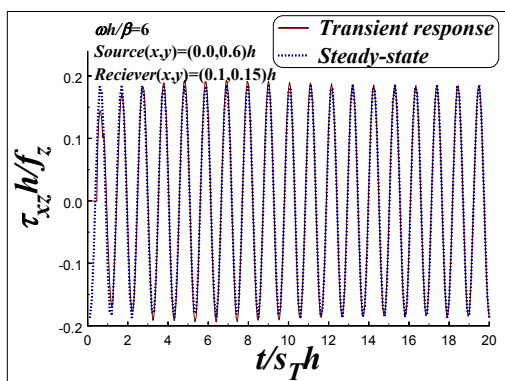
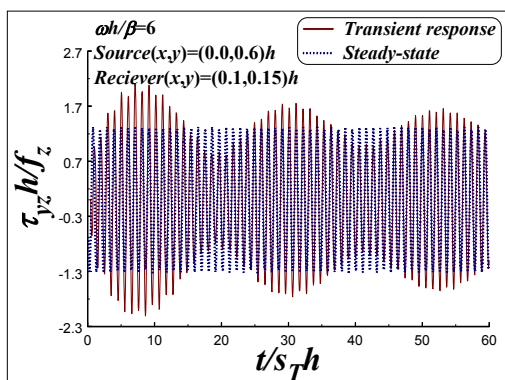


圖 16 單層板 (I) 受 $f(t) = \sin \omega t$ 載荷之暫態解與穩態解比較圖

如圖 17 所示， τ_{xz} 在初期的暫態反應會比穩態反應來的大，但很快就趨於穩態解，而 τ_{yz} 的暫態反應也是呈現震盪現象且比 $\omega h/\beta = 6$ 時還激烈，亦有朝著穩態解接近的趨勢，可是趨近的速度很慢需要的時間也是很長。

單層板 (II) 中，當 $\omega h/\beta = 1$ 時，如圖 18 所示， τ_{yz} 的暫態解曲線還蠻平滑，但到 $t/s_T h = 50$ 時仍猶未達到穩態解，所需的時間比同樣狀況的單層板 (I) 來得久，而 τ_{xz} 的暫態解很快就達到穩態解。當 $\omega h/\beta = 6$ 時，如圖 19 所示， τ_{xz} 的暫態解仍然很快就達到穩態解， τ_{yz} 的暫態解都很接近穩態解，可是一直保持這樣的現象，而要達到穩態解卻需要很久的時間。當 $\omega h/\beta = 12$ 時，如圖 20 所示， τ_{xz} 的暫態解很快就達到穩態解， τ_{yz} 的暫態解曲線震盪激烈，有朝著穩態解慢慢接近的趨勢，但需要很久的時間才會達到穩態解。由以上之數值計算結果可知 τ_{xz} 比 τ_{yz} 趨近於穩態解所需之時間快許多，高頻亦比低頻需較長時間且其趨近於穩態解之過程呈現劇烈震盪之現象。

由於本文的暫態數值計算十分精準，所以有能力探討在共振頻率附近，甚至在共振頻率時暫態反應趨近於穩態解的過程及其特性。其中單層板 (I) 取 $\omega h/\beta = 6.3$ 和共振頻 $\omega h/\beta = 2\pi = 6.283$ ，單層板 (II) 則取 $\omega h/\beta = 4.69$ 和共振頻 $\omega h/\beta = 1.5\pi = 4.712$ 。先討論單層板

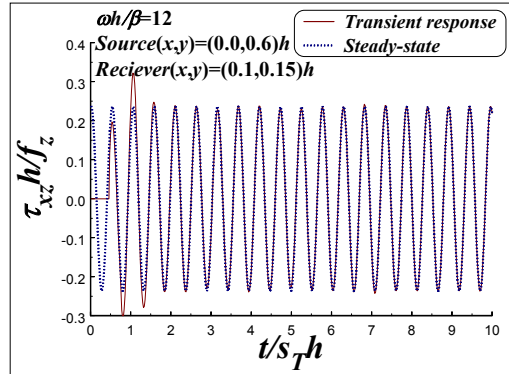
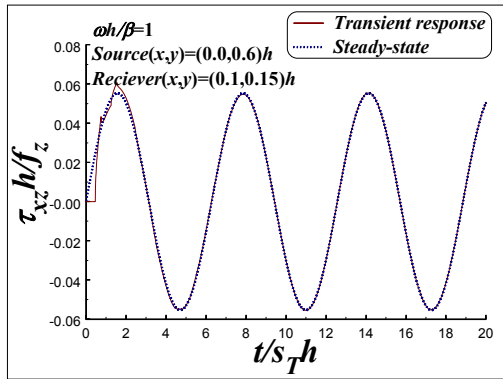
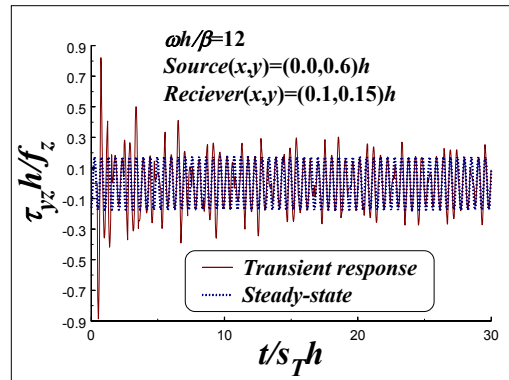
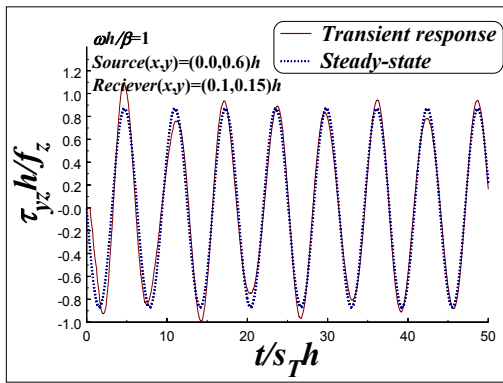


圖 18 單層板 (II) 受 $f(t) = \sin \omega t$ 載荷之暫態解與穩態解比較圖

圖 20 單層板 (II) 受 $f(t) = \sin \omega t$ 載荷之暫態解與穩態解比較圖

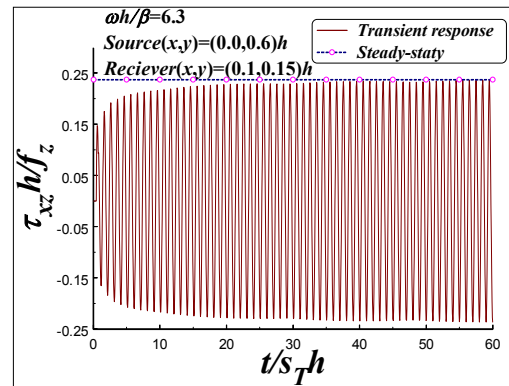
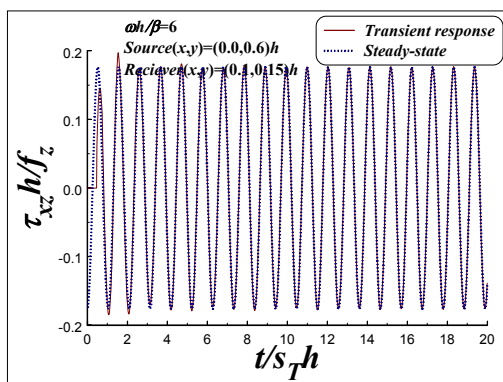
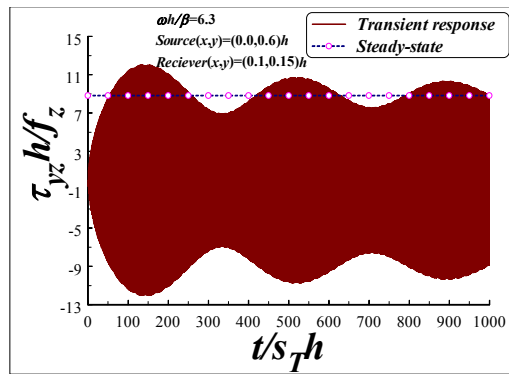
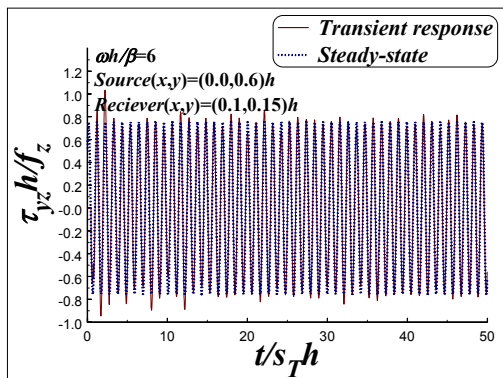
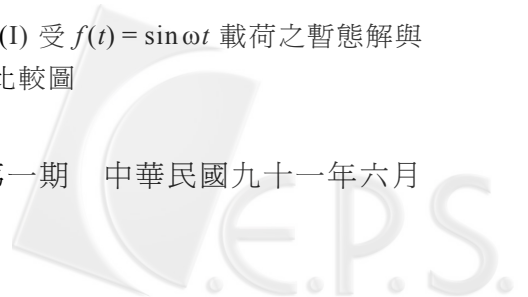


圖 19 單層板 (II) 受 $f(t) = \sin \omega t$ 載荷之暫態解與穩態解比較圖

圖 21 單層板 (I) 受 $f(t) = \sin \omega t$ 載荷之暫態解與穩態解比較圖



(I) 之狀況，當 $\omega h/\beta = 6.3$ 時，由圖 21 中可看出 τ_{xz} 很快就收斂到穩態解而 τ_{yz} 則朝穩態解非常緩慢收斂，需要很久的時間才逐漸振盪收斂；當 $\omega h/\beta = 2\pi$ 時，由圖 22 中所示， τ_{yz} 隨時間增加而趨向無窮大並沒有振盪之現象，符合一般的預期，而 τ_{xz} 也很快收斂到穩態解而且如同之前所述其值為有限值。單層板 (II)，當 $\omega h/\beta = 4.69$ 時，圖 23 中， τ_{xz} 也很快收斂到穩態解而 τ_{yz} 則朝穩態解緩慢收斂這跟單層板 (I) 中 $\omega h/\beta = 6.3$ 時的現象相似；當 $\omega h/\beta = 1.5\pi$ 時，圖 24 中之 τ_{yz} 隨時間增加而值趨向無窮大，而 τ_{xz} 則很快收斂到穩態解且其值為有限值，這也跟單層板 (I) 中 $\omega h/\beta = 2\pi$ 時的現象相似。

最後探討的是單層板 (I) 受一反平面點載荷，頻率為 $\omega h/\beta = 6$ 、 6.3 及 2π 時全場的應力穩態解，從圖 25 中明顯看出 τ_{yz} 皆呈左右對稱，當 $\omega h/\beta = 6.3$ 時，因為已很靠近共振頻所以等高線大多為直線並且值都很大，且與 $\omega h/\beta = 6$ 的全場應力分佈有很大的不同與變化，而 $\omega h/\beta = 2\pi$ 時全場應力值趨於無窮大所以無法畫出；如圖 26 所示 τ_{xz} 的全場圖也是左右對稱，亦隨 ω 增加應力值變大，應力分佈也越趨複雜，而在共振頻時，因為 τ_{xz} 為有限值所以可以畫出全場圖，而且與 $\omega h/\beta = 6.3$ 的應力分佈相似，這跟 τ_{yz} 的穩態全場分布有非常明顯的不同。

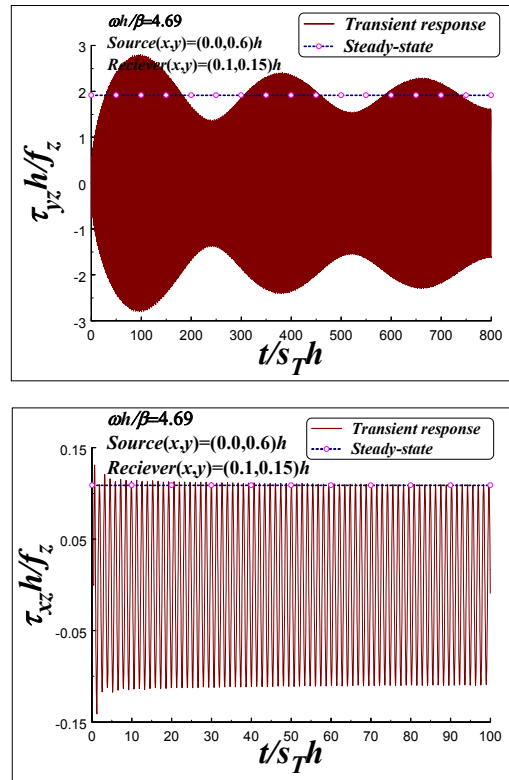


圖 23 單層板 (II) 受 $f(t) = \sin \omega t$ 載荷之暫態解與穩態解比較圖

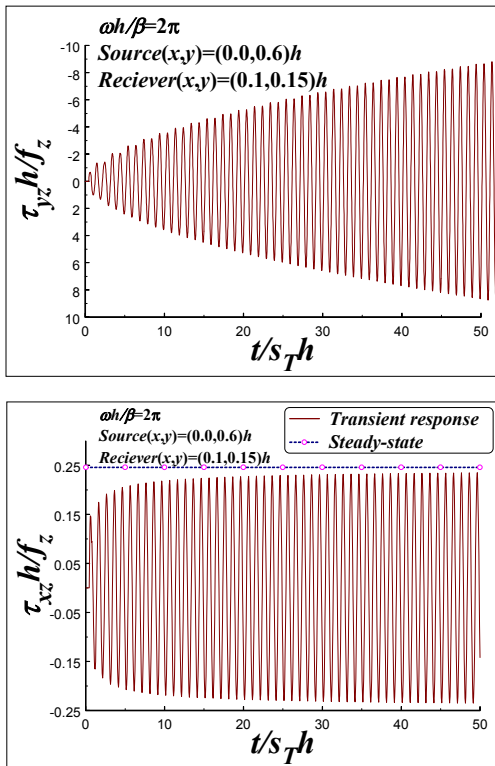


圖 22 單層板 (I) 受 $f(t) = \sin \omega t$ 載荷之暫態解與穩態解比較圖

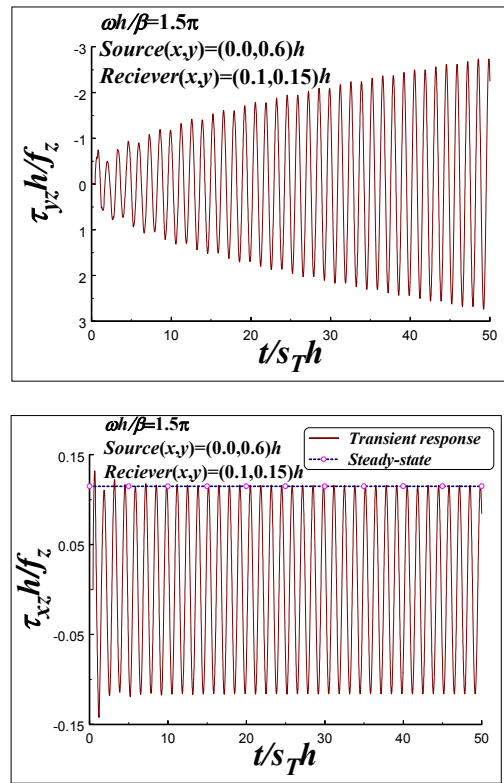


圖 24 單層板 (II) 受 $f(t) = \sin \omega t$ 載荷之暫態解與穩態解比較圖

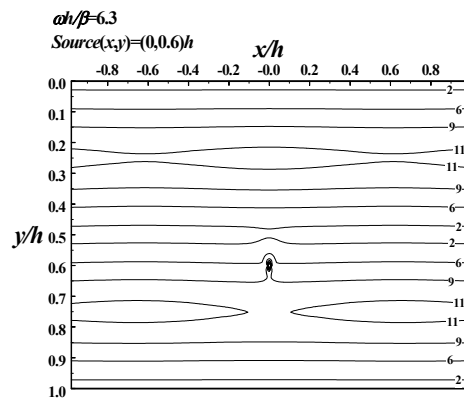
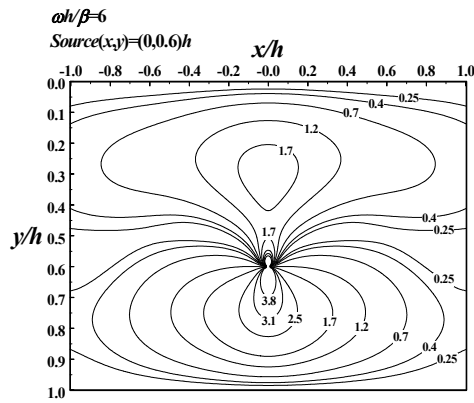


圖 25 單層板 (I) 受點載荷之 τ_{yz} 全場圖

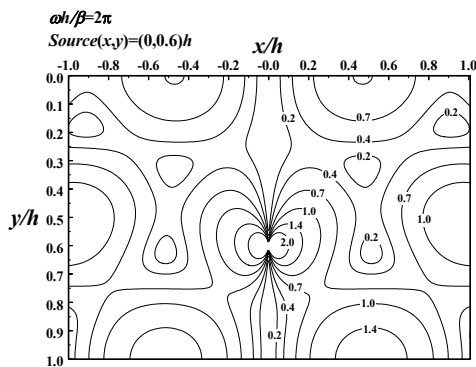
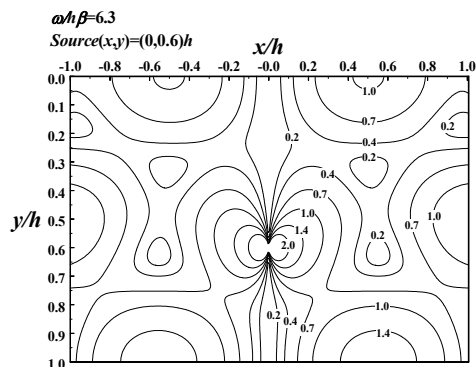
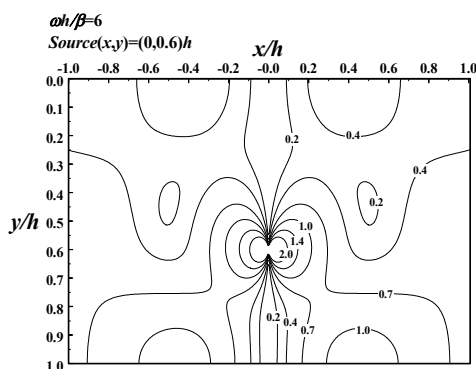


圖 26 單層板 (I) 受點載荷之 τ_{xz} 全場圖

四、結 論

本文以數學解析配合映射法之觀念獲得二維單層板反平面問題之暫態以及穩態的理論正解。單層板的穩態解中，如映射點疊加越多則解越精準，而單層板的暫態解中，需注意的是因為波傳需要時間，則要疊加映射點的數目跟波傳時間有關，所以在某一個固定時間是疊加有限個映射點並非無限個。單層板穩態解中，比較特殊的是在共振頻率時 w 與 τ_{yz} 會趨向無窮大，但 τ_{xz} 卻是有限值；單層板暫態解中， τ_{xz} 隨時間收斂至穩態解的速度比 τ_{yz} 快很多，所需要的時間也很短。

誌 謝

本研究由國科會計畫 NSC89-2212-E002-018 之經費輔助而完成。

參考文獻

1. Rayleigh, J. W. S., "On Waves Propagated along the Plane Surface of an Elastic Solid," *Proc. Lond. Math. Soc.*, 17, p. 4 (1887).
2. Cagniard, L., "Reflexion at Refraction des Ondes Seismiques Progressives," *Cauthiers-Villars*, Paris (1939).
3. de Hoop, A. T., "A Modification of Cagniard's Method for Solving Seismic Pulse Problems," *Appl. Sci. Res.*, B8, p. 349 (1960).

4. Ma, C. C. and Huang, K. C., "Exact Transient Solutions of Buried Dynamic Point Forces for Elastic Biomaterial," *Int. J. Solids and Structures*, 33, pp. 4223–4238 (1996).
5. Lamb, H., "On the Propagation of Termors over the Surface of an Elastic Solid," *Phil. Trans. Roy. Soc. Lond.*, 203A, pp. 1–42 (1904).
6. Miklowitz, J., "Transient Compressional Waves in an Infinite Elastic Plate or Elastic Layer Overlying a Rigid Half-Space," *J. Appl. Mech.*, 29, pp. 53–60 (1962).
7. Santosa, F. and Pao, Y. H., "Transient Axially Asymmetric Response of an Elastic Plate," *Wave Motion*, 11, pp. 271 (1989).
8. Thomson, W. T., "Transmission of Elastic Waves Through a Stratified Solid Medium," *J. Appl. Phys.*, 21, pp. 89–93 (1950).
9. Haskell, N., "The Dispersion of Surface Waves on Multilayered Media," *Bull. Seism. Soc. Am.*, 43, pp. 17–43 (1963).
10. Fuchs, K., "The Transfer Function for P-waves for a System Consisting of a Point Source in a Layered Medium," *Bull. Seismo. Soc. Am.*, 56, pp. 75–108 (1966).
11. Fuchs, K. and Müller, G., "Computation of Synthetic Seismograms with the Reflectivity Method and Comparison with Observations," *Geophys. J. R. RAS*, 23, pp. 417–433 (1971).
12. Kennett, B. L. N., "Seismic Waves in Lateral Inhomogeneous Media," *Geophys. J. R. RAS*, 27, pp. 301–325 (1972).
13. Kennett, B. L. N., "Reflections, Rays, and Reverberations," *Bull. Seismo. Soc. Am.*, 64, pp. 1685–1696 (1974).
14. Kennett, B. L. N., "Elastic Wave Propagation in Stratified Media," *Advances in Applied Mechanics*, 21, p. 79 (1981).
15. Ma, C. C. and Huang, K. C., "Analytical Transient Analysis of Layered Composite Medium Subjected to Dynamic In-plane Impact Loadings," *Int. J. Solids and Structures*, 33, pp. 4511–4529 (1996).
16. Ma, C. C. and Huang, K. C., "Wave Propagation in Layered Elastic Media for Anti-Plane Deformation," *Int. J. Solids and Structures*, 32, pp. 665–678 (1995).
17. Spencer, T. W., "The Method of Generalized Reflection and Transmission Coefficients," *Geophysics*, 25, pp. 625–641 (1960).
18. Knopoff, L., Gilbert, F. and Pilant, W. L., "Wave Propagation in a Medium with a Single Layer," *J. Geophys. Res.*, 65, p. 265 (1960).
19. Shmueli, M., "Response of Plates to Transient Sources," *J. of Sound and Vib.*, 32(4), pp. 491–506 (1974).
20. Norwood, F. R., "Transient Response of an Elastic Plate to Loads with Finite Characteristic Dimensions," *Int. J. Solids and Structures*, 11, pp. 33–51 (1975).
21. Spencer, T. W., "Long-Time Response Predicted by Exact Elastic Ray Theory," *Geophysics*, XXX(3), pp. 363–368 (1965).
22. Spencer, T. W., "Refraction along a Layer," *Geophysics*, XXX, pp. 369–388 (1965).
23. Lee, G. S. and Ma, C. C., "Transient Elastic Waves Propagating in a Multi-Layered Medium Subjected to In-Plane Dynamic Loadings, I, Theory," *Proc. R. Soc. Lond.*, A 456, pp. 1355–1374 (2000).
24. Ma, C. C. and Lee, G. S., "Transient Elastic Waves Propagating in a Multi-Layered Medium Subjected to In-Plane Dynamic Loadings, II, Numerical Calculation and Experimental Measurement," *Proc. R. Soc. Lond.*, A 456, pp. 1375–1396 (2000).
25. Liu, S. W., Ma, C. C. and Lee, G. S., "Dynamic Responses of a Layered Medium Subjected to Anti-Plane Loadings," *Int. J. Solids and Structures* (accepted) (2001).
26. Achenbach, J. D., *Wave Propagation in Elastic Solid*, North-Holland Publishing Co., New York (1973).



TRANSIENT RESPONSES OF AN ELASTIC PLATE SUBJECTED TO HARMONIC ANTI-PLANE LOADINGS

Chien-Ching Ma * Xi-Hong Chen **

*Department of Mechanical Engineering
National Taiwan University
Taipei, Taiwan 10617, R.O.C.*

ABSTRACT

The transition from transient response to steady state for an elastic thin plate subjected to harmonic anti-plane dynamic loadings is investigated in this study. The transient and steady-state analytical solutions for the thin plate problem are obtained based on the image method. The long-time transient responses are accurately determined by numerical calculation from the analytical solutions. The transition phenomena and characteristic times are studied in detail through the responses from low frequency to high frequency. Furthermore, the transient responses and the transition to steady state are also investigated for the case that the harmonic loadings are near the resonant frequencies or even at the resonant frequencies.

Keywords: Thin plate, Anti-plane loading, Transient response, Steady state.

* Professor ** Graduated student

(Manuscript received Oct. 16, 2001,
Accepted for publication Jan. 29, 2002.)