

應用互疊法解析長方板內含多裂縫之反平面問題

張志毅*

馬劍清**

中華民國 台北市

國立台灣大學

機械工程研究所

摘 要

本文採用長方板邊界承受點載荷的解析解，配合高斯積分建構出長方板在任意邊界條件下之全場解，以此作為解析互疊法之基本解，並首度將解析互疊法應用於有限板內含多裂縫問題之撕裂性破壞分析。文中除了以長方板內含一中央裂縫之 mode III 應力強度因子為例，獲得與其他學者一致的結果，更探討不同位置、角度之多裂縫在長方板承受不同邊界條件下之應力強度因子。

關鍵詞：互疊法、應力強度因子、長方板。

一、前 言

Schwartz 所提出的互疊法 (alternating-method) 是用來解決 Dirichlet 問題，考慮的問題是由兩個部分重疊的領域組合而成，假設這兩個獨立的領域都有解的話，那麼重疊之後新的領域是可以由互疊法求得的。Neumann 也提出一個相近的方法來解決兩個區間重疊後的問題，1964 年 Kantorovich 和 Krylov [1] 將兩人的方法合稱為 Schwartz-Neumann 互疊法，用來解決二階偏微分方程式。

互疊法基本是一種疊加的方法，對於一個複雜幾何外型與邊界值問題，我們可以將之分解成幾個較簡單的子問題，每個子問題都包含了原問題中的一部份邊界以及對應於原問題的虛擬邊界，首先將原問題給定的負載作用在其中某一子問題中，則在虛擬邊界上的殘留應力或位移，必須由另一個子問題來修正，藉由這些子問題的彼此反覆修正，再將這些子問題疊加後，即可以得到原問題的解答。

互疊法應用在裂縫問題是非常合適的，因為完全以理論解析一個有限邊界的裂縫問題相當困

難，一般皆是應用有限元的數值計算，而利用互疊法，我們只需要解決不含裂縫的有限域問題與含裂縫的無窮域問題，即可用來解析有限邊界的裂縫問題，而這兩個子問題的困難度都遠低於有限域的裂縫問題。

早期 Schwartz-Neumann 互疊法的應用，大多採用解析解作為兩個子問題的基本解，最早是 1973 年 Hartraft 和 Sih [2] 應用於邊裂縫問題，使用的子問題之一是無窮域含有限長裂縫，承受裂縫面任意分佈的曳力負載，之二是不含裂縫半無窮域表面承受任意分佈曳力負載，兩個子問題都使用解析解，這樣的互疊法 Wang 和 Atluri [3] 稱為解析互疊法 (Analytical Alternating Method)。其後 1973 年 Shah 和 Kobayashi [4] 也利用解析互疊法計算三維半無窮物體內含橢圓裂縫問題，但是當時局限於無窮域內橢圓裂縫的解析解只允許最多三次多項式分佈的曳力負載，不足以描述橢圓裂縫面上的任意負載，因而所得結果並不準確。

1981 年 Vijayakumar 和 Atluri [5] 推導出三維無窮域物體內含橢圓裂縫且承受裂縫面任意負載的解析解，才使得互疊法在計算三維裂縫問題

* 研究生 ** 教授



的準確度大為提高。1985年 O'Donoghue *et al.*, [6] 便引用上述的裂縫基本解配合解析互疊法計算三維無窮物體內含多個橢圓裂縫的問題，1990年 Chen 和 Chang [7] 則針對二維無窮域內含多個混合型裂縫提出一套方法，不需互疊法即可求得多裂縫的數值解，1993年 Zhang 和 Hasebe [8] 則探討排成一列或者環狀的裂縫之應力強度因子。

解析互疊法對於簡單幾何外型問題可以得到準確的結果，對於較複雜的幾何外型或較多邊界的問題往往很難處理，原因是對於不含裂縫的有限域問題甚難求得其解析解，往往必須以數值方式解奇異積分方程式，或者其解中包含多重無窮級數，造成數值計算的困難，更難應用於互疊的程序中。

近年來有限元素的蓬勃發展說明了它是一套非常有效的數值分析方法，其被應用在裂縫問題的破壞分析上相當普遍，但是，有限元素法對於裂尖網格節點的建立一直沒有一套公認的標準可用，對於多裂縫問題的網格則更難處理，相對於這些困難，有限元素互疊法 (FEAM) 顯然正好可以克服，因為在有限元素互疊法中，只需以有限元素計算不含裂縫問題的應力、位移解，不需處理裂縫問題，可以大幅減少網格數目與網格的複雜程度，當然可以減少來自有限元素法的誤差，再配合無窮域含有限長裂縫解析解，便成為有限元素互疊法。例如：[9,10] 利用 FEAM 計算二維混合型裂縫問題之應力強度因子，[11] 則計算二維有限體含多個混合型裂縫問題，而且 [9~11] 中裂縫的解析解均採用多項式分佈的裂縫負載，[12] 利用 FEAM 探討正交異向性材料的混合型裂縫問題，[13] 利用三維無窮域內含橢圓裂縫的任意負載解析解，以 FEAM 計算三維有限體內含橢圓表面裂縫的應力分佈，[14] 則探討部分橢圓表面裂縫之混合型應力強度因子，[15] 計算沿著半圓形表面裂縫前緣的應力強度因子變化，[16] 則計算三維有限體含表面裂縫的權衡函數。

邊界元素互疊法 (BEAM) 是較晚發展出的數值方法，1989年首先由 Rajiyah 和 Atluri [17] 提出以 BEAM 計算二維有限裂紋體的應力強度因子與權衡函數，隨後 Chen 和 Tu [18] 則用來作二維裂紋體的熱應力分析，1995年 Ting *et al.*, [19] 則應用 BEAM 計算有限板內含多裂縫的 Mode III 應力強度因子。

儘管 FEAM 與 BEAM 是能力甚強的數值分析方法，但是對於收斂性分析卻較解析互疊法來得複雜，因為其誤差來源較多，尤其有限元素法是以位移為基底的分析方法，計算出節點位移後再利用“型函數 (shape function)”計算元素內的應力分佈，因此計算應力的誤差較位移大，用於計算有限體虛擬裂縫位置的曳力時，必須仔細控制誤差，否則這些誤差會在互疊過程中不斷累積放大，這種情況對於多裂縫問題或者裂縫非常靠近邊界時都會特別明顯，相對於解析互疊法使用解析解作為基本解，誤差的來源主要來自互疊程序本身，比起 FEAM 或 BEAM 顯然容易控制得多。因此正如解析法雖然只能解決較簡單的問題，但卻是不可或缺的方法，因為它可以提供一個讓數值方法驗證的機會，同樣道理，解析互疊法雖然是半解析半數值的方法，但是誤差來源較少，適足以提供純數值方法參考的答案。

本文欲探討一有限長方板內含多裂縫問題的撕裂性破壞分析，裂縫可以在長方板的任意位置、角度，邊界條件可以是任意反平面應力或位移邊界，也可以有裂縫上任意曳力負載，對於簡化的單一中央裂縫問題，曾有多位學者對此進行探討，Ma [20,21] 使用傅立葉轉換 (Fourier transfer) 解析不同邊界條件下中央裂縫之應力強度因子，但是必須限於裂縫與邊界平行或垂直的狀況，並無任何斜角裂縫的分析，Liu 和 Altiero [22] 則以積分方程式配合邊界元素法得到與 Ma [20,21] 一致的結果，Ting [19] 首度對有限板內含多裂縫問題提出較完整的答案，而 Ting 使用 BEAM 來處理長方板上多裂縫問題，同時也考慮不同的邊界條件，但是所得的結果也僅限於平行或垂直於邊界的裂縫。本文採用解析互疊法來作分析，以不含裂縫的有限板承受邊界反平面負載條件下之解析解，及無窮域有限長裂縫的解析解為基本解，配合互疊的程序對這類問題作完整的探討，所得的結果在較簡單的問題且有解析解之狀況下 (如與 Ma [20,21] 比較) 皆有十分精確的答案，充分顯示本文所提方法的優越性與可靠性。

二、各種解析基本解

2.1 無窮域含有限長裂縫基本解

對於無窮域內含有限長裂縫問題的解析解，

一般學者普遍使用的負載形式是多項式分佈負載 (如 [9~11])，或 Chebyshev 多項式分佈負載 (如 [12,19])，若欲描述裂縫上的任意負載則需使用曲線嵌合 (curve fitting) 的技巧求得各項係數，在本文中則採用一對反平面點力作用在裂縫上為基本解，異於以往學者們常使用的，採用點力負載的好處是簡單，但是為描述變化急遽的裂縫負載需配合高斯積分，依本文經驗普通 24 點高斯積分不足以正確反應裂縫的分佈負載，本文將裂縫分成 4 段，每段 24 高斯點來積分，密佈的高斯點足以描述任何情況下的裂縫負載條件。

參考 Sih [23] 可知圖 1 問題的 Westergaard 應力函數可表示為

$$Z_{III} = \frac{T}{\pi} \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{(z-b)\sqrt{z^2 - a^2}} \quad (1)$$

其中 $z = x + iy$ ，則位移、應力及應力強度因子分別為

$$W = \frac{1}{G} \text{Im} \bar{Z}_{III} = \frac{T}{G\pi} \sin^{-1} \left(\frac{bz - a^2}{a(z-b)} \right) \quad (2)$$

$$\tau_{xz} = \text{Im} Z_{III} = \frac{T}{\pi} \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{r_3 \sqrt{r_1 r_2}} \sin \left(-\frac{\theta_1 + \theta_2}{2} - \theta_3 \right) \quad (3)$$

$$\tau_{yz} = \text{Re} Z_{III} = \frac{T}{\pi} \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{r_3 \sqrt{r_1 r_2}} \cos \left(-\frac{\theta_1 + \theta_2}{2} - \theta_3 \right) \quad (4)$$

$$K_{IIIA} = \frac{T}{\sqrt{\pi a}} \sqrt{\frac{a+b}{a-b}}, \quad K_{IIIB} = \frac{T}{\sqrt{\pi a}} \sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \quad (5)$$

其中 $r_1 = |z - a|$ ， $r_2 = |z + a|$ ， $r_3 = |z - b|$

$$\theta_1 = \tan^{-1} \left(\frac{y}{x-a} \right), \quad \theta_2 = \tan^{-1} \left(\frac{y}{x+a} \right), \quad \theta_3 = \tan^{-1} \left(\frac{y}{x-b} \right)$$

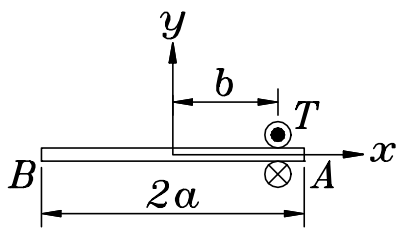


圖 1 無窮域內含有限裂縫承受一對反平面點力作用

2.2 長方板基本解

考慮一有限長方板如圖 2 所示，其上下邊界為曳力條件，左右為位移條件，其統御方程式為

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = 0 \quad (6)$$

邊界條件為

$$\begin{cases} \frac{\partial W(x, 0)}{\partial y} = 0 & 0 \leq x \leq 2a, \quad y = 0 \\ \frac{\partial W(x, 2b)}{\partial y} = 0 & 0 \leq x \leq 2a, \quad y = 2b \\ W(0, y) = 0 & x = 0, \quad 0 \leq y \leq 2b \\ W(2a, y) = \delta(y - \eta) & x = 2a, \quad 0 \leq y \leq 2b \end{cases} \quad (7)$$

依分離變數法以及上述之邊界條件可得其全場位移解析解為

$$W(x, y) = \frac{x}{4ab} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{n\pi\eta}{2b}}{b \sinh \frac{n\pi a}{b}} \cos \frac{n\pi y}{2b} \sinh \frac{n\pi x}{2b} \quad (8)$$

應力全場解為

$$\begin{aligned} \tau_{xz}(x, y) &= G \frac{\partial W}{\partial x} \\ &= \frac{G}{4ab} + G \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{2b^2} \frac{\cos \frac{n\pi\eta}{2b}}{\sinh \frac{n\pi a}{b}} \cos \frac{n\pi y}{2b} \cosh \frac{n\pi x}{2b} \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \tau_{yz}(x, y) &= G \frac{\partial W}{\partial y} \\ &= G \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-n\pi}{2b^2} \frac{\cos \frac{n\pi\eta}{2b}}{\sinh \frac{n\pi a}{b}} \sin \frac{n\pi y}{2b} \sinh \frac{n\pi x}{2b} \end{aligned} \quad (10)$$

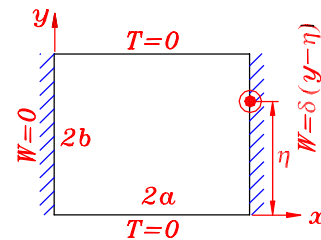


圖 2 長方板上下曳力邊界，左右位移邊界，且承受一點位移負載

同理也可得到負載點在其他三個邊界上的解析解，表 1 共整理出總共 14 種不同邊界條件之基本解析解。

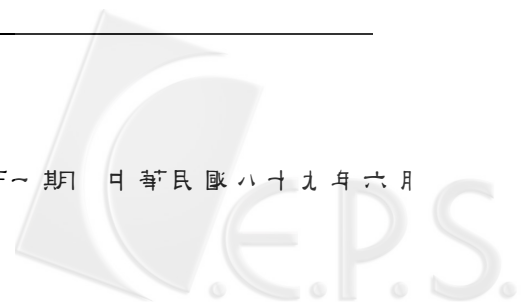
而表 1(a) ~ 3(d) 的應力 τ_{xz} 與 τ_{yz} 的全場解可經由位移 $W(x, y)$ 微分而得。假設長方板上下邊界承受 $T_U(x, 2b)$ 、 $T_D(x, 0)$ 分佈曳力負載，左右邊界承受 $W_L(0, y)$ 、 $W_R(2a, y)$ 的分佈位移負載，我們可以利用表 1(a) ~ 1(d) 四個點負載基本解，

積分之後求得長方板承受四個邊界條件同時作用下的全場解如下所示

$$S(x, y) = \int_0^{2b} [W_R(2a, \eta) S_{1a}(x, y, \eta) + W_L(0, \eta) S_{1b}(x, y, \eta)] d\eta + \int_0^{2a} [T_U(\xi, 2b) S_{1c}(x, y, \xi) + T_D(\xi, 0) S_{1d}(x, y, \xi)] d\xi \quad (11)$$

表 1 長方板基本解

	$W(x, y) = \frac{x}{4ab} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{n\pi\eta}{2b}}{b \sinh \frac{n\pi a}{b}} \cos \frac{n\pi y}{2b} \sinh \frac{n\pi x}{2b}$
	$W(x, y) = -\frac{x-2a}{4ab} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\cos \frac{n\pi\eta}{2b}}{b \sinh \frac{n\pi a}{b}} \cos \frac{n\pi y}{2b} \sinh \frac{n\pi(x-2a)}{2b}$
	$W(x, y) = \frac{1}{G} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \frac{\sin \frac{n\pi\xi}{2a}}{\sinh \frac{n\pi b}{a}} \sin \frac{n\pi x}{2a} \cosh \frac{n\pi y}{2a}$
	$W(x, y) = \frac{1}{G} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2}{n\pi} \frac{\sin \frac{n\pi\xi}{2a}}{\sinh \frac{n\pi b}{a}} \sin \frac{n\pi x}{2a} \cosh \frac{n\pi(y-2b)}{2a}$
	$W(x, y) = \frac{1}{G} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \frac{\sin \frac{n\pi\eta}{2b}}{\sinh \frac{n\pi a}{b}} \sin \frac{n\pi y}{2b} \cosh \frac{n\pi x}{2b}$
	$W(x, y) = \frac{1}{G} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2}{n\pi} \frac{\sin \frac{n\pi\eta}{2b}}{\sinh \frac{n\pi a}{b}} \sin \frac{n\pi y}{2b} \cosh \frac{n\pi(x-2a)}{2b}$
	$W(x, y) = \frac{y}{4ab} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{n\pi\xi}{2a}}{a \sinh \frac{n\pi b}{a}} \cos \frac{n\pi x}{2a} \sinh \frac{n\pi y}{2a}$



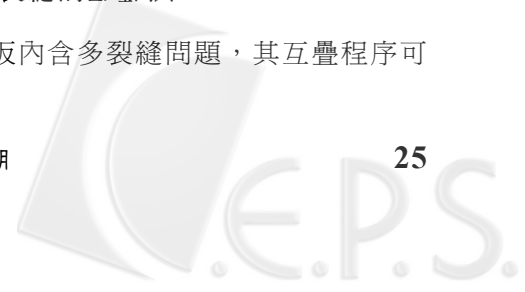
<p>2d.</p>	$W(x, y) = -\frac{y-2b}{4ab} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\cos \frac{n\pi\xi}{2a}}{a \sinh \frac{n\pi b}{a}} \cos \frac{n\pi x}{2a} \sinh \frac{n\pi(y-2b)}{2a}$
<p>3a.</p>	$W(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi\eta}{2b}}{b \sinh \frac{n\pi a}{b}} \sin \frac{n\pi y}{2b} \sinh \frac{n\pi x}{2b}$
<p>3b.</p>	$W(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\sin \frac{n\pi\eta}{2b}}{b \sinh \frac{n\pi a}{b}} \sin \frac{n\pi y}{2b} \sinh \frac{n\pi(x-2a)}{2b}$
<p>3c.</p>	$W(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi\xi}{2a}}{a \sinh \frac{n\pi b}{a}} \sin \frac{n\pi x}{2a} \sinh \frac{n\pi y}{2a}$
<p>3d.</p>	$W(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\sin \frac{n\pi\xi}{2a}}{a \sinh \frac{n\pi b}{a}} \sin \frac{n\pi x}{2a} \sinh \frac{n\pi(y-2b)}{2a}$
<p>4a.</p>	$\tau_{xz}(x, y) = \frac{1}{2b} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{n\pi\eta}{2b}}{b \sinh \frac{n\pi a}{b}} \cos \frac{n\pi y}{2b} \left[\sinh \frac{n\pi x}{2b} - (-1)^n \sinh \frac{n\pi(x-2a)}{2b} \right]$ $\tau_{yz}(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\cos \frac{n\pi\eta}{2b}}{b \sinh \frac{n\pi a}{b}} \sin \frac{n\pi y}{2b} \left[\cosh \frac{n\pi x}{2b} - (-1)^n \cosh \frac{n\pi(x-2a)}{2b} \right]$
<p>4b.</p>	$\tau_{xz}(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\cos \frac{n\pi\xi}{2a}}{a \sinh \frac{n\pi b}{a}} \sin \frac{n\pi x}{2a} \left[\cosh \frac{n\pi y}{2a} - (-1)^n \cosh \frac{n\pi(y-2b)}{2a} \right]$ $\tau_{yz}(x, y) = \frac{1}{2a} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{n\pi\xi}{2a}}{a \sinh \frac{n\pi b}{a}} \cos \frac{n\pi x}{2a} \left[\sinh \frac{n\pi y}{2a} - (-1)^n \sinh \frac{n\pi(y-2b)}{2a} \right]$

其中 $S_{1a}(x, y, \eta)$ 、 $S_{1b}(x, y, \eta)$ 、 $S_{1c}(x, y, \xi)$ 、 $S_{1d}(x, y, \xi)$ 分別代表子系統 1a、1b、1c、1d 的全場解。為了儘可能描述任意變化的邊界分佈負載，我們仍採用高斯積分，但將每一邊界分成 5 段，每段 24 高斯點作數值積分計算(11)式的全場解。

三、解析法

3.1 無窮域多裂縫的互疊法

對於有限板內含多裂縫問題，其互疊程序可



以分為兩部分，首先須考慮無窮域內含多裂縫問題的互疊，我們可以圖 3 來說明互疊的過程。假設無窮域內含 n 個裂縫，裂縫上的曳力負載為 $l_1^{(1)}, l_2^{(1)}, \dots, l_n^{(1)}$ ，欲經由互疊的過程求得全場解答，第一次互疊程序是每個裂縫單獨存在下，分別以 $l_1^{(1)}, l_2^{(1)}, \dots, l_n^{(1)}$ 為裂縫負載計算全場解，將此 n 個子系統疊加後，可發現在各裂縫的殘留應為，

$$l_i^{(2)} = \sum_{j=1, j \neq i}^n l_{ij}^{(1)} \quad (12)$$

其中 $l_{ij}^{(1)}$ 代表第 j 個裂縫作用下在第 i 個虛擬裂縫位置的殘留應為，而這些殘留應為必須在下次互疊程序中加以修正，因此 $l_i^{(2)}$ 便成為第二次互疊的裂縫負載。重複以上過程可以得到第 k 次疊加中第 i 個裂縫之曳力負載為

$$l_i^{(k)} = \sum_{j=1, j \neq i}^n l_{ij}^{(k-1)} \quad (13)$$

其中 $l_{ij}^{(k-1)}$ 代表第 $k-1$ 次疊代中由於 j 裂縫上 $l_j^{(k-1)}$ 的應為負載造成在虛擬裂縫 i 處之應為分佈。

由上述互疊過程，原本含 n 個裂縫的問題變成 n 個含單一裂縫問題的相互疊加，而每個含單一裂縫問題的裂縫負載為歷次互疊程序該裂縫負載之和，

$$l_i = \sum_{k=1}^{\infty} l_i^{(k)} \quad (14)$$

若要求第 i 個裂縫應為強度因子，只需計算無窮域內含單一裂縫受 l_i 裂縫負載下之應為強度因子即可，若要計算全場之應為、位移，則需分別計算 n 個裂縫單獨作用下承受 l_i 裂面負載時該點的應為、位移，再將 n 個裂縫對全場的貢獻疊

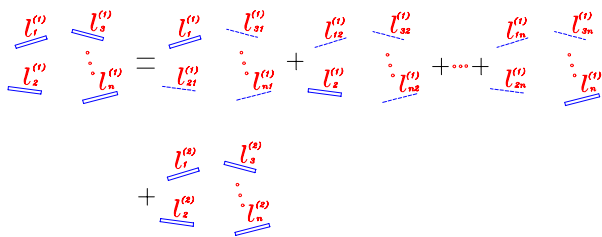


圖 3 無窮域多裂縫互疊法之示意圖

加起來，即為 n 個裂縫同時存在下受 $l_i^{(1)}$ 負載之應為、位移。

3.2 有限域多裂縫的互疊法

其次是有限域內含多裂縫問題的互疊法，我們可以圖 4 作說明，在互疊的過程中，無窮域含多裂縫的問題已討論過，我們可以算出無窮域含多裂縫問題 $l_i^{(1)}$ 負載下，在虛擬邊界上的曳力 $T_U^{(1)}, T_D^{(1)}$ 與位移 $W_R^{(1)}, W_L^{(1)}$ ，然後再以 $-T_U^{(1)}, -T_D^{(1)}, -W_R^{(1)}, -W_L^{(1)}$ 為邊界條件計算長方板在虛擬裂縫位置上的曳力值 $l_i^{(2)}$ ，這兩套答案疊加之後在裂縫位置的殘留應為 $l_i^{(k+1)}$ 必須在下一次互疊程序中來加以修正，經數次疊加之後此殘留應為逐漸收斂到一極微小值，最後將歷次互疊中的兩套子問題的解相加，即可獲得有限域內含多裂縫問題的解。

由 3.1 及 3.2 節中對互疊法的討論，我們可以歸納出有限域多裂縫問題完整的互疊程序為：

- 步驟一、輸入有限域多裂縫問題的幾何外型與邊界條件
- 步驟二、利用長方板點負載基本解，配合高斯積分計算不含裂縫長方板在虛擬裂縫位置上的曳力 $l_i^{(1)}$ 。
- 步驟三、利用無窮域單一裂縫基本解，配合無窮域多裂縫的互疊程序，計算虛擬長方板邊界上的曳力 $T_U^{(1)}, T_D^{(1)}$ 與位移 $W_R^{(1)}, W_L^{(1)}$
- 步驟四、計算第 i 個裂縫之應為強度因子

$$K_{III}^{(k)} = \int_{-a}^a \frac{l_i(\xi)}{\sqrt{\pi a} \sqrt{a+\xi} \sqrt{a-\xi}} d\xi \quad (15)$$

- 步驟五、判斷應為強度因子是否已達收斂值，判斷準則是觀察本次疊加所得之應為強度因子改變量是否小於前次所得應為強度因子之 10^{-5} 倍即

$$\frac{K_{III}^{(k)} - K_{III}^{(k-1)}}{K_{III}^{(k-1)}} < 10^{-5} \quad (16)$$

若未達收斂標準，則回到步驟二繼續互疊。

- 步驟六、若收斂，則將結果輸出並結束程式。

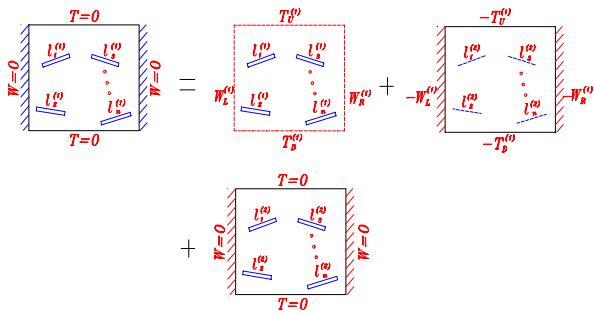


圖 4 有限域內含多裂縫互疊法之示意圖

四、數值計算

例一、長方板內含一中央裂縫

針對長方板內含中央裂縫問題，我們分別對不同邊界條件討論以下四個不同算例，例一 (a) 左右自由邊界，上下施加均佈應力 τ ，例一 (b) 左右邊界固定，上下自由邊界，施加裂縫面上均佈應力 τ ，例一 (c) 左右自由邊界，上下邊界固定，施加裂縫面上均佈應力 τ ，例一 (d) 四邊固定邊界，施加裂縫面上均佈應力 τ ，應力強度因子的結果如表 2 ~ 5 所示，表中並列出 Ma [20,21] 計算之結果以便於比較，從結果比較中可以看出本文的方法確實可行，而且擁有相當高的準確度。在這些算例中所需的互疊次數並不相同，隨著裂縫愈

接近邊界而增加，但整體而言最多僅需 12 次互疊即可達成收斂值。

本文所有無因次化應力強度因子均可表示為

$$F_{III} = \frac{K_{III}}{\tau\sqrt{\pi a}} \quad (17)$$

其中 $\tau\sqrt{\pi a}$ 代表長度 $2a$ 的裂縫在無窮域中承受裂縫上反平面均佈應力 τ 負載的應力強度因子。

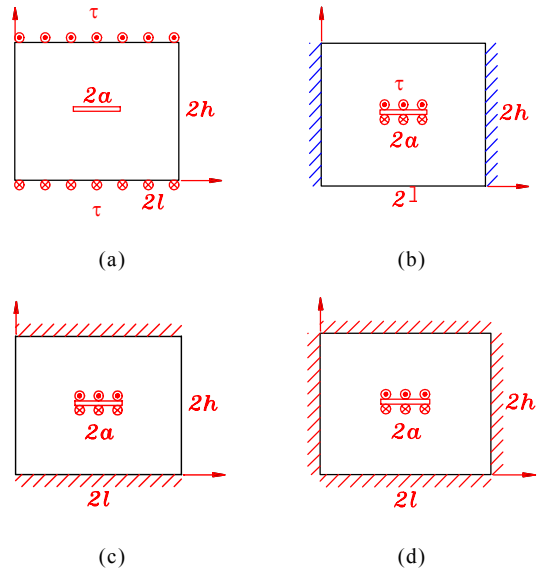


圖 5 長方板內含一中央裂縫

表 2 具中央裂紋長方板，承受上下邊界均佈剪應力負載之無因次化應力強度因子 (圖 5(a))

F_{III}	$l/a = 1.2$		1.4		1.6		2.0	
	Ma [20]	Present	Ma [20]	Present	Ma [20]	Present	Ma [20]	Present
$h/a = 0.25$	1.900	1.898	1.782	1.780	1.773	1.771	1.772	1.770
0.5	1.725	1.724	1.463	1.463	1.401	1.401	1.379	1.379
1.0	1.691	1.690	1.370	1.370	1.256	1.256	1.178	1.178
2.0	1.689	1.688	1.361	1.360	1.235	1.235	1.130	1.131
4.0	1.689	1.682	1.360	1.360	1.235	1.234	1.128	1.128

表 3 具中央裂紋長方板，與裂縫垂直兩邊界固定，承受裂縫面均佈剪應力負載之無因次化應力強度因子 (圖 5(b))

F_{III}	$l/a = 1.2$		1.4		1.6		2.0	
	Ma [21]	Present	Ma [21]	Present	Ma [21]	Present	Ma [21]	Present
$h/a = 0.25$	1.653	1.652	1.760	1.760	1.771	1.769	1.772	1.770
0.5	1.180	1.117	1.298	1.298	1.354	1.354	1.375	1.375
1.0	0.847	0.847	0.984	0.985	1.058	1.058	1.122	1.122
2.0	0.775	0.775	0.871	0.871	0.922	0.922	0.979	0.979
4.0	0.770	0.773	0.859	0.859	0.901	0.901	0.943	0.943



表 4 具中央裂紋長方板，與裂縫平行兩邊界固定，承受裂縫面均佈剪應力負載之無因次化應力強度因子 (圖 5(c))

F_{III}	$l/a = 1.2$		1.4		1.6		2.0	
	Ma [21]	Present	Ma [21]	Present	Ma [21]	Present	Ma [21]	Present
1.0	0.833	0.833	0.780	0.780	0.769	0.769	0.764	0.764
2.0	1.114	1.114	0.991	0.992	0.950	0.950	0.923	0.923
4.0	1.342	1.338	1.147	1.147	1.074	1.074	1.016	1.016

表 5 具中央裂紋長方板，四邊邊界固定，承受裂縫面均佈剪應力負載之無因次化應力強度因子 (圖 5(d))

F_{III}	$l/a = 1.2$		1.4		1.6		2.0	
	Ma [21]	Present	Ma [21]	Present	Ma [21]	Present	Ma [21]	Present
1.0	0.702	0.702	0.748	0.748	0.760	0.760	0.764	0.764
2.0	0.765	0.766	0.846	0.846	0.880	0.880	0.905	0.904
4.0	0.770	0.773	0.858	0.859	0.900	0.900	0.940	0.940

例二、正方形板含兩等長裂縫

在本例中，我們分別對不同邊界條件討論以下四個不同算例，例二 (a) 四邊自由邊界，施加裂縫面上均佈應力 τ ，例二 (b) 左右邊界固定，上下自由邊界，施加裂縫上均佈應力 τ ，例二 (c) 左右自由邊界，上下邊界固定，施加裂縫上均佈應

力 τ ，例二 (d) 四邊固定邊界，施加裂縫上均佈應力 τ 。

在本例中考慮方板邊長 $l = 4a$ ，不同 e/b 情況下探討不同裂縫距離 ($2a/r$) 下的應力強度因子，其中 $e/b = \infty$ 代表共線， $e/b = 0$ 代表並排，結果表示在圖 6 ~ 9 中。

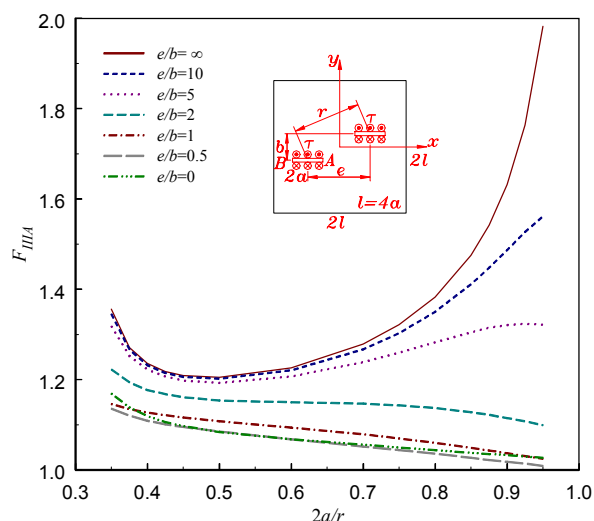


圖 6 正方形板含兩平行等長裂縫，四邊自由邊界，承受裂縫均佈剪應力 τ 負載之無因次化應力強度因子

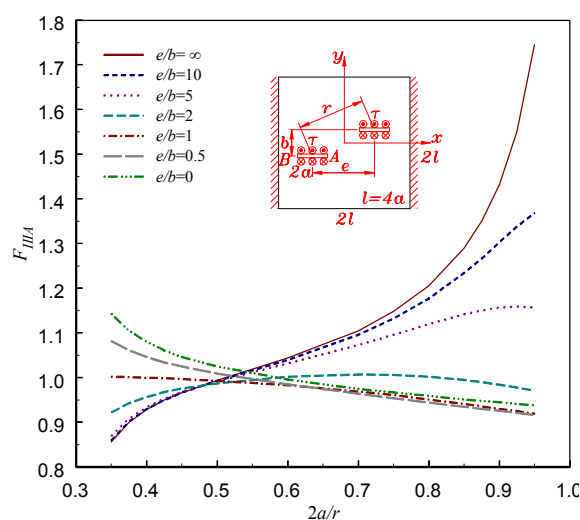
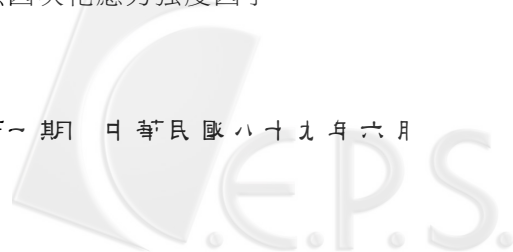


圖 7 正方形板含兩平行等長裂縫，上下自由邊界，左右邊界固定，承受裂縫均佈剪應力 τ 負載之無因次化應力強度因子



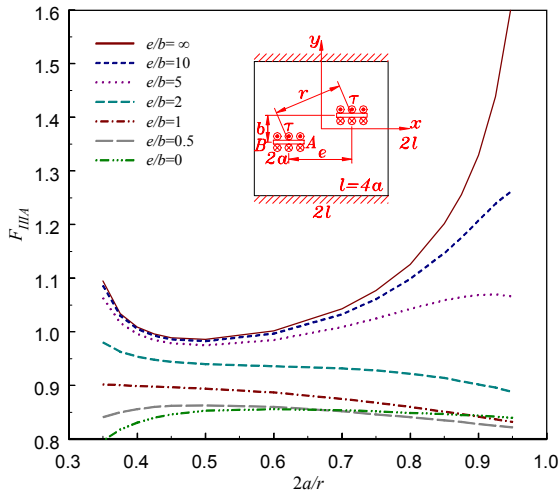


圖 8 正方形板含兩平行等長裂縫，上下邊界固定，左右自由邊界，承受裂縫均佈剪應力 τ 負載之無因次化應力強度因子

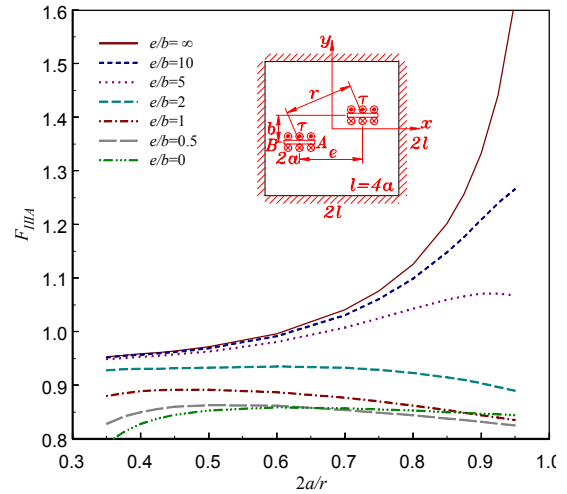


圖 9 正方形板含兩平行等長裂縫，四邊固定邊界，承受裂縫均佈剪應力 τ 負載之無因次化應力強度因子

從以上四張圖中可以觀察出一些基本特性：

1. 對相同的 $2a/r$ 而言， $e/b = \infty$ 時兩裂縫尖端最靠近，因此當兩裂縫愈接近時 ($2a/r \rightarrow 1$) 時，其 F_{III} 上昇最快。
2. 當裂縫逐漸遠離時 ($2a/r \rightarrow 0.3$)，裂縫若接近自由邊界，則 F_{III} 增加且 $F_{III} > 1$ ，如圖 6 中 $e/b = 0 \sim \infty$ 、圖 7 中 $e/b = 0$ 與圖 8 中 $e/b = \infty$ 。
3. 當裂縫逐漸遠離時 ($2a/r \rightarrow 0.3$)，裂縫若接近固定邊界，則 F_{III} 減小且 $F_{III} < 1$ ，如圖 7 中 $e/b = \infty$ 、圖 8 中 $e/b = 0$ 與圖 9 中 $e/b = 0 \sim \infty$ 。

例三、正方形板含兩等長斜角裂縫

在本例中，我們分別對不同邊界條件討論以下三個不同算例：例三 (a) 左右邊界固定，上下自由邊界，施加裂縫面上均佈應力 τ ，例三 (b) 左右自由邊界，上下邊界固定，施加裂縫面上均佈應力 τ ，例三 (c) 四邊固定邊界，施加裂縫面上均佈應力 τ 。

在本例中考慮方板邊長 $l = 4a$ ，不同傾角 β 情況下探討不同裂縫尖端距離 (d/a) 下的無因次化應力強度因子，結果表示在圖 10 ~ 12 中。

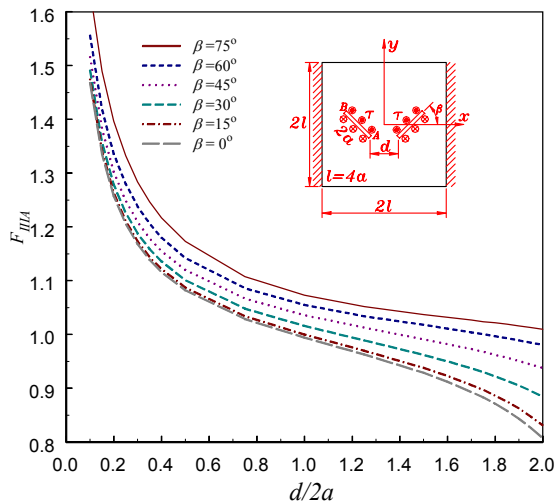


圖 10 正方形板含兩等長傾斜裂縫，上下自由邊界，左右邊界固定，承受裂縫面均佈剪應力 τ 負載之無因次化應力強度因子

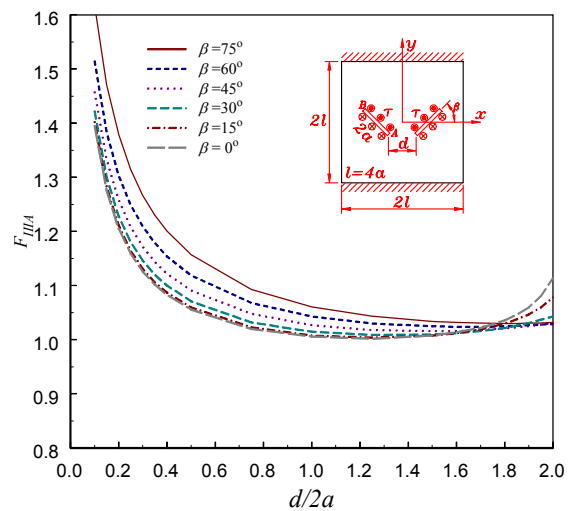


圖 11 正方形板含兩等長傾斜裂縫，上下邊界固定，左右自由邊界，承受裂縫面均佈剪應力 τ 負載之無因次化應力強度因子

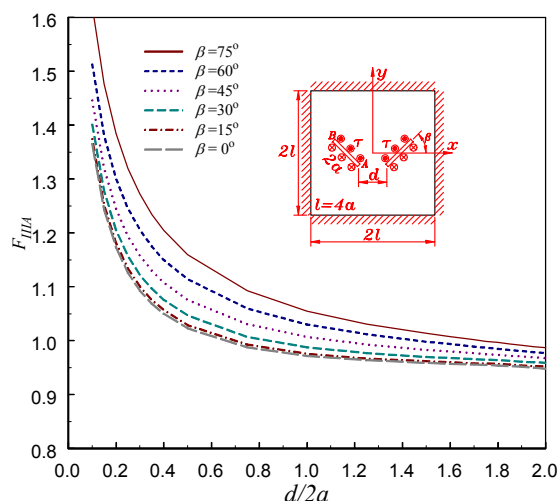


圖 12 正方形板含兩等長傾斜裂縫，四邊邊界固定，承受裂縫面均佈剪應力 τ 負載之無因次化應力強度因子

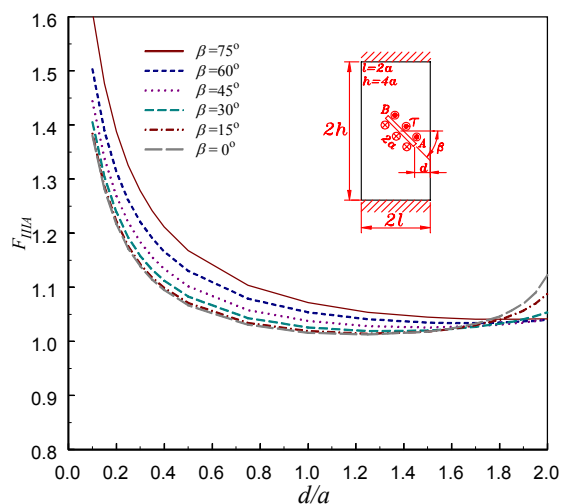


圖 13 長方板含一傾斜裂縫，上下邊界固定，左右自由邊界，承受裂縫面均佈剪應力 τ 負載之無因次化應力強度因子

從以上算例中可以觀察得知：在相同裂尖距離 (d/a) 之下，共線 ($\beta = 0$) 裂縫的應力強度因子大都比斜角裂縫小，只有在裂縫非常接近自由邊界時 (圖 11 中 $\beta = 0$) 才會比較大。可見兩個傾角裂縫較共線裂縫來得危險。

例四、長方板含一傾斜裂縫

由於例三的應力 (τ_{xz}) 具有左右對稱的性質，故在 y 軸上的 $\tau_{xz} = 0$ ，若只考慮方板的左半部，則此長方板右邊界可以自由邊界來取代，而原本雙裂縫的問題就可以簡化成單裂縫問題。

我們以例三中的圖 11 為例來驗證，只考慮左半部的情況，但是裂尖距右邊界的距離為圖 11 中兩裂尖距離之半，計算裂尖 A 之無因次化應力強度因子 $F_{III A}$ 如圖 13，與圖 11 比較的結果，兩者差異均小於 1%，可見對稱的雙裂縫問題是可以依這種方式簡化成單裂縫問題。

7、結 論

本文使用解析互疊法探討有限長平板內含多裂縫的撕裂性破壞問題，首度將解析互疊法的應用範圍擴展至有限長方板，藉由長方板邊界點載荷的基本解與多段式高斯積分建構起不含裂縫長方板任意邊界負載的全場解，取代了有限元

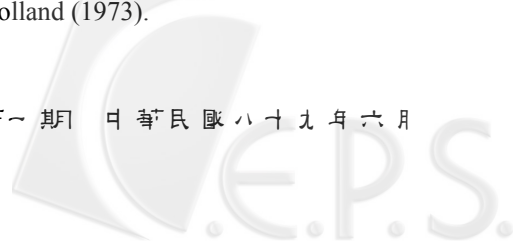
素互疊法或邊界元素互疊法中的有限元素分析與邊界元素分析，大幅降低分析方法的困難度也減少了數值計算中可能發生的誤差與計算時間。文中對於長方板含中央裂縫的計算結果經與其他學者比較獲致相當準確的結果，並且對於長方板內含多裂縫問題也探討了許多不同裂縫位置、角度與邊界條件下的應力強度因子，均可以快速獲得正確結果，由此可見，只要尋得適當的解析解，解析互疊法仍然是解決裂縫問題最簡單有效的分析方法。

誌 謝

本研究成果由國科會計畫 NSC88-2212-E002-047 補助而完成。

參考文獻

1. Kantorovich, L. V. and Krylov, V. I., *Approximate Method of Higher Analysis*, (translated by Benster, C. D.) John Wiley & Sons, Inc., New York & London (1964).
2. Hartranft, R. J. and Sih, G. C., *Method of Analysis and Solutions of Crack Problems*, Sih, G. C. ed., Noordhoff, Holland (1973).



3. Wang, L. and Atluri, S. N., "Recent Advances in the Alternating Method for Elastic and Inelastic Fracture Analysis," *Comput. Methods. Appl. Mech. Energ.*, Vol. 137, No. 1, pp. 1–58 (1996).
4. Shah, R. C. and Kobayashi, A. S., "Stress Intensity Factor for an Elliptical Crack Approaching the Surface of a Semi-Infinite Solid," *Int. J. Frac.*, Vol. 9, No. 2, pp. 133–146 (1973).
5. Vijayakumar, K. and Atluri, S. N., "An Embedded Elliptical Crack, in an Infinite Solid, Subjected to Arbitrary Crack-Face Traction," *ASME, J. Appl. Mech.*, Vol. 103, No. 1, pp. 88–96 (1981).
6. O'Donoghue, P. E., Nishioka, T. and Atluri, S. N., "Multiple Coplanar Embedded Elliptical Cracks in an Infinite Solid Subject to Arbitrary Crack Face Traction," *Int. J. Numer. Methods. Engrg.*, Vol. 21, No. 3, pp. 437–449 (1985).
7. Chen, W. -H. and Chang, C. -S., "Analysis of Multiple Cracks in an Infinite Plate Under Arbitrary Crack Surface Traction," *Ing. Arch.*, Vol. 60, No. 3, pp. 202–212 (1990).
8. Zhang, X. and Hasebe, N., "Interactions Between Rectilinear and Circumferential Cracks," *Engrg. Fract. Mech.*, Vol. 46, No. 2, pp. 311–328 (1993).
9. Chen, W. -H. and Chang, C. -S., "Analysis of Two-Dimensional Mixed-Mode Crack Problems by Finite Element Alternating Method," *Comput. Struct.*, Vol. 33, No. 6, pp. 1451–1458 (1989).
10. Krishnamurthy, T. and Raju, I. S., "Finite-Element Alternating Method for Two-Dimensional Mixed-Mode Crack Configurations," *Engrg. Fract. Mech.*, Vol. 36, No. 2, pp. 297–311 (1990).
11. Chen, W. -H. and Chang, C. -S., "Analysis of Two Dimensional Fracture Problems with Multiple Crack under Mixed Boundary Conditions," *Engrg. Fract. Mech.*, Vol. 34, No. 4, pp. 921–934 (1989).
12. Chen, K. -L. and Atluri, S. N., "Finite-Difference Alternating Method for a Cost-Effective Determination of Weight-Functions for Orthotropic Materials in Mixed-Mode Fracture," *Engrg. Fract. Mech.*, Vol. 36, No. 2, pp. 327–340 (1990).
13. Nishioka, T. and Atluri, S. N., "Analytical Solution for Embedded Elliptical Cracks, and Finite Element Alternating Method for Elliptical Surface Cracks, Subjected to Arbitrary Loadings," *Engrg. Fract. Mech.*, Vol. 17, No. 3, pp. 247–268 (1983).
14. Simon, H. L., O'Donoghue, P. E. and Atluri, S. N., "Finite-Element-Alternating Technique for Evaluating Mixed Mode Stress Intensity Factors for Part-Elliptical Surface flaws," *Int. J. Numer. Methods Engrg.*, Vol. 24, No. 4, pp. 689–709 (1987).
15. Liao, C. Y. and Atluri, S. N., "Stress Intensity Factor Variation Along a Semi-Circular Surface Flaw in a Finite-Thickness Plate," *Engrg. Fract. Mech.*, Vol. 34, No. 4, pp. 957–976 (1989).
16. Liao, C. Y. and Atluri, S. N., "Alternating Technique for Evaluating Weight Function for 3-D Surface Flaws in Finite Solid Bodies," *Int. J. Numer. Methods Engrg.*, Vol. 32, No. 6, pp. 1339–1361 (1991).
17. Rajiyah, H. and Atluri, S. N., "Evaluation of K-Factors and Weight Function for 2-D Mixed-Mode Multiple Cracks by the Boundary Element Alternating Method," *Engrg. Fract. Mech.*, Vol. 32, No. 6, pp. 911–922 (1989).
18. Chen, W. -H. and Tu, Y. -M., "Thermal Analysis for Two-Dimensional Fracture Problems Using the Boundary Element Alternating Method," *Comput. Struct.*, Vol. 50, No. 3, pp. 401–408 (1994).
19. Ting, K., Chang, K. -K. and Yang, M. -F., "Analysis of Mode-III Fracture Problem with Multiple Cracks by Boundary Element Alternating Method," *Int. J. Pres. Ves. & Piping*, Vol. 62, No. 3, pp. 259–267 (1995).
20. Ma, S. W., "A Central Crack in a Rectangular Sheet Where Its Boundary is Subjected to an Arbitrary Anti-Plane Load," *Engrg. Fract. Mech.*, Vol. 30, No. 4, pp. 435–443 (1988).
21. Ma, S.W., "A Central Crack of Mode III in a Rectangular Sheet with Fixed Edges," *Int. J. Frac.*, Vol. 39, No. 4, pp. 323–329 (1989).
22. Liu, N. and Altiero, N., "An Integral Equation Method Applied to Mode III Crack Problems," *Engrg. Fract. Mech.*, Vol. 41, No. 4, pp. 587–596 (1992).
23. Sih, G. C., "Stress Distribution Near Internal Crack Tips for Longitudinal Shear Problem," *ASME, J. Appl. Mech.*, Vol. 32, No. 1, p. 51 (1965).



**ANALYSIS OF MODE III FRACTURE
PROBLEM WITH MULTIPLE CRACKS
IN A RECTANGULAR PLATE BY
ANALYTICAL ALTERNATING
METHOD**

Chih-Yi Chang * **Chien-Ching Ma** **

*Department of Mechanical Engineering
National Taiwan University
Taipei, Taiwan 10617, R.O.C.*

ABSTRACT

An efficiently analytical alternating method is applied in this study to investigate mode III fracture problems with multiple cracks in a rectangular plate. The analytical solutions of rectangular plates subjected to anti-plane point load on boundaries are derived to construct the full-field solution of rectangular plates under arbitrary anti-plane boundary loading by Gauss integration. This non-crack solution and the analytical solution of a finite crack in an infinite domain subjected to a pair of shear point loads are referred to as fundamental solutions of the analytical alternating method. The stress intensity factors of a central crack in a finite plate with different boundary condition are compared with the analytical solutions by other researchers and excellent agreement is obtained. Several cases of multiple cracks with different crack's location/inclined angle and boundary condition are studied and discussed in detail.

Keywords: Alternating method, Stress intensity factor, Rectangular plate.

* Graduate student ** Professor

(Manuscript received Jan. 1, 1999,
Accepted for publication Mar. 24, 1999.)