

行政院國家科學委員會專題研究計畫 成果報告

基於隨機 Cantor 集表面模型的粗糙面彈塑性接觸分析

計畫類別：個別型計畫

計畫編號：NSC91-2212-E-002-041-

執行期間：91年08月01日至92年07月31日

執行單位：國立臺灣大學機械工程學系暨研究所

計畫主持人：盧中仁

計畫參與人員：蘇昱仁

報告類型：精簡報告

處理方式：本計畫可公開查詢

中 華 民 國 92 年 11 月 4 日

行政院國家科學委員會補助專題研究計畫 成果報告
 期中進度報告

基於隨機 Cantor 集表面模型的粗糙面彈塑性接觸分析

計畫類別： 個別型計畫 整合型計畫

計畫編號：91-2212-E-002-041-

執行期間：91 年 8 月 1 日 至 92 年 7 月 31 日

計畫主持人：盧中仁

共同主持人：

計畫參與人員：蘇昱仁

成果報告類型(依經費核定清單規定繳交)： 精簡報告 完整報告

本成果報告包括以下應繳交之附件：

- 赴國外出差或研習心得報告一份
- 赴大陸地區出差或研習心得報告一份
- 出席國際學術會議心得報告及發表之論文各一份
- 國際合作研究計畫國外研究報告書一份

處理方式：除產學合作研究計畫、提升產業技術及人才培育研究計畫、
列管計畫及下列情形者外，得立即公開查詢

涉及專利或其他智慧財產權， 一年 二年後可公開查詢

執行單位：國立台灣大學機械系

中 華 民 國 92 年 10 月 20 日

行政院國家科學委員會專題研究計畫成果報告

基於隨機 Cantor 集表面模型的粗糙面彈塑性接觸分析

Elastic-perfectly plastic contact analysis of rough surfaces Based on random Cantor set Models

計畫編號：91-2212-E-002-041-

執行期限：91 年 8 月 1 日至 92 年 7 月 31 日

主持人：盧中仁 台灣大學機械系

計畫參與人員：蘇昱仁 台灣大學機械系

中文摘要

在之前的計畫中 (NSC87-2212-E-002-049)，我們利用 Cantor 集建立了一個規則且具有碎形特性的表面模型，利用這個模型及彈塑性變形分析，我們成功的得到規則碎形表面和平滑剛體平面接觸時的受力和變形間的關係。本計畫推廣先前的方法研究隨機碎形面間的接觸行為。我們將規律的表面模型中固定的參數，如分岐數目、水平縮減比例、垂直縮減比例等，擴展為隨機變數；探討這些隨機變數的機率分佈對粗糙面間接觸行為的影響。

關鍵詞：碎形表面模型、隨機變數、Cantor 集，接觸力學

Abstract

In the previous project (NSC87-2212-E-002-049), we constructed a regular fractal surface model using the Cantor set. Based on this model and elastic-perfectly plastic deformation analysis, we successfully derived the load-displacement relationship for a regular fractal surface in contact with a rigid smooth surface. In this project, the method developed previously was extended to study the contact behavior of random fractal surfaces. A random Cantor set surface model was constructed first by introducing random parameters, i.e., branching number, horizontal reducing factor and vertical reducing factor. Then we analyzed the effects of

these random parameters on the load-displacement relationship.

Keywords: fractal surface model, random variable, Cantor set, contact mechanics

緣由與目的

所有的物體表面都是粗糙的而且有著呈散漫分佈的表面高度 [1]。物體的表面形態對於因兩物體相接觸而產生的摩擦、磨損、熱傳、電導等特性有著重要的影響。要研究表面形態對這些接觸特性的影響，首先必需知道如何正確的描述接觸面的表面形態。為此許多研究者提出利用隨機變數來描述表面形態的模型，並利用這些模型來研究兩接觸面間的力學行為。這其中一個重要且廣受引用的模型是由 Greenwood 和 Willianson 在 1966 年提出的 [2]，以下簡稱 G-W 模型。G-W 模型假設物體表面是由一些相同半徑、不同高度的球所組成，這些球的高度呈隨機分佈。兩物體相接觸時，每個球的變形都遵循古典的 Hertz 解；而接觸面整體的變形和外力間的關係，可由球的高度的機率分佈函數經適當的統計分析而得。這個模型成功的定性的解釋了兩接觸面間的摩擦特性。在 G-W 模型中球狀凸起的半徑是一個重要的參數。然而，在將 G-W 模型應用於真實表面時，研究的結果顯示球的半徑並不能唯一決定，

它和所用的量測工具的解析度有關。Greenwood 本人於 1984 年說明了 G-W 模型遇到的問題 [3]。這類問題並不是 G-W 模型所獨有的，事實上，所有描述物體表面的統計參數都有相同的問題：這些參數都和量測時所用的尺度有關。這個現象表示物體表面有著碎形 (fractal) 的特性。換言之，要正確的描述接觸面間的現象必需使用碎形的表面模型。

碎形的觀念最早是由 Mandelbrot 在 1967 年提出 [4]。後續的實驗顯示許多物體的表面都有碎形的特性 [5-7]，於是研究人員開始注意到碎形表面模型對處理接觸面間界面問題的重要性 [8, 9]。過去幾年來一些學者利用碎形模型探討兩粗糙面間的彈塑性接觸行為 [10-15]。Majumdar 和 Bhushan 利用 Weierstrass-Mandelbrot 函數建立具有碎形特性的表面模型並經由彈塑性分析得到接觸面間的力學行為 [10]；Borodich 和 Mosolov 用 Cantor 集建立表面模型並探討接觸面間的塑性變形行為 [11]；Warren 等人擴展了 Borodich 和 Mosolov 的結果到彈塑性變形 [12, 13]；Lu 和 Kuo 同樣的利用 Cantor 集建立表面模型，並探討彈塑性變形下表面形態對恢復係數的影響 [14]。以上這些研究在定性的解釋粗糙面間的力學行為上都得到相當程度的成功，但是它們有一個共同的缺點 - 都是基於規則的表面模型。眾所周知，真實的表面形態是不規則的，佈滿了隨機分佈大小不同的凸起，所謂的碎形實際上指的是局部的表面經過適當的放大後和整體具有相同的統計上的特性，亦即 self-affine 而非 self-similar。因此基於 Cantor 集

或 Weierstrass-Mandelbrot 函數所建構的 self-similar 表面模型是否適用於真實的粗糙面，需要進一步的檢驗。

Warren 和 Krajcinovic 首先嘗試將隨機的 Cantor 集表面模型應用於粗糙面的力學行為分析 [15]。但是他們只討論碎形維度的期望值和 Cantor 集參數期望值間的關係，接著直接將碎形維度的期望值代入之前對規律 Cantor 集表面模型得到的結果中，並沒有分析隨機的 Cantor 集模型下受力的期望值、標準差和碎形參數間的關係。本計劃首先建立一般化的隨機 Cantor 集表面模型，將水平縮減比例、垂直縮減比例都視為隨機變數，由此探討表面模型參數的機率分佈對粗糙面間接觸力學行為的影響，利用 Monte-Carlo 法驗證所得的結果，並和之前基於規則表面模型的研究結果相比較。

研究方法

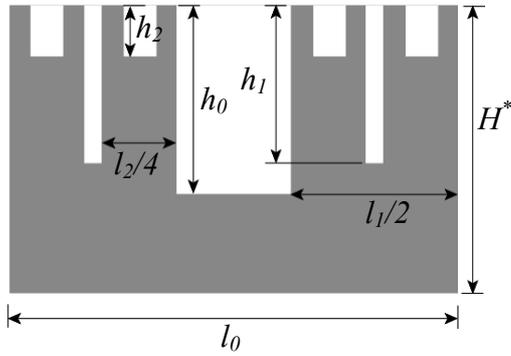
前人的研究顯示兩粗糙面相接觸的問題經由適當的轉換後等價於一個粗糙面和一平滑剛體相接觸的問題 [1]。因此我們先研究一個具碎形特徵的粗糙面和一固定平滑剛體相接觸時受力和位移間的關係。

首先應用 Cantor 集建立描述粗糙面的碎形模型。利用規則的 Cantor 集建立表面模型的過程如下：先決定分歧數目 s ，水平縮減比例 f_x 、垂直縮減比例 f_z 。在第 n 個階段時，共有 s^n 個最高的凸起，其水平總長度為 l_n ，每個凸起的水平長度為 (l_n / s^n) ；相鄰的兩個最高凸起間有一凹陷，其深度為 h_n 。在第 $(n+1)$ 個階段時，將第 n 個階段中每個最高凸起分為 $(2s-1)$ 段，將

其中 $s-1$ 段下移 $h_{n+1} = h_n / f_z$ 。同時使得第 $(n+1)$ 個階段中最高凸起的總長度 $l_{n+1} = l_n / f_x$ 。重覆這個過程可以得到規律的 Cantor 集表面模型。圖一所示為 $s=2$ 時的 Cantor 集表面模型。



圖一、規律 Cantor 集表面模型($s=2$)



圖二、隨機 Cantor 集表面模型($s=2$)

Cantor 集的碎形維度 (fractal dimension) 由分歧數目 s 、水平縮減比例 f_x 、垂直縮減比例 f_z 而定 [13]。將這些參數視為獨立的隨機變數，即可建構具 self-affine 特性的粗糙表面。這樣的表面模型能夠更正確的描述真實的粗糙表面 (參考圖二)。

在討論粗糙面的變形時可將物體表面視為由許多大小、高度不等的獨立柱體所組成，亦即各個凸起間的相互作用是可忽略的。在這個假設下可以求得粗糙面受力和位移間的關係；再經由適當的統計分析可以得到各個隨機變數對受力和變形間關係的影

響；另外，利用 Monte-Carlo 法模擬隨機 Cantor 表面模型和平滑剛體平面接觸時受力和位移間的關係，以驗證之前所得的結果。

結果與討論

首先建立接觸面、位移和表面模型參數間的關係。接觸面積和分歧數目 s 和水平縮減比例 f_x 的乘積有關，所以這裏令 $s=2$ ，將 f_x 、 f_z 視為隨機變數。為了便於討論令 $x=1/f_x$ ， $z=1/f_z$ 。第 n 層的柱體高度為

$$h_n = \left(\prod_{i=1}^n z_i \right) h_0 \quad (1)$$

第 n 層的水平長度 (參考圖二) 為

$$l_n = \left(\prod_{i=1}^n x_i \right) l_0 \quad (2)$$

第 n 層的總面積為

$$S_i = l_i - l_{i+1}, \quad i < N \quad (3)$$

當剛體面和第 n 層柱體相接觸時，

$$u = h_n$$

此時 $i > n$ 的柱體有變形，假設

$$h_n \ll H^*,$$

則應變可表為

$$\varepsilon_i = \frac{u - h_i}{H^* - h_i} = \frac{h_n - h_i}{H^*} \quad (4)$$

有塑性變形時，存在一臨界層 n_c ，($n_c > n$)，使得 $i > n_c$ 層的柱體為塑性變形，而 $i \leq n_c$ 為彈性變形。所以當剛體層和第 n 層相接觸時的總力為

$$P = \sum_{i=1}^{n_c} ES_i \varepsilon_i + \sum_{i=n_c+1}^N \sigma_y S_i, \quad (5)$$

其中 σ_y 為降伏強度。式(1)~(4)代入(5)

得到

$$P = \frac{E}{H^*} \left[h_n (l_{n+1} - l_{n_c+1}) \right] - \frac{E}{H^*} \sum_{n+1}^{n_c} h_i S_i + \sigma_y l_{n_c+1} \quad (6)$$

先考慮完全彈性變形時的情形，上式可表為

$$P = \frac{E}{H^*} \left[h_n l_{n+1} - \sum_{i=n+1}^{N-1} h_i (l_i - l_{i+1}) \right] \quad (7)$$

假設 f_x 、 f_z 為獨立，則 h_i 、 l_i 為獨立，由式(7)可得總力 P 的平均值(期望值) $\mathbf{E}(P)$ 為：

$$\mathbf{E}(P) = \frac{E}{H^*} [\mathbf{E}(h_n)\mathbf{E}(l_{n+1}) - \sum_{i=n+1}^{N-1} \mathbf{E}(h_i)\mathbf{E}(l_i) + \sum_{i=n+1}^{N-1} \mathbf{E}(h_i)\mathbf{E}(l_{i+1})] \quad (8)$$

其中

$$\mathbf{E}(h_n) = \mathbf{E} \left[\left(\prod_{i=1}^n z_i \right) h_0 \right] = h_0 \prod_{i=1}^n \mathbf{E}(z_i) = h_0 \bar{z}^n$$

同理

$$\mathbf{E}(l_i) = \bar{x}^i l_0, \quad \mathbf{E}(h_i) = \bar{z}^i h_0,$$

則式(8)可化簡為

$$\mathbf{E}(P) = \frac{E}{H^*} h_0 l_0 [\bar{x} \bar{\beta}_1^n - (1 - \bar{x}) \frac{\bar{\beta}_1^{n+1} - \bar{\beta}_1^N}{1 - \bar{\beta}_1}] \quad (9)$$

其中 $\bar{\beta}_1 = \bar{x} \bar{z}$ 。式(9)和之前對規律 Cantor 集所得的結果相同。

接著求接觸力的 2nd moment，

$$\mathbf{E}(P^2) = \left(\frac{E}{H^*} \right)^2 \left\{ \mathbf{E}(h_n^2 l_{n+1}^2) - 2 \mathbf{E} \left(h_n l_{n+1} \sum_{i=n+1}^{N-1} h_i S_i \right) + \mathbf{E} \left[\left(\sum_{i=n+1}^{N-1} h_i S_i \right)^2 \right] \right\}$$

利用之前相同的步驟可將上式表為：

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(P^2) &= \left(\frac{E h_0 l_0}{H^*} \right)^2 \{ \bar{x}_2 \bar{\beta}_2^n \\ &- \frac{2 \bar{\beta}_2^n \bar{x}_2}{1 - \bar{\beta}_1} [(1 - \bar{\beta}_1^{N-n+1}) \bar{z} - \bar{\beta}_1 + \bar{\beta}_1^{N-n}] \\ &+ (1 - 2\bar{x} + \bar{x}_2) \frac{\bar{\beta}_2^{n+1} - \bar{\beta}_2^N}{1 - \bar{\beta}_2} \\ &+ \frac{2(1 - \bar{x} + \bar{x}_2 - \bar{x}_2 / \bar{x})}{1 - \bar{\beta}_1} \times \\ &\left\{ \frac{\bar{\beta}_1 (\bar{\beta}_2^{n+1} - \bar{\beta}_2^{N-1})}{1 - \bar{\beta}_2} - \frac{\bar{\beta}_1^N \left[\left(\frac{\bar{\beta}_2}{\bar{\beta}_1} \right)^{n+1} - \left(\frac{\bar{\beta}_2}{\bar{\beta}_1} \right)^{N-1} \right]}{\bar{\beta}_2 / \bar{\beta}_1} \right\} \\ &+ 2(\bar{z} \bar{\beta}_2 - \bar{x}_2 \bar{\beta}_1 / \bar{x}) \frac{\bar{\beta}_2^{n+1} - \bar{\beta}_2^{N-1}}{1 - \bar{\beta}_2} \} \end{aligned} \quad (10)$$

其中

$$\bar{x}_2 = \mathbf{E}(x^2), \quad \bar{z}_2 = \mathbf{E}(z^2), \quad \bar{\beta}_2 = \bar{x}_2 \bar{z}_2.$$

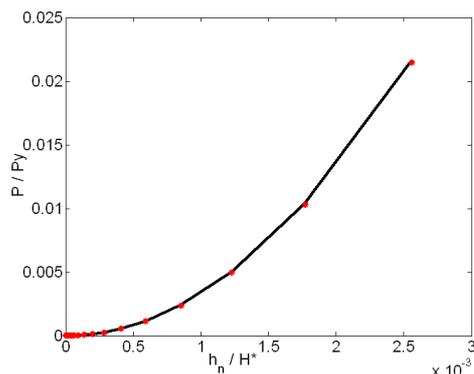
利用式(9)、(10)我們可以求出接觸力的平均值、標準差和 Cantor 集的參數的平均值、標準差之間的關係，由此可以估計接觸力的範圍。

接著利用 Monte-Carlo 法驗證式(9)、(10)。假設 Cantor 集參數 f_x 、 f_z 的機率分佈函數均為在區間(1,2)的均勻分佈。此時，

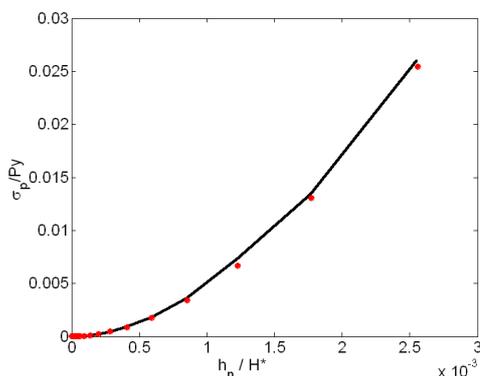
$$\bar{x} = \bar{z} = \ln 2, \quad \bar{x}_2 = \bar{z}_2 = 1/2.$$

隨機產生 10000 個 40 層的 Cantor 表面模型 ($N = 40$)，對每個表面模型可以明確求得給定位移下的接觸力，計算這些接觸力的平均值和標準差和式(9)、(10)的結果相比較。圖三、四分別為接觸力的平均值和標準差隨位移變化的情形，縱軸的 $P_y = \sigma_y l_0$ ，代表完全塑性變形時所需的力。實線代表式(9)、(10)所得的結果，實點代表 Monte-

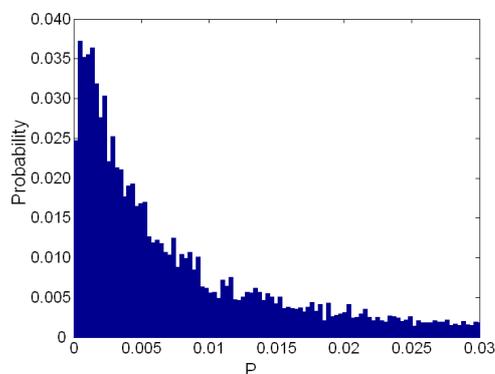
Carlo 模擬所得的結果。兩者相當吻合。圖五顯示的是 $u = h_{30}$ 時的接觸力的機率分佈函數。由圖可知，當 f_x 、 f_z 為均勻分佈時，接觸力的分佈非常廣而且不均勻， P 為 0.002 時機率最高，大部分的接觸力小於 0.015。這個不均勻的機率分佈使得接觸力的標準差相當大，和平均值的大小相當。



圖三、接觸力平均值和位移的關係



圖四、接觸力標準差和位移的關係



圖五、接觸力機率分佈圖

我們成功的利用隨機的 Cantor 表

面模型分析接觸面間的彈性行為，在指定位移的條件下得到接觸力的平均值、標準差和碎形參數間的關係。但分析塑性變形和推導高階的 moment 時則遭到相當的困難，有待進一步克服。

參考文獻

- [1] F. F. Ling, 1958, "On asperity distributions of metallic surface," *Journal of Applied Physics*, Vol. 29, pp. 1168-1174.
- [2] J. A. Greenwood and J. B. P. Williamson, 1966, "Contact of nominally flat surfaces," *Proc. Roy. Soc. Lond.*, Vol. A295, pp. 300-319.
- [3] J. A. Greenwood, 1984, "A unified theory of surface roughness," *Proc. Roy. Soc. Lond.*, Vol. A393, pp. 133-157.
- [4] B. B. Mandelbrot, 1967, "How long is the coast of Britain? Statistical selfsimilarity and fractional dimension," *Science*, Vol. 156, pp. 636-638.
- [5] David Avnir, Dina Farin and Peter Pfeifer, 1984, "Molecular fractal surfaces," *Nature*, Vol. 308, No. 15, pp. 261-263.
- [6] S. R. Brown and C. H. Scholz, 1985, "Closure of random elastic surfaces in contact," *Journal of Geophysical Research*, Vol. 90, No. B7, pp.

- 5531-5545.
- [7] Paul Meakin, "Fractal scaling in thin film condensation and material surfaces," in *CRC Critical Reviews in Solid State and Materials Science*, Vol. 13, Issue 2, pp. 143-189.
- [8] F. F. Ling, 1989, "The possible role of fractal geometry in tribology," *STLE Tribology Transactions*, Vol. 32, pp. 497-505.
- [9] A. Majumdar and B. Bhushan, 1990, "Role of fractal geometry in roughness characterization and contact mechanics of surfaces," *ASME Journal of Tribology*, Vol. 112, pp. 205-216.
- [10] A. Majumdar and B. Bhushan, 1991, "Fractal model of elastic-plastic contact between rough surfaces," *ASME Journal of Tribology*, Vol. 113, pp. 1-11.
- [11] F. M. Borodich and A. B. Mosolov, 1992, "Fractal roughness in contact problems," *J. Appl. Maths. Mechs.*, Vol. 56, No. 5, pp. 681-690.
- [12] T. L. Warren and D. Krajcinovic, 1995, "Fractal models of elastic-perfectly plastic contact of rough surfaces based on the cantor set," *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 32, No. 19, pp. 2907-2992.
- [13] T. L. Warren, A. Majumdar and D. Krajcinovic, 1996, "A fractal model for the rigid-perfectly plastic contact of rough surfaces," *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 63, pp. 47-54.
- [14] C.-J. Lu and M.-C. Kuo, 2001, "Coefficients of restitution based on a fractal surface model," 2003, *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 70, pp. 339-345.
- [15] T. L. Warren and D. Krajcinovic, 1996, "Random Cantor set models for the elastic-perfectly plastic contact of rough surfaces," *Wear*, Vol. 196, pp. 1-15.