

# 行政院國家科學委員會專題研究計畫 成果報告

## 符合航空品保理念之疲勞裂縫成長可靠度分析(3/3)

計畫類別：個別型計畫

計畫編號：NSC91-2212-E-002-070-

執行期間：91年08月01日至92年07月31日

執行單位：國立臺灣大學機械工程學系暨研究所

計畫主持人：吳文方

計畫參與人員：鄭子議、許建民

報告類型：完整報告

處理方式：本計畫可公開查詢

中 華 民 國 92 年 10 月 13 日

# 行政院國家科學委員會補助專題研究計畫成果 報告

## 符合航空品保理念之疲勞裂縫成長可靠度分析

(3/3)

計畫類別： 個別型計畫          整合型計畫

計畫編號：NSC 91-2212-E-002-070

執行期間： 91年 08月 01日至 92年 07月 31日

計畫主持人：吳文方

共同主持人：

計畫參與人員：鄭子議、許建民

本成果報告包括以下應繳交之附件：

赴國外出差或研習心得報告一份

赴大陸地區出差或研習心得報告一份

出席國際學術會議心得報告及發表之論文各一份

國際合作研究計畫國外研究報告書一份

執行單位：國立台灣大學機械工程學研究所

中 華 民 國 92 年 10 月 10 日

# 行政院國家科學委員會專題研究計畫成果報告

符合航空品質理念之疲勞裂縫成長可靠度分析(3/3)

## Reliability Analysis of Fatigue Crack Propagation in Compliance with Aeronautical Quality Assurance (3/3)

計畫編號：NSC 91-2212-E-002-070 (第三年)

執行期限：89年8月1日至92年7月31日

主持人：吳文方 國立台灣大學機械工程學系

計畫參與人員：鄭子議、許建民 國立台灣大學機械工程學系

### 一、中文摘要

我們常配合統計學上的方法來描述金屬疲勞裂縫成長行為的隨機性，例如利用各種機率分佈函數來嵌合疲勞裂縫成長參數的分佈，並透過各種測試方法來判斷這些嵌合函數的優劣，然後將最佳嵌合函數視為參數的近似分佈。然而針對不同的實驗數據我們卻可能會得到不同的最佳嵌合函數，為了避免這種狀況發生，本研究改採兩種重新抽樣概念：Bootstrap 與 Jackknife 來求得裂縫成長參數的機率分佈，進而應用於疲勞裂縫成長模擬與可靠度分析。

關鍵詞：金屬疲勞裂縫成長、隨機、可靠度分析、重新抽樣

### Abstract

Considering the randomness of fatigue crack growth of metals, some researchers proposed to describe the crack growth curves by statistical methods. For example, one can fit parameters describing the fatigue crack growth rate by certain kinds of probability distributions. The best-fitted distribution

functions can be determined through statistical tests. However, the following two problems remained. First, even the best-fitted function is not enough to describe the real fatigue crack growth result. Secondly, different best-fitted functions may be derived for different experiment data sets. To resolve these problems, two kinds of statistical resampling methods are employed in this study in order to find more exact probability distributions of these random parameters.

**Keywords:** Stochastic Fatigue Crack Propagation Model, Reliability Analysis, Resampling Method.

### 二、緣由與目的

在進行疲勞裂縫成長行為的分析工作時，我們可以利用機率分佈函數來嵌合疲勞裂縫成長參數的分佈，但在嵌合的過程中我們僅能被動地一一比較各種分佈的好壞，並且判斷主要是哪個統計量主導了分佈的型態。例如當我們發現用常態分佈最能夠嵌合裂縫參數分佈時，我們即主觀地認定了平均值和標準差的重要性，只有這兩個統計量會影響參數分佈的型態，可能

因此而忽略了其他統計量對於分佈型態的影響，導致嵌合的程度受到影響。為了避免所得最佳的嵌合函數所導出的分析結果仍不如預期，本研究不再利用機率函數來嵌合參數分佈，而改用以下兩種重新抽樣方法來獲得逼近實際現象的參數分佈：Bootstrap 法 ( Bootstrap Method ) [1-4]與 Jackknife 法 ( Jackknife Method ) [1-6]。事實上 Bigerelle 與 Iost [7]即曾利用 Bootstrap 法中的兩種迴歸方法：Bootstrap Residuals LSE 與 Bootstrap Paired LSE，針對文獻[8]所進行之 2124-T351 鋁合金等振幅疲勞拉伸實驗數據，找出 Paris 法則的裂縫成長參數。他們主要係針對各數據點對迴歸直線之留數(residue)進行重新抽樣，而為了讓重新抽樣的過程具有更直觀的意義，本研究直接針對數據點進行重新抽樣以獲得疲勞裂縫成長參數的近似分佈，同時利用 Yang & Manning 法則來描述裂縫成長的行為，使整個分析流程能廣泛地應用於等振幅與隨機振幅荷重之疲勞拉伸實驗。由於利用重新抽樣法獲得近似參數分佈的過程中，我們並未假設參數分佈的型態，因此能夠期待透過較少的假設來模擬出更接近真實狀況的疲勞裂縫成長行為，包括特定週期數下的裂縫長度分佈與特定裂縫長度下的週期數分佈。

### 三、結果與討論

我們採用前一年度之鋁合金疲勞拉伸實驗數據進行一系列疲勞裂縫成長行為的分析工作，該實驗數據包括：一、隨機振幅荷重疲勞拉伸實驗，共 25 片試片；二、等振幅荷重疲勞拉伸實驗，共 10 片試片。實驗用之 CT 試片材料為 2024-T351 鋁合金，進行預裂時採用平均值 5,000 N、振幅 2,000 N、頻率 15 Hz 之正弦函數荷重。其中隨機振幅荷重的大小由一窄帶隨機訊號決定，採用之隨機訊號亂度因子 ( Irregular Factor ) 大小為 0.88，產生之隨機荷重平均值大小為 5,000 N，振幅的平均值為 1,118 N。等振幅荷重實驗部分則採用平均值大小 5,000 N，振幅 1,118 N 之正弦函數荷重。

本年度我們仍利用 Yang & Manning 法則[9-11]計算疲勞裂縫成長過程中各週期的疲勞裂縫成長速度，而 Yang & Manning

法則中的兩個裂縫成長參數分佈則藉由重新抽樣法獲得，最後再配用逐週次法以電腦進行疲勞裂縫成長行為的模擬。

Yang & Manning 將 Paris 法則改寫如下：

$$\frac{da(t)}{dt} = Q(t)[a(t)]^{b(t)} \quad (1)$$

此式即為 Yang & Manning 法則，其中  $t$  為時間，在本文中  $t$  將以一個週期為單位。Yang 指出  $b(t)$ 、 $Q(t)$  應分別為一隨機程序，因此我們將此式改寫如下：

$$\left(\frac{da}{dN}\right)_i = Q_i a_i^{b_i} \quad (2)$$

$$\ln\left[\left(\frac{da}{dN}\right)_i\right] = b_i \ln a_i + \ln Q_i \quad (3)$$

其中  $a_i$  為第  $i$  週期之裂縫長度， $(da/dN)_i$  為第  $i$  週期初之裂縫成長速度， $b_i$ 、 $Q_i$  為第  $i$  週期之裂縫成長參數。將隨機振幅荷重試片的  $(a, da/dN)$  數據同取 Log 值後  $\ln a$  與  $\ln (da/dN)$  將呈現如圖一中間區域的線性關係，該迴歸直線的斜率即為 Yang & Manning 法則中的裂縫成長參數  $b$ ， $y$  軸截距則為另一裂縫成長參數  $\ln Q$ 。而為了更準確的評估此線性區的裂縫成長特性，我們採用裂縫長度不超過 28 mm 之實驗數據，捨去圖一中非線性區域的數據點。

由現有的 25 片試片實驗數據共可迴歸出 25 組  $(b, \ln Q)$ ，去年我們由這 25 組  $(b, \ln Q)$  嵌合出了以機率函數表示的參數分佈，今年我們則改透過重新抽樣法來獲得超過 25 組的大量  $(b, \ln Q)$ 。我們視單一試片實驗數據中所有的  $(a, da/dN)$  數據點為樣本空間，各  $(a, da/dN)$  數據點則為一組數據樣本，利用兩種重新抽樣概念：Bootstrap 與 Jackknife 取得新樣本空間後，再利用線性迴歸獲得一組額外的  $(b, \ln Q)$ ，一再重複此過程直到獲得足夠組數的裂縫成長參數  $(b, \ln Q)$  後，依大小分組繪製長條圖來觀察參數分佈的型態。

25 片隨機振幅荷重試片之實驗數據在利用 Bootstrap 法抽樣的過程中，我們假設任一試片的重要性均相同，同時該試片中各數據樣本  $(a, da/dN)$  被抽出的機率亦相同，Bootstrap 重新抽樣的過程如下：

1. 隨機選取 25 片試片的其中一片，各試片被選取機率均為  $1/25$ 。

2. 第  $i$  片試片被選取後，若該試片具有  $n_{bi}$  組  $(a, da/dN)$  數據樣本，則以這些數據為樣本空間，用  $1/n_{bi}$  的機率在樣本空間中隨機、重複抽出數據樣本共  $n_{bi}$  次，使所得新樣本空間的樣本數與原樣本空間的樣本數相同。我們把此步驟稱之為重複抽樣過程，重複抽樣次數則為  $n_{bi}$  次。
3. 求得新樣本空間中  $n_{bi}$  組  $(a, da/dN)$  數據點的迴歸直線，迴歸斜率即為裂縫成長參數  $b$ ， $y$  軸截距即為  $\ln Q$ 。
4. 這裡我們將把步驟 1 至步驟 3 稱之為重新抽樣過程。重新抽樣多次直到獲得足夠數量之  $(b, \ln Q)$  後，將  $b$  與  $\ln Q$  依大小分組繪製成長條圖，我們可將此長條圖視為參數  $b$  與  $\ln Q$  之近似分佈。

若 Bootstrap 重新抽樣的次數太少，則每次重新抽樣所獲得的長條圖將有或多或少的差異，但顯然母體的參數分佈並不會變動。隨著重新抽樣的次數增加到十萬次，所獲得的長條圖外觀已無明顯變化，這才符合我們想像中母體唯一的參數分佈，因此我們可將此長條圖視為母體參數的近似分佈，同時也可以斷定重新抽樣次數設定在十萬次是恰當且足夠的，過多的重新抽樣次數將徒增電腦處理時間。圖二為 Bootstrap 重新抽樣十萬次後，將十萬組  $b$  由最大至最小等距分為 20 組所繪製的長條圖，我們將之視為母體參數  $b$  的近似分佈。圖中列出以下各數值以供觀察與去年所得數據之異同，包括：

1. 十萬組  $b$  的平均值；
2. 由 25 片試片所分別迴歸出 25 個  $b$  值之平均值；
3. 重新抽樣法所得十萬組  $b$  值標準差；
4.  $b$  值最多之區間的  $b$  值組數。

圖三即為 Bootstrap 法重新抽樣十萬次所獲得的  $\ln Q$  長條圖分組，如前所述，我們將之視為  $\ln Q$  的近似分佈。

在利用重新抽樣法獲得疲勞裂縫成長參數的近似分佈後，我們還必須決定該視此參數分佈為隨機程序亦或是隨機變數較合適。Yang 指出式(1)中疲勞裂縫成長參數應為隨機程序，但此處我們獲得疲勞裂縫成長參數分佈的方法有別於以往，因此有必要重新檢討利用重新抽樣法求得的參數

分佈應視為隨機程序或者是隨機變數。若為隨機程序，則式(2)中兩參數在各個週期間隨機變動；若為隨機變數，則此二參數在各次模擬前選定後即不再變動。

由以上兩種假設我們預先利用逐週次法進行了各 30 次的模擬，前者隨機程序的假設得到了如圖四極相似的 30 條模擬曲線，後者隨機變數的假設則可模擬得到如圖五、與實驗結果較相似的模擬曲線，因此本研究中視重新抽樣法所得的參數  $b$ 、 $\ln Q$  為隨機變數，進行疲勞裂縫成長模擬前由母體參數近似分佈中隨機選定後即不再變動。而由於重新抽樣法所得的各組  $(b, \ln Q)$  中  $b$  和  $\ln Q$  具有相當接近-1 的相關係數(圖六)，因此在決定疲勞裂縫成長參數時，我們將由重新抽樣所得的十萬組  $(b, \ln Q)$  中直接隨機選取一組  $(b, \ln Q)$ ，而非由  $b$  和  $\ln Q$  的參數分佈中分別隨機選取，也就是說當  $b$  值被選出後  $Q$  值將跟著被決定。

參數決定後接著我們便可以套用 Yang & Manning 法則決定各週期下的疲勞裂縫成長速度，利用逐週次法模擬裂縫成長，直到裂縫長度達到設定的上限 28 mm 為止。我們在十萬組  $(b, \ln Q)$  中隨機選取 30 組進行 30 次裂縫成長模擬，所得的 30 條裂縫成長曲線即如圖五所示，這 30 條模擬曲線的裂縫成長行為與分佈範圍與實驗結果大致符合，較值得注意的是出現了數條成長速度異常迅速的模擬曲線。接著我們再進行 1,000 次模擬，並直接以模擬結果計算出第 30,000、60,000 與 90,000 週期時的裂縫長度機率分佈與累積分佈，所得結果如圖七、圖八所示；裂縫長度為 21 mm、24 mm 與 27 mm 時的週期數機率分佈、累積分佈則如圖九、圖十所示。其中圖八的裂縫長度累積分佈由於受到部分成長異常迅速的模擬曲線影響，所以在末端與實驗數據出現了 0.05~0.1 的誤差，其餘模擬所得之可靠度分析結果皆與實驗數據大致相符，因此我們可以斷定 Bootstrap 法重新抽樣十萬次所獲得的裂縫成長參數分佈與母體參數分佈具有一定程度的相似，且將圖二與圖三視為母體參數的近似分佈是十分合理且可靠的。另外值得注意的是圖十的週期數累積分佈，我們預期一個無特殊缺陷的鋁合金試片應該會呈現出較平滑的機率分佈，不過由 25 片試片實驗數據計算出

來的結果並非如此，模擬所得的結果反而較實驗數據來得平滑，更符合我們對鋁合金試片裂縫成長行為的預期。

接著我們改以 Jackknife 法進行重新抽樣以獲得參數近似分佈，過程則如下：

1. 二十五片試片中依序選取一片試片。
2. 若第  $i$  片試片有  $n_{ji}$  組  $(a, da/dN)$  數據樣本，則捨棄某組數據樣本後，剩餘之  $n_{ji} - 1$  組數據樣本可視為一個新樣本空間。因此第  $i$  片試片捨棄第一組  $(a, da/dN)$  數據樣本後可獲得一個新樣本空間同時迴歸出一組  $(b, \ln Q)$ ，完成了一次 Jackknife 重新抽樣。接著改捨棄第二組  $(a, da/dN)$  數據，又可獲得一個新樣本空間及一組  $(b, \ln Q)$ 。依此類推則具有  $n_{ji}$  組數據樣本的第  $i$  試片可進行  $n_{ji}$  次 Jackknife 重新抽樣。
3. 由於此處 25 組試片僅能提供 1,783 組數據樣本，最多只能進行 1,783 次 Jackknife 重新抽樣，獲得 1,783 組疲勞裂縫成長參數  $b$  和  $\ln Q$ 。

Jackknife 重新抽樣的次數由實驗數據中  $(a, da/dN)$  數據數量所決定，25 片試片共包含 1,783 組  $(a, da/dN)$  數據樣本，因此 Jackknife 法僅能重新抽樣 1,783 次，獲得 1,783 組  $b, \ln Q$ ，所得近似參數分佈分別如圖十一、圖十二所示。模擬裂縫成長 30 次的結果如圖十三所示，模擬 1,000 次所得 30,000、60,000 與 90,000 週期時的裂縫長度機率分佈、累積分佈如圖十四、圖十五所示，而裂縫長度為 21 mm、24 mm 與 27 mm 時的週期數機率分佈、累積分佈則如圖十六、圖十七所示。這裡我們經由 Jackknife 法所求得的機率分佈幾乎貼著實驗所得之數據改變，僅重新抽樣 1,783 次便能獲得這樣子的模擬結果十分具有效率。但畢竟數據樣本有限，在這裡經由 Jackknife 法抽樣所得，十分不規則的參數分佈實在很難說服我們這就是母體參數分佈的型態。

受限於實驗數據組數的關係，我們在隨機振幅荷重試片的數據分析中採用 Jackknife 法只能得到較參差不齊的近似參數分佈，反觀 Bootstrap 法重新抽樣可以幾乎無限制地獲得大量參數評估值，獲得較平滑且對稱的參數分佈，與我們所預期的母體分佈具有相似特徵，因此接著上一年

度另 10 片等振幅荷重試片之實驗數據分析，我們也將使用 Bootstrap 法進行重新抽樣，以驗證此分析流程於等振幅荷重下依然適用。Bootstrap 重新抽樣十萬次所獲得的疲勞裂縫成長參數  $b, \ln Q$  之近似分佈如圖十八、圖十九所示，模擬裂縫成長 30 次所獲得的裂縫成長曲線則如圖二十所示。接著模擬 1,000 次所得特定週期數下的裂縫長度累積分佈與特定裂縫長度下的週期數累積分佈則如圖二十一、圖二十二所示。雖然等振幅荷重僅具有十片試片，實驗數據並不多，但模擬所得的裂縫成長曲線與累積機率已大致與實驗相符，可見 Bootstrap 法配合 Yang & Manning 法則於等振幅荷重狀況下亦有良好適用性，藉由 Bootstrap 法所獲得的參數近似分佈仍有其參考價值。

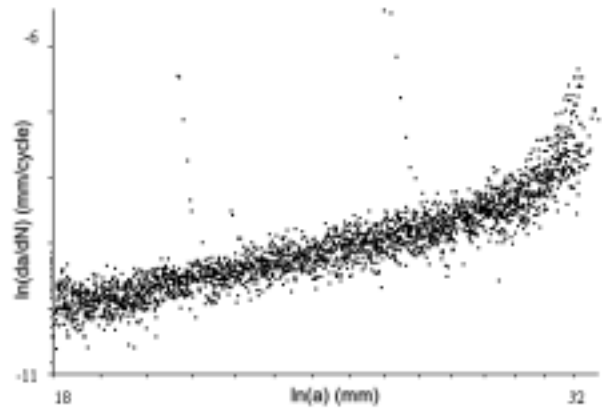
#### 四、計畫成果自評

相較於使用機率函數嵌合疲勞裂縫成長參數分佈，重新抽樣法能在幾乎不限制分佈形狀的情形下表現出試片參數分佈的特徵。雖然我們所得到的參數分佈無法用解析函數的形式表達，但是卻較傳統機率函數更容易應用於程式碼的撰寫，方便大量分析工作的迅速進行。Bootstrap 法在整個重新抽樣的過程中僅作了唯一的假設：每個數據都具有相同的重要性、重複隨機選取過程中被抽中的機率相同。不過實驗數據中有一部份明顯偏離其他數據點的數據，這些數據在抽樣中被抽中的次數過多將導致所得參數  $b$  極大或甚至出現負值，於是導致成長異常迅速的模擬曲線的出現，也影響了後續的可靠度分析準確性。因此我們可以嘗試使用各種方法修正這些數據的被選取機率，據以透過重新抽樣法獲得更具可信度的疲勞裂縫成長參數，供精確地評估材料可靠度之用。而在數據樣本有限的狀況下，Jackknife 法雖然只能獲得破碎、不平滑的參數分佈，但卻已能十分忠實地描述實驗試片的行為，即使是不對稱、形狀怪異的機率分佈與累積分佈亦是如此。未來在疲勞裂縫成長實驗進行時，若能更頻繁地記錄試片裂縫成長狀況，增加數據樣本數以增加 Jackknife 法重新抽樣的進行次數，必定能增加 Jackknife

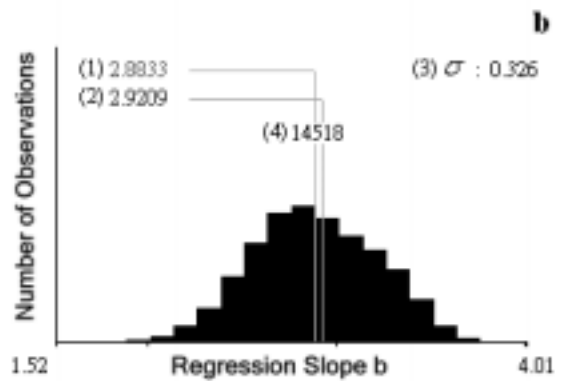
法使用的可行性，評估出更逼近母體參數分佈的近似分佈。

### 五、參考文獻

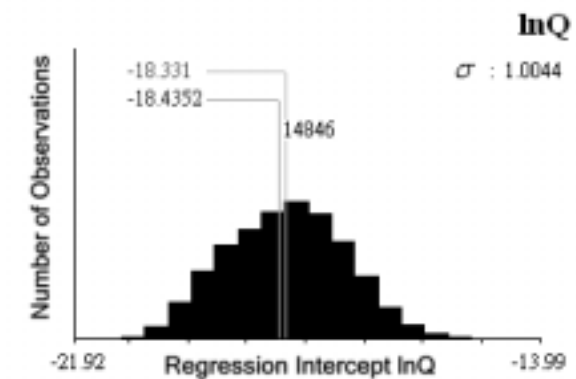
- [1] B. Efron, "Bootstrap Methods: Another Look at the Jackknife," *Annals of Statistics*, Vol. 7, 1979, pp. 1-26.
- [2] B. Efron, "The Jackknife, the Bootstrap, and Other Resampling Plans," SIAM, Philadelphia, 1982.
- [3] B. Efron and R. J. Tibshirani, *An Introduction to the Bootstrap*, Chapman and Hall, 1993.
- [4] J. Shao and D. Tu, *The Jackknife and the Bootstrap*, Springer-Verlag, 1996.
- [5] R. G. Miller, "The Jackknife-a Review," *Biometrika*, 61, 1974, pp. 1-15.
- [6] R. G. Miller, "An Unbalanced Jackknife," *Annals of Statistics*, Vol. 2, 1974, pp. 880-891.
- [7] M. Biggerelle and A. Iost, "Bootstrap Analysis of FCGR - Application to the Paris Relationship and to Lifetime Prediction," *International Journal of Fatigue*, Vol. 21, 1999, pp. 299-307.
- [8] A. S. Krausz, X. W. Zhiven and K. Krausz, "On the Constitutive Law of Environment Assisted Fatigue: The Physical Meaning of the Paris type Equations," *Z. Metallkde*, Vol. 83, 1992, pp. 356-363.
- [9] J. N. Yang, W. H. Hsi and S. D. Manning, *Stochastic Crack Propagation with Applications to Durability and Damage Tolerance Analyses*, Flight Dynamic Laboratory, Technical Report, AFWAL-TR-85-3062, Wright-Patterson Air Force Base, Ohio, 1985.
- [10] J. N. Yang, W. H. Hsi and S. D. Manning, "Stochastic Crack Growth Models for Applications to Aircraft Structures," *Probabilistic Fracture Mechanics and Reliability*, Chapter 4, 1987, pp. 171-211.
- [11] J. N. Yang and S. D. Manning, "A Simple Second Order Approximation for Stochastic Crack Growth Analysis," *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 53, 1996, pp. 677-686.



圖一 隨機振幅荷重 25 片試片  $da/dN - a$  圖

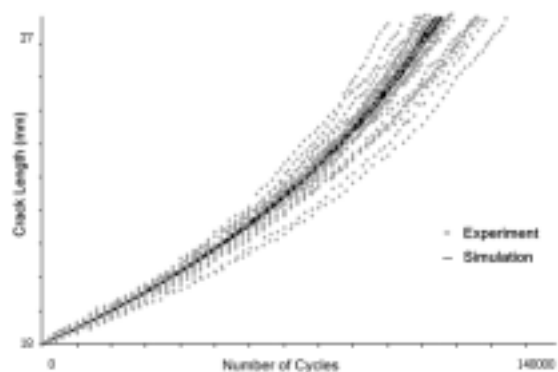


圖二 Bootstrap 重新抽樣所得  $b$  分佈



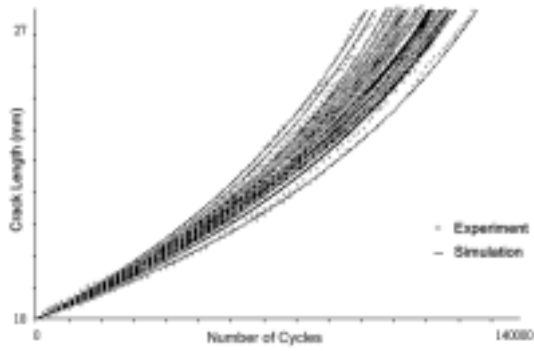
圖三 Bootstrap 重新抽樣所得  $\ln Q$  分佈

### 附 圖

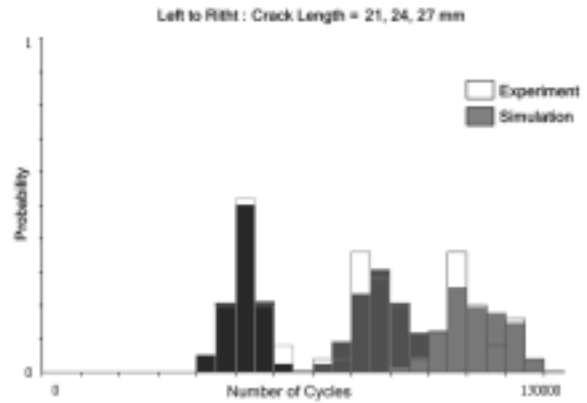


圖四 參數視為隨機程序之模擬結果

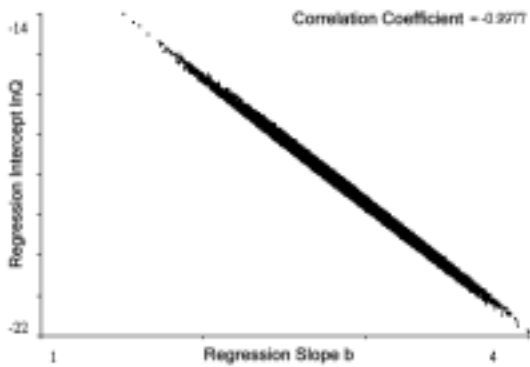




圖五 參數視為隨機變數之模擬結果

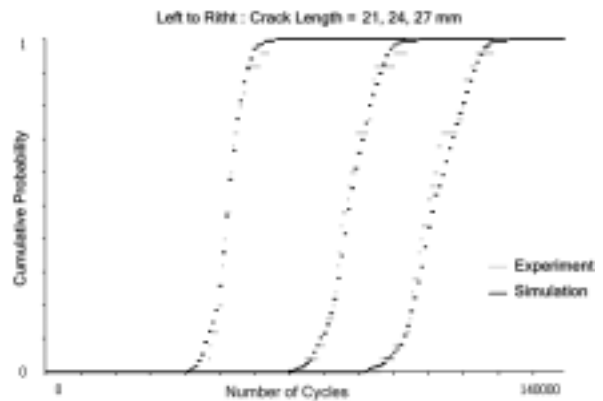


圖九 特定裂縫長度之週期數機率分佈

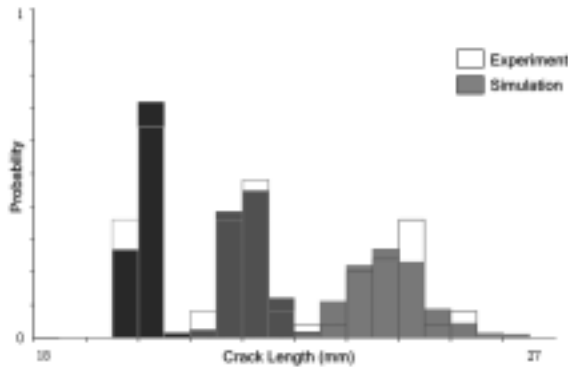


圖六  $b$ - $\ln Q$  關係圖

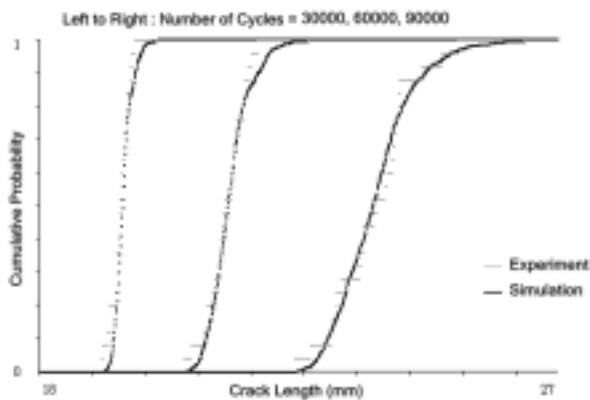
Left to Right : Number of Cycles = 30000, 60000, 90000



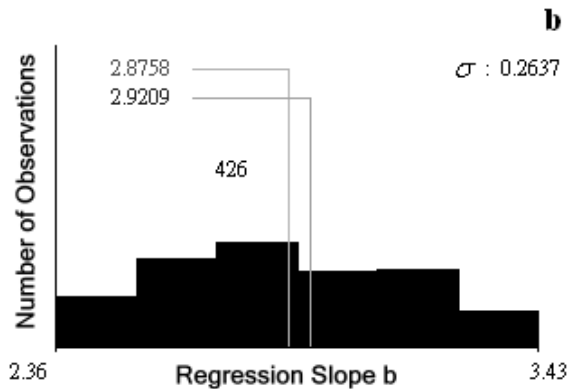
圖十 特定裂縫長度之週期數累積分佈



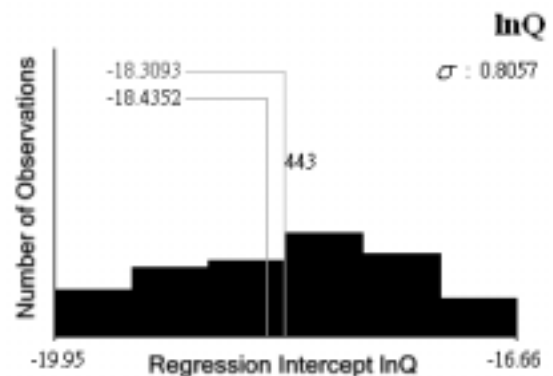
圖七 特定週期數下之裂縫長度機率分佈



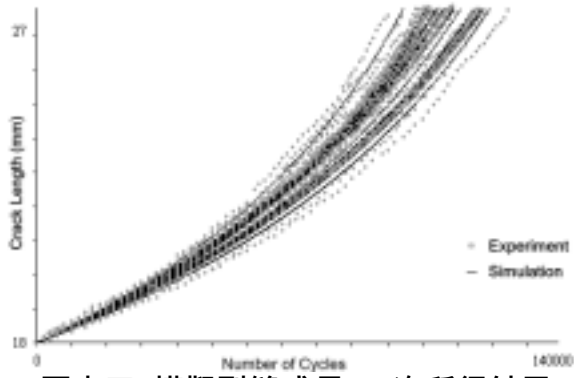
圖八 特定週期數之裂縫長度累積分佈



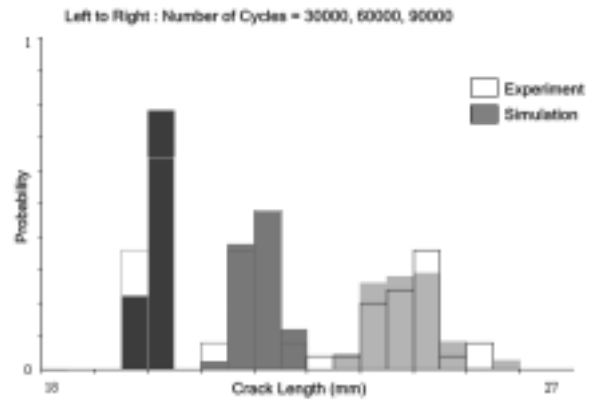
圖十一 Jackknife 重新抽樣所得  $b$  分佈



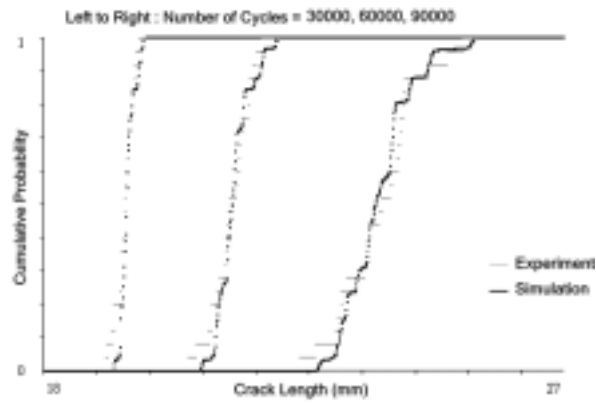
圖十二 Jackknife 重新抽樣所得  $\ln Q$  分佈



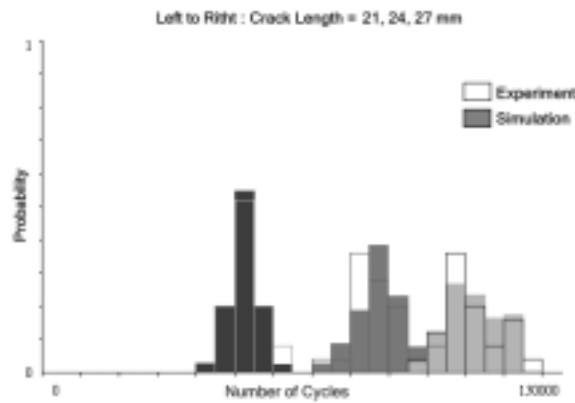
圖十三 模擬裂縫成長 30 次所得結果



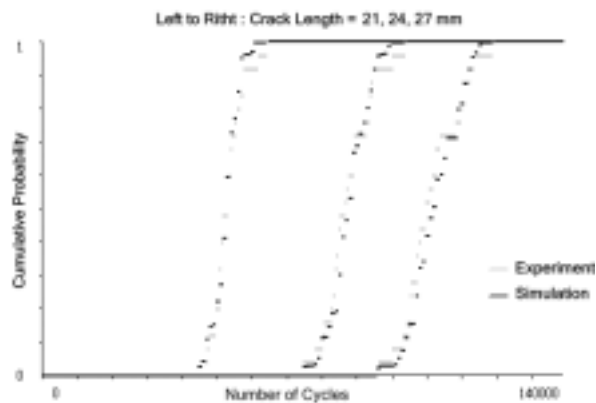
圖十四 特定週期數之裂縫長度機率分佈



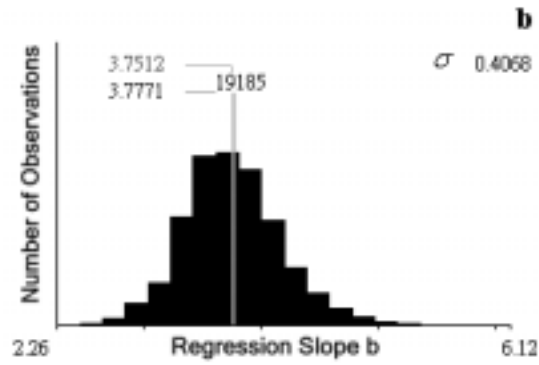
圖十五 特定週期數之裂縫長度累積分佈



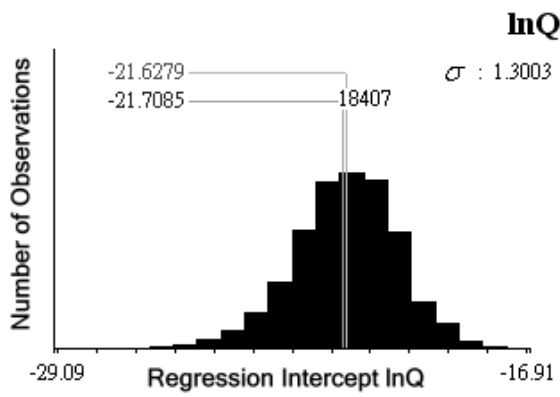
圖十六 特定裂縫長度之週期數機率分佈



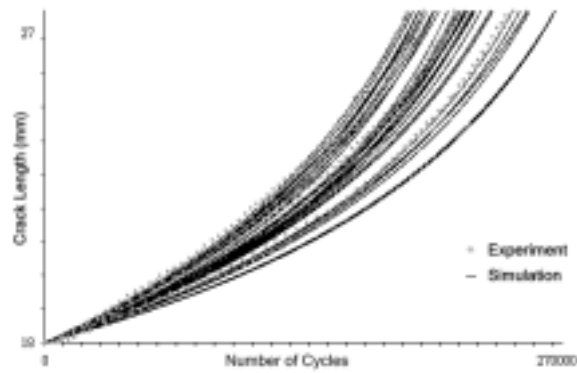
圖十七 特定裂縫長度之週期數機率分佈



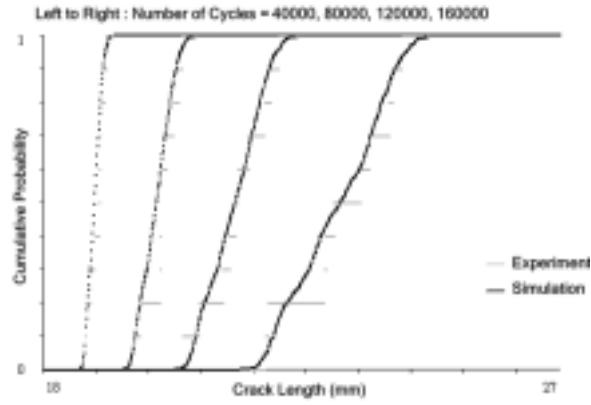
圖十八 等振幅試片之  $b$  分佈



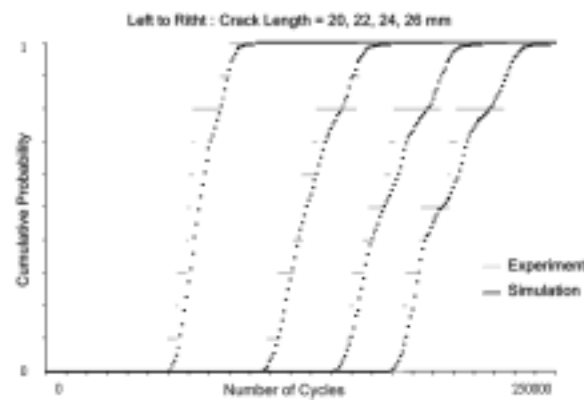
圖十九 等振幅試片之  $\ln Q$  分佈



圖二十 模擬裂縫成長 30 次所得結果



圖二十一特定週期數之裂縫長度累積分佈



圖二十二特定裂縫長度之週期數累積分佈