

行政院國家科學委員會專題研究計畫 成果報告

控制管流水錘效應之最佳閘門關閉行程研究

計畫類別：個別型計畫

計畫編號：NSC92-2212-E-002-053-

執行期間：92年08月01日至93年07月31日

執行單位：國立臺灣大學機械工程學系暨研究所

計畫主持人：伍次寅

計畫參與人員：蕭輔洲、周哲正

報告類型：精簡報告

處理方式：本計畫可公開查詢

中 華 民 國 93 年 11 月 1 日

# 控制管流水錘效應之最佳閥門關閉行程研究

## Optimal Valve Stroking for Waterhammer Control in Pipe Flows

計畫編號：NSC 92-2212-E-002-053

執行期限：92年8月1日至93年7月31日

主持人：伍次寅

國立台灣大學機械工程學系

計畫參與人員：蕭輔洲、周哲正

國立台灣大學機械工程學系

### 一、中文摘要

一個穩定的管流往往因為管路元件的操作，譬如閥門的關閉、幫浦的啟動等因素而引發管內流體流動狀況之改變；此改變通常會造成流場壓力突增(pressure surge)，並以波動的形式在管路中來回傳遞振盪，直至能量為管路摩擦因子耗盡為止，此稱之為水錘現象(waterhammer)。嚴重的水錘效應不但會產生噪音，而且會毀損管路中的元件以及破壞管路的結構；因此，水錘的控制 在管路設計與管流操控分析上是一個相當重要而不容忽視的課題。本計畫以閥門關閉所引生之水錘壓力波為例子，運用最佳控制理論(optimal control theory)的策略來求得最適當的閥門關閉行程(valve closing schedule)，使水錘現象得以有效的控制。計畫中首先建立一評量水錘效應與流量損失之量度積分式(measuring functional)，滿足流場運動方程式且同時使此積分式之值為極小之函數即為欲求之最佳閥門關閉行程。為求得此最佳函數，本計畫應用變分法(calculus of variations)將結合流場運動方程式之量度積分值最小化問題轉換成一組偏微分方程式(Euler-Lagrange equations)，再以數值計算法得出其解。所得出之結果將與其他不同閥門關閉行程所產生之水錘效應做比較，以驗證其最佳性。在學理上，本研究成功的將系統動力學中之最佳控制理論應用於數學模式為偏微分方程形式(PDE)之流場運動上。在實際應用上，本研究以嚴謹的數學理論為出發點，從而建立了一控制水錘效應的最佳閥門關閉行程模式，此結果可作為日後閥門設計或管流操控的參考依據。

(關鍵詞：水錘、最佳控制、變分法、最佳閥門關閉行程)

### 英文摘要

Fluid transient is a common phenomenon encountered in the operation of a pipe flow system. A well familiar example is the pressure surge (waterhammer) as resulting from a rapid closure of a valve at the downstream end of a pipeline system; this pressure rise will subsequently propagate in the pipeline and fluctuate back and forth in the form of an oscillating wave until its energy is depleted by the system friction. Excess pressure rise and extended oscillation can cause serious damage to the components and the structure of the pipeline system. Attaining control over the waterhammer transients is therefore one of the important issues to be considered for operation safety. In this project, the problem is formulated rigorously in the framework of the optimal control theory. A functional measuring the extents of pressure fluctuation and discharge flow rate at valve is proposed, and the objective function that minimizes the designated functional subject to certain flow constraints (waterhammer equations) is sought. The function thus obtained corresponds to the optimal valve closing schedule in so far as the measuring functional is concerned. The approach makes use of the variation technique to convert the above constrained optimization problem into finding the solution of a set of Euler-Lagrange equations. The equations, together with suitable boundary and initial conditions are then solved by numerical calculation. To confirm the validity of the present approach, the final result is compared with the waterhammer produced by other valve closing schedules. Prominent features of the pipe flow solution under the present optimal control law are also

demonstrated and discussed.

(keywords: waterhammer, optimal control, variation method, optimal valve closing schedule)

## 二、計畫緣由與目的

管流系統廣見於化工、機械、航太、土木與水利等工程領域之應用中，是一種最普遍的流體輸送方式。一般而言，在正常運作情形下，管流是處於穩定的流動狀態；然而由於閘門、幫浦等管路元件之瞬間啟閉動作造成管內流場局部壓力突增 (pressure surge)，此壓力會以暫態波 (transient wave) 的形式在管路系統中來回傳遞，直至能量為系統的摩擦因素所消散。由於壓力波在管路中來回振盪，衝擊閘門及其他元件而產生敲擊之聲，故又稱之為「水錘現象」 (waterhammer phenomenon)。程度較嚴重的水錘會在瞬間形成數倍甚或數十倍於原先穩態流之壓力，因而往往造成管路元件以及管路連結處之損壞；同時，水錘壓力波所引起之振動亦對管路系統之整體結構形成威脅。因此，管路系統在設計之初即需將水錘現象之動態效應納入考量。

統馭水錘現象之流場運動方程式與分析水錘效應之方法廣見於相關書籍 [1-5] 與期刊文獻中，不在此多作贅敘。以管流因閘門關閉所形成之水錘現象為例，傳統上為減低水錘效應的影響有兩種對策：一為在管路適當處增設一個或數個突波吸收槽 (surge tank) 以吸取行進中壓力波的大部份能量，此法僅在管路系統空間允許且水錘壓力不是太大的情況下方得以行之；另一法為適當規劃閘門關閉行程 (valve stroking)，以降低水錘壓力波之極值。本研究所欲探討之對象為後者。在過去的文獻裡，最佳閘門關閉行程之規劃有下列數種方式。較簡單之方法 [6,7] 為先行設定管路所容許之最大壓力值，並預設閘門處水錘之壓力是以線性遞減的形式降至初始之穩態壓力值，將其代入水錘運動方程式解出閘門處管流流量隨時間遞減情形，再參照閘門於不同關閉程度下有效截面積與流量間之相關特性曲線圖，得出對應此流量變化之閘門關閉行程。另一法 [8,9] 則是假設閘門關閉程度與時間呈次方 (power) 之函數關係，以此為

邊界條件，而後運用數值法計算水錘運動方程式得出閘門處水錘壓力隨時間之變化情形。經測試眾多不同次方指數，結果顯示此指數值介於 1 與 2 之間時，閘門上之水錘壓升值 (pressure rise) 為最小。除此之外，亦有學者採較複雜之動態規劃策略 (dynamic programming) 來求取閘門最佳關閉途徑 [10-12]。此法是將整個閘門關閉過程所需之時間等分成許多時刻，並以一參數來訂定閘門之關閉程度，0 代表完全關閉狀態，1 代表全開狀態。首先，假設在任一時刻中閘門可處於任一設定之關閉狀態，在現階段時刻上給定一閘門狀態後，以數值計算法計算出前一時刻中任一閘門狀態至現階段閘門狀態所造成之流量與壓差變化，選取其中壓升最小者，並將其所對應之閘門關閉程度記錄下來。之後改變現階段之閘門狀態參數值，對每一不同之閘門狀態皆重複上述步驟與記錄，如此可得到一組相對於現階段不同閘門狀態下水錘壓升值為最小之閘門關閉途徑記錄。將上述策略與步驟應用於接下來之每一時刻上，最後一時刻之閘門狀態則設定為完全關閉之情況。最後，再由歷程記錄表中逆時搜尋出每一時段內水錘壓升值為最小之閘門關閉途徑，將其串結即為最佳閘門關閉行程。由於此法在每一小時段內需將所有可能之閘門關閉形式所造成之流場變化計算出，因此所耗費的計算量與資源相當大；且此分段式的規劃策略無法保證整體之水錘壓升值確實會是一極小值。

前述幾種閘門行程之規劃皆須先行預設閘門處之壓力或流量隨時間之變化，此關係式通常來自經驗法則，或取自某一類形式閘門之特性曲線。動態規劃策略雖較具彈性，卻又失之繁瑣且耗費過多的計算資源。有鑑於此，本研究擬從最佳控制理論之觀點出發，以嚴謹之數學推導出閘門關閉行程所需滿足之數學式。此數學式之解具備了前述幾種方法所欠缺的一般性 (generality)，亦即所得出之規劃行程並非針對某特定形式之閘門，如此一方面可避免經驗法則之偏失，另一方面則省去了動態規劃策略中眾多試-誤 (trial and error) 的摸索與無謂的計算。本計畫所推導出之最佳閘門關閉行程將可作為日後

設計新式控制閥門之參考依據。

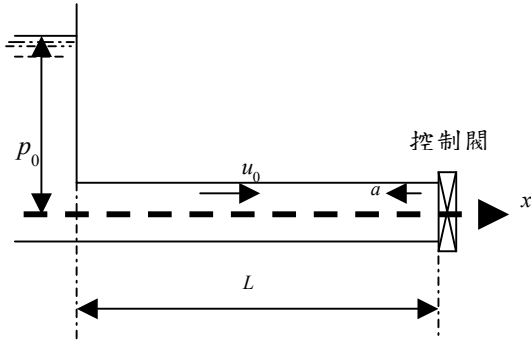
由於最佳控制理論是發展自以常微分方程(ODE)為主之動態系統，而統馭水錘運動之流場方程式為偏微分(PDE)形式。因此，本計畫的另一個目的為嘗試將傳統之最佳控制理論模式擴展應用至偏微分方程所描述之物理問題上。

### 三、研究方法

#### 1. 管流水錘運動方程式

本計畫中所討論之系統模型如圖一所示，為一上與儲槽(reservoir)相接，下游末端連結一控制閥(control valve)之單管管路系統。為了簡化分析起見，將系統作如下之假設：

- (i) 空間為一維系統(1-D)；
- (ii) 管路為剛性管壁；
- (iii) 流體之密度為定值；
- (iv) 壓力波在管中傳遞之速率為定值；
- (v) 流體為無黏滯性(inviscid)。



圖(一)、管流系統模型。

由於流體黏滯性會消除水錘壓力波之能量，因此無黏性流之假設除了簡化數學式之外，同時也意味著本研究乃是在探討無任何耗散因素下，管路系統承受最大水錘效應之最嚴苛情況(worst case)。

在上述假設下，管流流場之統馭方程為一組無黏性之波動方程式：

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{-1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} = -\rho a^2 \frac{\partial u}{\partial x}; \quad (2)$$

其中  $u$  為流速， $p$  為壓力， $x$  為沿管軸方向之位置座標， $\rho$  為流體密度， $a$  為波傳遞速率。若定義無因次變數：

$$\bar{u} = u/u_0, \quad \bar{p} = (p - p_0)/p_0,$$

$$\bar{t} = at/L, \quad \bar{x} = x/L;$$

$u_0$  為管流初始流速， $p_0$  為上游儲存槽之壓力， $L$  為管長；則上述管流運動方程式可寫為無因次之形式：

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \frac{u_0}{a} \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} = \frac{-p_0}{\rho a u_0} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{t}} + \frac{u_0}{a} \bar{u} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} = \frac{-\rho a u_0}{p_0} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}}. \quad (4)$$

起初，管流維持在等壓、等流速之穩定狀態：

$$\bar{u}(\bar{x}, 0) = 1, \quad (5)$$

$$\bar{p}(\bar{x}, 0) = 0; \quad (6)$$

當下游閥門關閉時，水錘形成，流場處於暫態，此時適當之邊界條件為管路上游端之壓力不變

$$\bar{p}(0, \bar{t}) = 0; \quad (7)$$

而管路下游端閥門處流速隨時間的變化  $\bar{u}(1, \bar{t})$  則視閥門關閉之行程而定。

#### 2. 最佳化控制模式之建立

為了評估閥門關閉效率與所引生之水錘效應，本研究提出如下之函數積分量度式(measuring functional)：

$$J = \int_0^{\bar{t}_f} (\sigma \bar{p}^2(1, \bar{t}) + \bar{u}^2(1, \bar{t})) d\bar{t}; \quad (8)$$

式中  $\bar{p}(1, \bar{t})$  與  $\bar{u}(1, \bar{t})$  為閥門處壓力與流量隨時間之變化， $\bar{t}_f$  則為閥門關閉所需時間。如此之設計同時考量了閥門關閉快慢與水錘壓力大小兩相互抵觸之因素，求取上式之最小值代表在水錘波壓力振盪與流量損失(等同於閥門關閉之快慢)之間尋得一最佳之平衡點。式中  $\sigma$  為調整二因素相對重要性之權重參數，其值為一大於 0 之正數。據此，水錘控制的問題可視為尋找一適當之閥門流量變化函數  $\bar{u}^*(1, \bar{t})$ ，此函數不僅需滿足水錘運動方程式(3-4)，且使得量度積分(8)之值為最小。用數學語言來說，此為一具限制條件之最佳化問題(constrained optimization problem)。

處理具限制條件最佳化問題之一般作法為引介一組係數(Lagrange multipliers)，將欲極小化之量度函數與限制條件結合擴展為一

增廣形式之積分式(augmented integral)[13]：

$$J_a = \int_0^{\bar{t}_f} \left( \sigma \bar{p}^2(1, \bar{t}) + \bar{u}^2(1, \bar{t}) \right) d\bar{t} + \int_0^{\bar{t}_f} \int_0^1 (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) d\bar{x} d\bar{t} \quad (9)$$

其中  $f_1$  與  $f_2$  為系統之限制條件，即流場運動方程式：

$$f_1 = \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \frac{u_0}{a} \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{p_0}{\rho a u_0} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} = 0, \quad (10)$$

$$f_2 = \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{t}} + \frac{u_0}{a} \bar{u} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \frac{\rho a u_0}{p_0} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} = 0; \quad (11)$$

由於限制條件方程式已藉由 Lagrange multipliers 併入量度積分式內，因此，原先具限制條件之最佳化問題則等同尋找  $\bar{u}^*(1, \bar{t})$ ，使得增廣積分式(9)之積分值為極小。

欲求得最佳目的函數  $\bar{u}^*(1, \bar{t})$ ，本計畫採用變分法(calculus of variations)[13]，將求取(9)式之極小值問題轉換成求解一組 Euler-Lagrange 偏微分方程式。首先，應用變分技巧對增廣積分式(9)取小變量  $\delta J_a$ ：

$$\begin{aligned} \delta J_a = & \int_0^{\bar{t}_f} \int_0^1 \left[ \left( \lambda_1 \frac{u_0}{a} \bar{u}_{\bar{x}} + \lambda_2 \frac{u_0}{a} \bar{p}_{\bar{x}} \right) \delta \bar{u} \right. \\ & + \left( \lambda_1 \frac{u_0}{a} \bar{u} + \lambda_2 \frac{\rho a u_0}{p_0} \right) \delta \bar{u}_{\bar{x}} \\ & + \left( \lambda_1 \frac{p_0}{\rho a u_0} + \lambda_2 \frac{u_0}{a} \bar{u} \right) \delta \bar{p}_{\bar{x}} \\ & + \lambda_1 \delta \bar{u}_{\bar{t}} + \lambda_2 \delta \bar{p}_{\bar{t}} + f_1 \delta \lambda_1 + f_2 \delta \lambda_2 \left. \right] d\bar{x} d\bar{t} \\ & + \int_0^{\bar{t}_f} (2\sigma \bar{p} \delta \bar{p} + 2\bar{u} \delta \bar{u}) \Big|_{\bar{x}=1} d\bar{t} \end{aligned}$$

為簡化式子之表達，式中具下標之變數代表對其取偏微分。將上式中微分項之變量，譬如  $\delta \bar{u}_{\bar{x}}$ 、 $\delta \bar{p}_{\bar{x}}$ 、 $\delta \bar{u}_{\bar{t}}$ 、 $\delta \bar{p}_{\bar{t}}$  等變數做分部積分(integration by parts)處理並代入適當邊界條件，可得

$$\begin{aligned} \delta J_a = & \int_0^{\bar{t}_f} \int_0^1 \left\{ \left[ \left( \lambda_1 \frac{u_0}{a} \bar{u}_{\bar{x}} + \lambda_2 \frac{u_0}{a} \bar{p}_{\bar{x}} \right) \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left( \lambda_1 \frac{u_0}{a} \bar{u} + \lambda_2 \frac{\rho a u_0}{p_0} \right) - \frac{\partial \lambda_1}{\partial \bar{t}} \right] \delta \bar{u} \right. \\ & \left. - \left[ \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left( \lambda_1 \frac{p_0}{\rho a u_0} + \lambda_2 \frac{u_0}{a} \bar{u} \right) + \frac{\partial \lambda_2}{\partial \bar{t}} \right] \delta \bar{p} \right\} d\bar{x} d\bar{t} \\ & + f_1 \delta \lambda_1 + f_2 \delta \lambda_2 \\ & + \int_0^{\bar{t}_f} \left( \lambda_1 \frac{u_0}{a} \bar{u} + \lambda_2 \frac{\rho a u_0}{p_0} \right) \delta \bar{u} \Big|_{\bar{x}=0}^1 d\bar{t} \\ & + \int_0^{\bar{t}_f} \left( \lambda_1 \frac{p_0}{\rho a u_0} + \lambda_2 \frac{u_0}{a} \bar{u} \right) \delta \bar{p} \Big|_{\bar{x}=0}^1 d\bar{t} \\ & + \int_0^1 (\lambda_1 \delta \bar{u}) \Big|_{\bar{t}=0}^{\bar{t}_f} d\bar{x} + \int_0^1 (\lambda_2 \delta \bar{p}) \Big|_{\bar{t}=0}^{\bar{t}_f} d\bar{x} \\ & + \int_0^{\bar{t}_f} (2\sigma \bar{p} \delta \bar{p} + 2\bar{u} \delta \bar{u}) \Big|_{\bar{x}=1} d\bar{t} \end{aligned} \quad (12)$$

(12)式中  $\delta J_a = 0$  代表增廣函數之積分值  $J_a$  為極小，而  $\delta J_a = 0$  之必要條件(necessary conditions)為(12)式右邊所有積分項中之積分子(integrand)皆為零。經整理之後，可得到如下之一組 Euler-Lagrange 偏微分方程式：

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \frac{u_0}{a} \bar{u} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \frac{p_0}{\rho a u_0} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} = 0, \quad (13a)$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{t}} + \frac{u_0}{a} \bar{u} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \frac{\rho a u_0}{p_0} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} = 0, \quad (13b)$$

$$\frac{\partial \lambda_1}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left( \lambda_1 \frac{u_0}{a} \bar{u} + \lambda_2 \frac{\rho a u_0}{p_0} \right), \quad (13c)$$

$$- \lambda_1 \frac{u_0}{a} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} - \lambda_2 \frac{u_0}{a} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} = 0$$

$$\frac{\partial \lambda_2}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left( \lambda_1 \frac{p_0}{\rho a u_0} + \lambda_2 \frac{u_0}{a} \bar{u} \right) = 0; \quad (13d)$$

以及對應之邊界條件：

$$\bar{p}(0, \bar{t}) = 0, \quad (14a)$$

$$\frac{u_0}{a} \lambda_1(0, \bar{t}) \cdot \bar{u}(0, \bar{t}) + \frac{\rho a u_0}{p_0} \lambda_2(0, \bar{t}) = 0, \quad (14b)$$

$$\frac{u_0}{a} \lambda_1(1, \bar{t}) \cdot \bar{u}(1, \bar{t}) + \frac{\rho a u_0}{p_0} \lambda_2(1, \bar{t}) , \quad (15a)$$

$$+ 2\bar{u}(1, \bar{t}) = 0$$

$$\frac{p_0}{\rho a u_0} \lambda_1(1, \bar{t}) + \frac{u_0}{a} \lambda_2(1, \bar{t}) \cdot \bar{u}(1, \bar{t}) ; \quad (15b)$$

$$+ 2\sigma \cdot \bar{p}(1, \bar{t}) = 0$$

和閘門完全關閉時( $\bar{t} = \bar{t}_f$ )之末狀態：

$$\lambda_1(\bar{x}, \bar{t}_f) = 0 , \quad (16a)$$

$$\lambda_2(\bar{x}, \bar{t}_f) = 0 . \quad (16b)$$

上述諸式中，(13a)與(13b)為原先之水錘運動流場方程式，(13c)與(13d)為引介 Lagrange multipliers  $\lambda_1$ 、 $\lambda_2$  之後所新增之 co-state 方程式。(14a)與(14b)為管路上游處( $\bar{x} = 0$ )之邊界條件，(15a)與(15b)為管路下游閘門上( $\bar{x} = 1$ )之邊界條件。(16a)與(16b)則為閘門完全關閉時( $\bar{t} = \bar{t}_f$ )，Lagrange multipliers  $\lambda_1$ 、 $\lambda_2$  所需滿足之末狀態條件。

在一般的應用中，管流之流速  $u_0$  通常遠小於波傳遞之速率  $a$ ，亦即  $u_0/a \ll 1$ ；因此，(13-16)式中之非線性項相較於其他項皆可忽略。忽略非線性項後，上述方程式可化簡為：

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \frac{u_0}{a} \bar{u} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \frac{p_0}{\rho a u_0} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} = 0 , \quad (17a)$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{t}} + \frac{u_0}{a} \bar{u} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \frac{\rho a u_0}{p_0} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} = 0 , \quad (17b)$$

$$\frac{\partial \lambda_1}{\partial \bar{t}} + \frac{\rho a u_0}{p_0} \frac{\partial \lambda_2}{\partial \bar{x}} = 0 , \quad (17c)$$

$$\frac{\partial \lambda_2}{\partial \bar{t}} + \frac{p_0}{\rho a u_0} \frac{\partial \lambda_1}{\partial \bar{x}} = 0 ; \quad (17d)$$

邊界條件：

$$\bar{p}(0, \bar{t}) = 0 , \quad (18a)$$

$$\lambda_2(0, \bar{t}) = 0 , \quad (18b)$$

$$\frac{\rho a u_0}{p_0} \lambda_2(1, \bar{t}) + 2\bar{u}(1, \bar{t}) = 0 , \quad (19a)$$

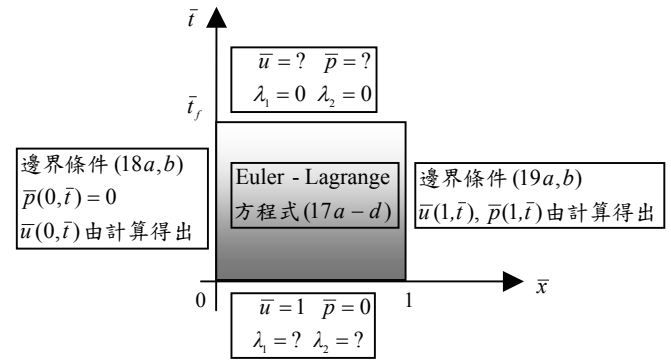
$$\frac{p_0}{\rho a u_0} \lambda_1(1, \bar{t}) + 2\sigma \cdot \bar{p}(1, \bar{t}) = 0 ; \quad (19b)$$

末狀態：

$$\lambda_1(\bar{x}, \bar{t}_f) = 0 , \quad (20a)$$

$$\lambda_2(\bar{x}, \bar{t}_f) = 0 . \quad (20b)$$

總結言之，整個水錘控制數學模式的解題策略為尋找一組 Lagrange multipliers 之初始值  $\lambda_1(\bar{x}, 0)$  與  $\lambda_2(\bar{x}, 0)$ ，代入 Euler-Lagrange 方程式(17a-d)與邊界條件(18-19)中，解出  $\bar{u}$ 、 $\bar{p}$ 、 $\lambda_1$ 、 $\lambda_2$ ，使得在末狀態  $\bar{t} = \bar{t}_f$  時  $\lambda_1$ 、 $\lambda_2$  之值滿足  $\lambda_1(\bar{x}, \bar{t}_f) = \lambda_2(\bar{x}, \bar{t}_f) = 0$  的條件；在此情況下所解得閘門處流速對時間之關係式  $\bar{u}(1, \bar{t})$  即為最佳之閘門關閉行程。圖二為最佳水錘控制數學模式之示意圖。



圖(二)、水錘控制最佳化數學模式示意圖。

### 3. 數值方法

方程式(17a-d)為一組雙曲線形式(hyperbolic)之偏微分方程組，常見之處理方式為應用特徵線法(method of characteristics)[3-5]將偏微分方程組轉換成沿特徵線方向的兩組相容方程式(compatibility equations)：

沿特徵線  $C^+$ ： $d\bar{x}/d\bar{t} = (u_0/a)\bar{u} + 1$

$$d\bar{u} + \frac{p_0}{\rho a u_0} d\bar{p} = 0 , \quad (21a)$$

$$d\lambda_1 + \frac{\rho a u_0}{p_0} d\lambda_2 = 0 ; \quad (21b)$$

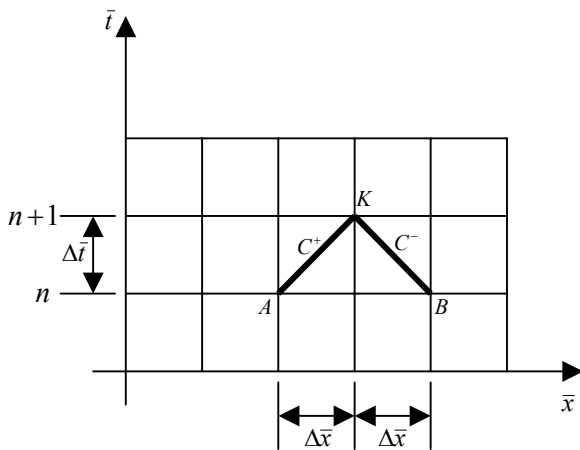
沿特徵線  $C^-$ ： $d\bar{x}/d\bar{t} = (u_0/a)\bar{u} - 1$

$$d\bar{u} - \frac{p_0}{\rho a u_0} d\bar{p} = 0 , \quad (22a)$$

$$d\lambda_1 - \frac{\rho a u_0}{p_0} d\lambda_2 = 0 . \quad (22b)$$

方程式(21-22)為一組代數聯立方程組，配合

邊界條件(18-19)，可解出  $\bar{u}$ 、 $\bar{p}$ 、 $\lambda_1$ 、 $\lambda_2$  四未知數。特徵線法之數值計算策略如圖三所示。設若時間  $n$  格點上之變數值為已知，下一時刻  $n+1$  層面上格點(譬如  $K$  點)之變數值可由相交於  $K$  點二特徵線  $C^+$  與  $C^-$  上，位於前一時刻之  $A$ 、 $B$  兩點上之變數值代入相容方程式(21-22)，聯立求解而得。同理，時間  $n+1$  層面上其他格點之變數值皆可由此方法解得，如此則可再往前進至下一個時間層面，直到最後一個時刻為止。



圖(三)、特徵線法。

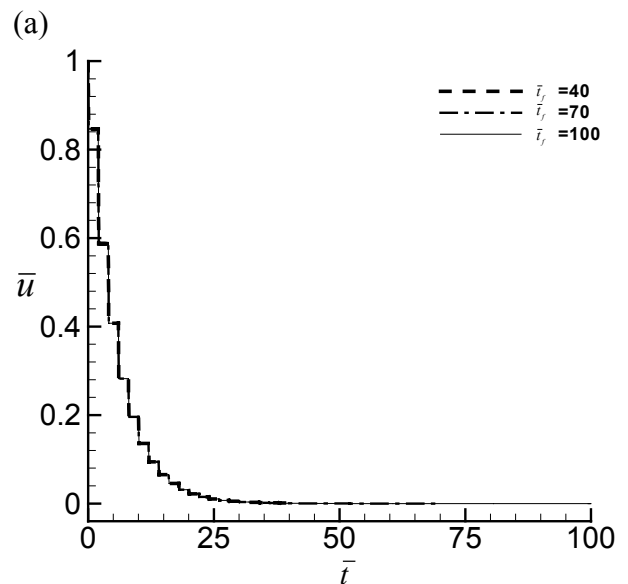
值得注意的是通常波動方程式之解為給定初始( $\bar{t}=0$ )條件，然後求解系統變數在各個時刻之值。此處卻恰好相反，Lagrange multipliers  $\lambda_1$  與  $\lambda_2$  之初始值未知，而  $\lambda_1$ 、 $\lambda_2$  在時間末( $\bar{t}=\bar{t}_f$ )需滿足  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$  之末狀態值(方程式 20)。此與傳統之時間步進求解法背道而馳，運用迭代法求解勢必在所難免；亦即需先行猜測  $\lambda_1$ 、 $\lambda_2$  於  $\bar{t}=0$  之初始值，以之求解 Euler-Lagrange 方程組，倘若所解得  $\lambda_1$ 、 $\lambda_2$  於  $\bar{t}=\bar{t}_f$  之末狀態值與條件不符，則重新修正其初猜值。一般常用之迭代法為 Newton 迭代法，然而 Newton 法僅在初猜值靠近真實解之情形下才能獲致不錯的收斂效果。本計畫採用了一結合 Newton 步驟與廣域收斂策略(globally convergent strategy)[14]之方法來修正  $\lambda_1$  與  $\lambda_2$  之起始值，使其在任何狀況下皆能快速收斂至真實解。此方法經本計畫實際驗證之後，證實其確能快速達到收斂的要求。

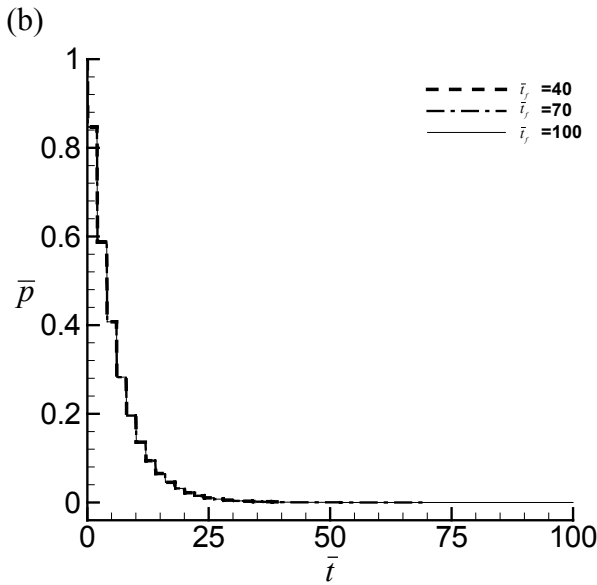
#### 四、研究結果

將管路沿管軸方向均分為 10 個網格(即設定  $\Delta\bar{x}=0.1$ )，並取  $\Delta\bar{t}=0.1$  來計算系統方程組(21-22)與邊界條件(18-20)之數值解。茲將不同閘門關閉時間  $\bar{t}_f$ 、不同權重  $\sigma$  情況下之計算結果整理如下。最後並將本文所得出之閘門關閉行程與其他任意形式之閘門關閉方式做比較，以驗證其最佳性。

##### 1. 不同閘門關閉時間 $\bar{t}_f$

圖四為三種不同閘門關閉時間  $\bar{t}_f = 40, 70, 100$  狀況下管流於閘門處之流速  $\bar{u}$  與壓力  $\bar{p}$  隨時間變化之情形(權重係數設定為  $\sigma=1$ )。由圖四(a)中可看出  $\bar{t} > 40$  之後的流速幾近為 0，亦即若閘門關閉全程所需時間  $\bar{t}_f$  大於 40 時，則閘門關閉之最佳控制行程與閘門關閉時間之長短幾無關聯。因此在往後之討論中皆將  $\bar{t}_f$  設為 40。同時，我們亦觀察到閘門關閉之最佳行程乃是將管流流量控制成階梯狀之遞減形式，而此時閘門處之管流壓力亦呈階梯狀之遞減形式(圖四(b))，因而消弭了水錘所形成之振盪壓力波。

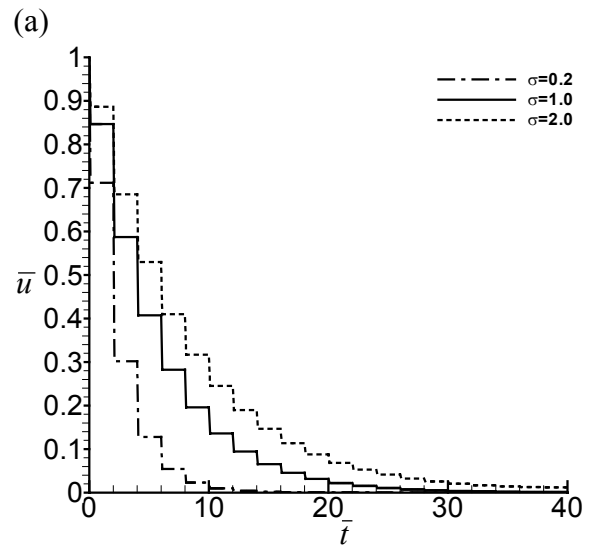




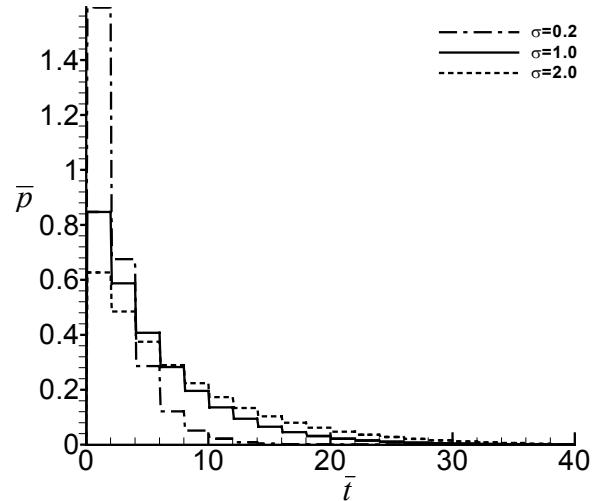
圖(四)、閘門關閉時間 $\bar{t}_f = 40$ 、70、100情形下之最佳控制行程管流流量(a)與水錘壓力(b)隨時間變化圖。

## 2. 不同權重 $\sigma$

在函數積分量度式(8)中之係數 $\sigma$ 代表控制管流水錘效應中閘門關閉快慢與水錘所引生壓力大小二因素間之權重比值。 $\sigma$ 值大代表較重視水錘壓力之影響以避免管路元件受到壓力波之破壞，而 $\sigma$ 值小則表示較注重閘門關閉之快慢以減少流量之耗損。圖五作出了三個不同權重值之下最佳控制行程之管路流速與壓力隨時間變化之情形。 $\sigma=0.2$ 時表示希望閘門快速關閉以避免流量損失過多但較不在乎所產生之水錘波壓力振幅之大小，因此流速遞減劇烈但產生較大之水錘壓升。 $\sigma=1.0$ 時表示閘門關閉速度及所引生之水錘壓力波同等重視，故流速遞減及水錘壓升程度皆屬中等。 $\sigma=2.0$ 時表示較重視水錘壓力波的振盪影響而較不在乎流量損失，故壓升程度較緩而流速遞減較慢。再次，吾人觀察到無論是何種情形，最佳之閘門控制行程皆為流量呈階梯遞減之形式。



(a)

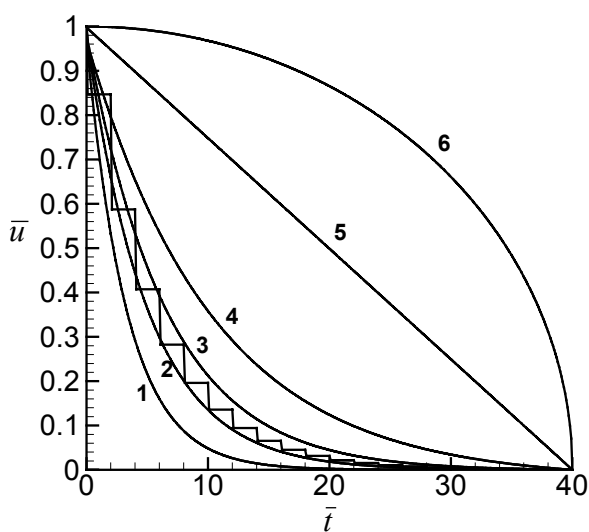


圖(五)、權重 $\sigma = 0.2$ 、1.0、2.0情形下之最佳控制行程管流流量(a)與水錘壓力(b)隨時間變化圖。

## 3. 與其他閘門關閉行程之比較

以 $\bar{t}_f = 40$ 、 $\sigma = 1.0$ 為例，吾人選取了六條不同的流量 $\bar{u}$ 行程曲線(圖六)，藉以和本文所得之梯狀最佳行程曲線比較水錘壓力 $\bar{p}$ 及 $J$ 值之大小。由表一中所列出之量度函數 $J$ 值可得知本計畫所得出之梯狀閘門關閉行程確實具有最小之 $J$ 值。亦即在閘門須快速關閉而又不希望引生過大之水錘壓力的權衡考量因素下，流量呈梯狀遞減之閘門關閉行程為最適當之設計選擇。

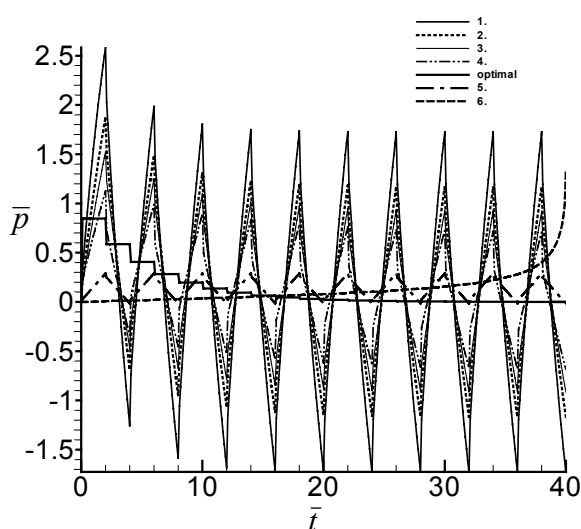




圖(六)、不同形式之閥門關閉行程。

表一、不同閥門關閉行程下之  $J$  值。

行程	$J$ 值
1.	43.702
2.	22.177
optimal	5.5768
3.	15.640
4.	11.725
5.	14.297
6.	28.094



圖(七)、不同閥門關閉行程下所引生之水錘壓力比較。

從圖七中亦可明確的看出以階梯形式減少流量適時的消除了水錘以壓力波的形式在管路中來回振盪，因而降低了水錘對管路結構之破壞威脅。其他任一形式之閥門關閉方式皆無法消弭殘存之水錘壓力波在管路中振盪傳遞。

本計畫以嚴謹之數學推導為主軸，藉由應用最佳控制理論之變分法推導並計算出管路系統水錘控制之最佳流量行程控制曲線。本研究所提出之階梯分段式閥門關閉行程可供日後設計閥門特性曲線之參考，並據此訂定出閥門操作之安全準則。

### 五、參考文獻

- [1] Parmakian, J. (1963) *Waterhammer analysis*, New York, Dover.
- [2] Streeter, V. L., Wylie, E. B. (1967) *Hydraulic transients*, New York, McGraw-Hill.
- [3] Chaudhry, M. H. (1978) *Applied hydraulic transients*, New York, Van Nostrand.
- [4] Wylie, E. B., Streeter, V. L. (1978) *Fluid transients*, New York, McGraw-Hill.
- [5] Wylie, E. B., Streeter, V. L. (1993) *Fluid transients in systems*, Englewood Cliffs, Prentice-Hall.
- [6] Streeter, V. L. (1963) "Valve stroking to control water hammer," *J. Hydraulics Division*, ASCE, Vol. 89(HY2), pp. 39-66.
- [7] Streeter, V. L. (1967) "Valve stroking for complex piping systems," *J. Hydraulics Division*, ASCE, Vol. 89(HY3), pp. 81-98.
- [8] Azoury, P. H., Baasiri, M. and Hajm, H. (1986) "Effect of valve-closure schedule on water hammer," *J. Hydraulic Eng.*, ASCE, Vol. 112, No. 10, pp. 890-903.
- [9] Wood, D. J., and Jones, S. E. (1973) "Water-hammer charts for various types of valves," *J. Hydraulics Division*, ASCE, Vol. 99(HY1), pp. 167-178.
- [10] Contractor, D. N. (1987) "Valves stroking to control water hammer transients using dynamic programming," *J. Pressure Vessel Tech.*, Vol. 109, pp. 94-100.
- [11] Driels, M. (1975) "Predicting optimum two-stage valve closure," ASME paper No. 75-WA/FE-2.
- [12] Contractor, D. N. (1985) "Two and three

stage valve closures to minimize waterhammer transients,” ASME *Proceedings of the 1985 Pressure, Vessels and Piping Conference*, PVP-Vol. 98-7, *Fluid structure dynamics*, June 23-26, 1985, pp. 357-361.

[13] Kirk, D. E. (1970) *Optimal control theory: an introduction*, Englewood Cliffs, Prentice-Hall.

[14] Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T., Flannery, B. P. (1992) *Numerical Recipes*, Cambridge, Cambridge Univ. Press.