

# 行政院國家科學委員會專題研究計畫 成果報告

## 多滾珠平衡裝置之相對穩定性 研究成果報告(精簡版)

計畫類別：個別型  
計畫編號：NSC 95-2221-E-002-202-  
執行期間：95年08月01日至96年07月31日  
執行單位：國立臺灣大學機械工程學系暨研究所

計畫主持人：傅增棟

計畫參與人員：碩士班研究生-兼任助理：蔡博修、王禎麟

處理方式：本計畫可公開查詢

中華民國 96年09月20日

# 行政院國家科學委員會專題研究計畫年度報告

## 多滾珠平衡裝置之相對穩定性

### On the Relative Stability of Multi-ball Balancing Systems

計畫編號：NSC 95-2221-E-002-202

執行期限：95 年 8 月 1 日至 96 年 7 月 31 日

主持人：傅增棟/國立台灣大學機械工程學系

計畫參與人員：蔡博修、王禎麟/國立台灣大學機械工程學系

#### 一、中文摘要

由於滾珠式自動平衡裝置具有在高於系統自然頻率的大範圍轉速下平衡偏心振動的能力，因此已廣泛地應用在各種不定負荷的旋轉機械中，然而其性能表現的不一致是其主要缺點。在一般文獻中的絕對穩定性分析，僅能判別系統的穩定區間。本研究從設計的角度出發，嘗試應用相對穩定性之理論，針對雙滾珠自動平衡裝置進行穩定強度分析，以系統賈可比矩陣特徵值中的實數部最大者作為相對穩定強度的穩態指標，並與時域暫態指標進行比較，可知穩態指標可以用來預測系統的收斂時間，並提供設計工程師在設定系統參數值以及改良系統特性時擬定設計方向的依據。

**關鍵詞：**自動平衡裝置、相對穩定性、賈可比矩陣

#### Abstract

The automatic ball balancer has been widely used in rotary machinery with uncertain imbalance by its capability of balancing vibration at speeds higher than the natural frequency. However, it still suffers from performance inconsistency in real operations. The analysis in the literature can only distinguish stability range. In this research, the theory of relative stability is applied to the study of twin-ball balancers. The maximum real part of eigenvalues from the Jacobian matrix is employed as an index for the analysis. Perturbed transient responses are also investigated to explore the relationship between this index and the

settling time. The results are expected to be useful for engineers in setting design parameters and performance improvement.

**Keywords:** automatic ball balancer, relative stability, Jacobian matrix

#### 二、前言

近年來由於資訊產業的蓬勃發展，光碟片之資料密度與讀寫速度日益增加，若要提高資料之傳輸效率，主軸馬達之轉速也勢必隨著增加，光碟機讀寫頭的循軌與聚焦動作就必須更加精確。因此，如何減少光碟機因不平衡質量所產生之振動問題便更顯重要。為了解決此一問題，業界常使用的方法為振動吸收器（vibration absorber）[1]與自動平衡裝置（automatic balancing system）[2]。其中振動吸收器僅能在特定的轉速頻率附近才能發揮抑制振動之功效，可用的工作範圍因此受限。而依據動態迴旋原理（whirling theory）所設計的自動平衡裝置，當主軸馬達的轉速高於系統之自然頻率時，即可發揮抑制振動之功能，故具有大範圍工作區間的優點，而且製造成本較振動吸收器者為低，因此成為解決光碟機系統因為不平衡質量所造成振動問題的常用方法。然而，此裝置尚有系統效能表現不一致的缺點，在每次運轉時之殘留振動量皆不盡相同，甚至有時會無法抑制偏心質量所造成之振動[2,3]，造成光學讀寫頭的讀寫動作不穩定，仍有待進一步的研究來加以克服。

曾有許多研究文獻針對自動平衡裝置的系統原理進行探討，在穩態分析方面，有 Lee 等人[4]以直角座標系推導自動平衡

裝置之運動方程式，並說明此系統在穩態時的多種可能平衡解，而當主軸轉速接近系統之自然頻率時，滾珠與軌道之間較大的阻尼值將可有助於系統到達穩定的狀態。黃偉煜[5]則從位能的觀點來探討系統之穩定性，發現當軌道與滾珠之間的滾動阻力越大，滾珠可能的平衡位置區間也會隨之增大，進而造成系統穩態行為表現的不一致。Chung 等人[2]採用極座標來推導自動平衡裝置之運動方程式，針對主軸馬達轉速、系統等效阻尼係數、軌道中黏滯液之阻尼值、轉子偏心率以及滾珠質量等系統參數，進行穩態下的絕對穩定性分析。唐世豪[3]針對單滾珠自動平衡裝置之各組平衡解，分別進行絕對與相對穩定性分析，並使用動態模擬分析軟體 (MSC.ADAMS) 的暫態分析來佐證系統之穩定強度。

在暫態行為方面，Jinnouchi 等人[6]藉由理論分析與實驗，證明自動平衡裝置於主軸轉速接近自然頻率時，會產生自激振動的現象，且可利用軌道分割與提高主軸加速度的方法，來降低系統於自然頻率時的振動。為了提升系統的效能，陳志強[7]提出一種無軌道之創新設計，將滾珠與主軸中心之間使用彈簧連接，並考慮滾珠之徑向自由度，由其模擬結果顯示，此設計將可降低系統暫態響應之最大振幅。Chung[8]考慮重力場對系統之影響，發現自動平衡裝置在加入重力的因素之後，依然能有效抑制因偏心率所產生之振動。而 Yang 等人[9]則考慮滾珠與軌道間之摩擦阻力與黏滯阻尼力的影響，發現當滾珠的初始位置不同時，軌道摩擦阻力之作用會造成滾珠穩態平衡位置之不同，進而導致系統性能表現的不一致。

Chung[2]及陳志強[7]使用羅斯-赫維茲法則 (Routh-Hurwitz criterion) 對系統進行穩定性分析，可以避免特性根的複雜求解過程，但由於並未實際計算特徵方程式之根，所以僅能就系統的穩定與否進行分析。Sperling[10]利用西爾維斯特法則 (Sylvester criterion) 進行系統穩定性之判斷，此法可以用來判別矩陣的正定 (positive definite) 性，若由特徵方程式的係數所建立的矩陣為正定，則系統將會處於穩定狀態，但因為此法則仍未實際計算特徵方程

式之解，故同樣僅能進行絕對穩定性分析。此外，也可運用相位平面 (phase plane) [11,12] 的理論，針對非線性系統進行絕對穩定性分析，於位移-速度平面上繪出隨時間變化之軌跡圖，並據以判斷系統之穩定性；由於此法可就系統的全域行為進行穩定性分析，因此可以加大穩定性分析之適用範圍。

除了絕對穩定性的分析之外，也有文獻更進一步地研究系統的相對穩定性。Kim[13]使用傅羅凱理論 (Floquet theory) 進行相對穩定性分析，利用此理論所求得特徵乘數 (characteristic multiplier) [13] 的最大絕對值作為系統的穩定性指標，若此值小於 1 則系統為穩定，且此指標之數值越小，系統之相對穩定性就越高。而根軌跡 (root locus) [14] 則是於複數平面上，繪出特徵方程式之根隨著系統參數變化之軌跡圖，若軌跡皆位於虛軸的左半平面，且於複數平面上的變化趨勢為遠離虛軸，則系統的相對穩定性就會越高。此外，也可使用奈氏穩定法則 (Nyquist stability criterion) 或是波德圖 (Bode diagram) [14] 於頻域下對系統進行相對穩定性分析。其中奈氏穩定法則是藉由開迴路轉移函數 (Open-loop transfer function) 之奈氏圖 (Nyquist plot) 來判定閉迴路系統之穩定性，當開迴路轉移函數之奈氏圖與點  $(-1, j0)$  之距離越遠，則閉迴路系統之相對穩定性越高。而波德圖則是將開迴路轉移函數之值對頻率作圖，於增益交越 (gain crossover) 處的斜率越陡時，相位邊限 (phase margin) 將會越小，則此閉迴路系統之相對穩定性就越低。

在上述的文獻當中，自動平衡裝置之穩定性分析大多集中在絕對穩定性上，對於此裝置之相對穩定性則較少著墨，也較少分析在穩定運轉狀態下受到擾動後的系統行為變化。因此，本研究將運用賈可比矩陣的特徵值[15]，針對此系統之參數進行穩定強度分析，並藉由暫態之模擬，觀察系統於穩定狀態下受到微小擾動後的動態行為，並研擬適當的分析指標，進行時域下之相對穩定強度分析，以了解系統在各種參數設定下的穩定敏感度與變化趨勢，以提供設計人員在提升此裝置效能表現的一致性時之對策與參考。

### 三、系統模型之建構

#### 3.1 系統概述與運動方程式

滾珠式自動平衡裝置的元件主要有：主軸馬達、含軌道之滾珠承載盤、滾珠及軌道內所填充之黏滯液。其中主軸馬達為光碟片與自動平衡裝置之旋轉動力來源；滾珠承載盤中則含有軌道，滾珠裝置於軌道內且可以自由移動；在系統的運動過程中，滾珠基於動態迴旋原理可以提供抵消光碟片不平衡質量之平衡力；而黏滯液則填充於軌道內，以提供滾珠在移動時之阻尼力。

本研究係針對自動平衡裝置之徑向振動進行探討，忽略系統之軸向振動，且由黃耀德[16]之研究可知，光碟機在運轉的過程中，非平面方向運動的偏擺角度很小，因此也不考慮該因素之影響。本研究系統模型的基本假設綜合如下：

1. 只考慮系統之平面運動。
2. 光碟片、滾珠承載盤與主軸馬達無相對運動，三者視為同一個剛體，以等效轉子代表之。
3. 光碟機之基座於運轉的過程中只具有平移運動，不包含旋轉運動，以等效定子代表之。
4. 光碟機系統中的隔振墊圈以等效線性彈簧及等效阻尼模擬之，且假設此彈簧阻尼系統具有等向性 (isotropic)，亦即在各個不同方向上的剛性與阻尼係數值皆相同。
5. 滾珠承載盤設有一個真圓形的軌道，且其幾何中心與主軸馬達、光碟片之幾何中心重合。
6. 滾珠為完美球體，運動時受軌道黏滯液之阻尼力，不考慮其與軌道間及滾珠間的摩擦力與碰撞現象。
7. 忽略滾珠轉動慣量之作用，滾珠之數量為兩顆。

依據上述的假設，以旋轉直角座標推導自動平衡裝置之系統運動方程式，圖 1 為其模型示意圖。圖中  $O$  點為系統之原點， $C$  點為等效轉子之轉軸及幾何中心，當系統之狀態為靜止時， $C$  點會與  $O$  點重合， $G$  點代表等效轉子之質心，此質心位置偏移轉軸幾何中心  $C$  點之距離為  $\varepsilon$ ，主軸馬達之轉速為  $\omega$ ，且系統之座標軸  $x-y$  隨著主軸馬達同步旋轉，滾珠之質量

為  $m_i$ ， $i$  代表滾珠的數量，在本文中，令滾珠的數量為兩顆，亦即  $i=1,2$ ，滾珠相對於等效轉子質心的旋轉角度為  $\beta_i$ ，滾珠所運行的軌道半徑為  $R$ 。系統所受隔振墊圈之作用，以等效剛性係數  $k$  及等效阻尼係數  $c$  表示，令  $M_1$  為等效定子之質量， $M_2$  為等效轉子之質量， $c_b$  則為填充於軌道中之黏滯液對滾珠及軌道所產生之阻尼係數。

本研究以拉格朗日方程式 (Lagrange equation) 建構系統之運動方程式[1]，其基本型式如下：

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial r} \right) = Q_r \quad (1)$$

其中  $L = T - V$  為拉格朗日函數， $T$  與  $V$  分別為系統之動能函數與位能函數， $r$  為系統之廣義座標， $Q_r$  為對應於廣義座標  $r$  之廣義力 (generalized force)。於本模型中，系統之動能可以下式表示：

$$T = \frac{1}{2} I_G \omega^2 + \frac{1}{2} M_1 \dot{\bar{r}}_C \cdot \dot{\bar{r}}_C + \frac{1}{2} M_2 \dot{\bar{r}}_G \cdot \dot{\bar{r}}_G + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 m_i \dot{\bar{r}}_{b_i} \cdot \dot{\bar{r}}_{b_i} \quad (2)$$

其中  $I_G$  為等效轉子相對於  $G$  點之轉動慣量，且在(2)式中的各個向量可以表示如下：

$$\bar{r}_C = x\bar{i} + y\bar{j} \quad (3)$$

$$\bar{r}_G = (x + \varepsilon)\bar{i} + y\bar{j} \quad (4)$$

$$\bar{r}_{b_i} = (x + R \cos \beta_i)\bar{i} + (y + R \sin \beta_i)\bar{j} \quad (5)$$

其中  $\bar{i}$ 、 $\bar{j}$  分別表示旋轉直角座標系中在  $x$  和  $y$  方向上的單位向量，而系統的位能函數如下：

$$V = \frac{1}{2} kx^2 + \frac{1}{2} ky^2 \quad (6)$$

將(2)式至(6)式代入拉格朗日函數中，再透過系統的廣義座標  $x$ 、 $y$ 、 $\beta_i$  即可推導系統之運動方程式如下：

$$M\ddot{x} - 2M\omega\dot{y} - M\dot{\omega}y + c\dot{x} + (k - M\omega^2)x - c\omega y - mR \sum_{i=1}^2 [(\ddot{\beta}_i + \dot{\omega}) \sin \beta_i + (\dot{\beta}_i + \omega)^2 \cos \beta_i] - M_2 \varepsilon \dot{\omega}^2 = 0 \quad (7)$$

$$M\ddot{y} + 2M\omega\dot{x} + M\dot{\omega}x + c\dot{y} + (k - M\omega^2)y + c\omega x + mR \sum_{i=1}^2 [(\ddot{\beta}_i + \dot{\omega}) \cos \beta_i - (\dot{\beta}_i + \omega)^2 \sin \beta_i] + M_2 \varepsilon \dot{\omega} = 0 \quad (8)$$

$$mR[\ddot{y} \cos \beta_1 + (2\omega\dot{y} + \dot{\omega}y) \sin \beta_1 - \omega^2 y \cos \beta_1] - mR[\ddot{x} \sin \beta_1 - (2\omega\dot{x} + \dot{\omega}x) \cos \beta_1 - \omega^2 x \sin \beta_1]$$

$$+mR^2(\ddot{\beta}_1 + \dot{\omega}) + c_b R^2 \dot{\beta}_1 = 0 \quad (9)$$

$$mR[\ddot{y} \cos \beta_2 + (2\omega \dot{y} + \dot{\omega} y) \sin \beta_2 - \omega^2 y \cos \beta_2] - mR[\ddot{x} \sin \beta_2 - (2\omega \dot{x} + \dot{\omega} x) \cos \beta_2 - \omega^2 x \sin \beta_2] + mR^2(\ddot{\beta}_2 + \dot{\omega}) + c_b R^2 \dot{\beta}_2 = 0 \quad (10)$$

式中  $M = M_1 + M_2 + 2m$  為系統的總質量。

### 3.2 平衡位置

今假設系統已達穩定狀態，運動方程組中與時間導微有關之變數皆不再發生變化，故令  $\dot{\omega} = \dot{x} = \dot{y} = \dot{\beta}_1 = \dot{\beta}_2 = 0$ ，而將系統之運動方程式改寫為：

$$(k - M\omega^2)x - c\omega y - mR\omega^2(\cos \beta_1 + \cos \beta_2) - M_2 \varepsilon \omega^2 = 0 \quad (11)$$

$$(k - M\omega^2)y + c\omega x - mR\omega^2(\sin \beta_1 + \sin \beta_2) = 0 \quad (12)$$

$$x \sin \beta_1 - y \cos \beta_1 = 0 \quad (13)$$

$$x \sin \beta_2 - y \cos \beta_2 = 0 \quad (14)$$

依據  $x$  與  $y$  等於零與否，可以將平衡位置分成四大類，詳細之推導過程請參見[17]：

(1) 當  $x \neq 0$ 、 $y \neq 0$  時

(a) 當  $\cos(\beta_1 - \psi) = 1$  且  $\cos(\beta_2 - \psi) = 1$  時

系統之穩態解為：

$$r = \frac{2mR\omega^2(k - M\omega^2)}{c^2\omega^2 + (k - M\omega^2)^2} \pm \frac{M_2 \varepsilon \omega^2 \sqrt{(k - M\omega^2)^2 + c^2\omega^2(1 - \frac{4m^2 R^2}{M_2^2 \varepsilon^2})}}{c^2\omega^2 + (k - M\omega^2)^2} \quad (15)$$

$$\psi = \tan^{-1} \left[ \frac{-c\omega r}{(k - M\omega^2)r - 2mR\omega^2} \right] \quad (16)$$

$$\beta_1 = \beta_2 = 2n\pi + \psi, n \in Z \quad (17)$$

(b) 當  $\cos(\beta_1 - \psi) = -1$  且  $\cos(\beta_2 - \psi) = -1$  時

系統之穩態解為：

$$r = \frac{-2mR\omega^2(k - M\omega^2)}{c^2\omega^2 + (k - M\omega^2)^2} \pm \frac{M_2 \varepsilon \omega^2 \sqrt{(k - M\omega^2)^2 + c^2\omega^2(1 - \frac{4m^2 R^2}{M_2^2 \varepsilon^2})}}{c^2\omega^2 + (k - M\omega^2)^2} \quad (18)$$

$$\psi = \tan^{-1} \left[ \frac{-c\omega r}{(k - M\omega^2)r + 2mR\omega^2} \right] \quad (19)$$

$$\beta_1 = \beta_2 = (2n+1)\pi + \psi, n \in Z \quad (20)$$

(c) 當  $\cos(\beta_1 - \psi) = 1$  且  $\cos(\beta_2 - \psi) = -1$  時  
或  $\cos(\beta_1 - \psi) = -1$  且  $\cos(\beta_2 - \psi) = 1$  時  
系統之穩態解為：

$$r = \frac{\pm M_2 \varepsilon \omega^2}{\sqrt{c^2\omega^2 + (k - M\omega^2)^2}} \quad (21)$$

$$\psi = \tan^{-1} \left( \frac{-c\omega}{k - M\omega^2} \right) \quad (22)$$

$$\beta_1 = 2n\pi + \psi, \beta_2 = (2n+1)\pi + \psi$$

或  $\beta_1 = (2n+1)\pi + \psi, \beta_2 = 2n\pi + \psi, n \in Z$  (23)

(2) 當  $x = 0$ 、 $y = 0$  時

系統之穩態解為：

$$\beta_1 = -\beta_2 = \cos^{-1} \left( -\frac{M_2 \varepsilon}{2mR} \right) \quad (24)$$

且只有當  $2mR \geq M_2 \varepsilon$  時，此組平衡解才會存在。

(3) 當  $x \neq 0$ 、 $y = 0$  時

系統並不存在平衡解。

(4) 當  $x = 0$ 、 $y \neq 0$  時

系統平衡解與前述  $x \neq 0$ 、 $y \neq 0$  時所得者相同。

## 四、系統穩態穩定強度分析

### 4.1 系統穩態平衡解及穩定強度

欲判斷前述之平衡解是否穩定，須再針對這些平衡解位置，以微擾法 (perturbation method) 作線性化，以求得系統之賈可比矩陣 (Jacobian matrix) 及其特徵值，系統之穩定強度即可藉由特徵值來判斷[15]。當賈可比矩陣之所有特徵值的實數部均為負值時，系統於該平衡位置為穩定；而若所求得的特徵值中有任何一個的實數部大於零時，則該平衡位置為不穩定；當所有特徵值的實數部皆非正值，且有任何一個的實數部等於零時，該平衡位置之穩定性為未定，需藉由暫態模擬的方式來加以檢驗。本研究以賈可比矩陣特徵值中實數部最大值 ( $\lambda_{Rmax}$ ) 作為相對穩定性指標，進行系統的相對穩定性分析，在不同的滾珠質量下，系統之穩定平衡振動量 ( $r$ ) 對無因次化轉速  $\Omega$  之變化關係可如圖 2 之實線所示，其中  $\Omega = \omega / \omega_n$ ， $\omega_n$  為系統之自然頻率；而此狀態所對應之穩定強度  $\lambda_{Rmax}$  則以虛線表示，此外，圓圈符號之實線表示同系統取出滾珠之後的徑向振動行為 ( $r_{no\_ball}$ ) 以為對照。以下分別針對滾珠質量與偏心質量符合  $2mR < M_2 \varepsilon$ 、 $2mR = M_2 \varepsilon$  及  $2mR > M_2 \varepsilon$  等三種狀況之穩定平衡解進行分析，所用之系統參數值則來自於廠商的實際設定，如表 1 所示，其

模擬結果如下：

(1)當  $2mR < M_2\varepsilon$  時

圖 2(a)為穩定平衡解與無自動平衡裝置系統之性能比較，由圖可知，自動平衡裝置在主軸轉速小於自然頻率時會有振動加劇之現象，而當主軸轉速約大於系統自然頻率後則可有效抑制振動。 $\lambda_{Rmax}$ 於主軸轉速接近自然頻率時發生轉折，其後隨著轉速的增加而小幅遞增，於轉速 $\Omega$ 為 1.375 時具有局部最大值-0.054，其後隨著轉速的增加而遞減，系統的相對穩定性提高。

(2)當  $2mR = M_2\varepsilon$  時

圖 2(b)為此時之穩定平衡解與無自動平衡裝置之比較，在轉速低於自然頻率時的行為同前，而當轉速高於自然頻率時，則可有效抑制振動，使其平衡振動量為零。當轉速小於自然頻率時， $\lambda_{Rmax}$ 於轉速 $\Omega$ 為 0.843 時具有最小值-0.067，而當轉速大於自然頻率時， $\lambda_{Rmax}$ 則皆為零，無法由 $\lambda_{Rmax}$ 判斷系統的穩定性，需藉由暫態模擬的方式來檢驗。由 Chung[2]所使用之特徵方程式亦顯示系統在此狀態下會出現特徵值為零之情況，但其文中並未說明此時系統之穩定性。本研究在經由暫態模擬之後，發現此平衡位置在轉速大於自然頻率時是屬於穩定平衡解。

(3)當  $2mR > M_2\varepsilon$  時

圖 2(c)為此時之穩定平衡解與無自動平衡裝置之比較，由圖可知，當主軸轉速低於系統自然頻率時，自動平衡裝置會使振動加劇，而當轉速高於自然頻率時則可抑制振動，且系統之平衡振動量亦為零。但是當轉速小於自然頻率時， $\lambda_{Rmax}$ 於轉速 $\Omega$ 為 0.788 時具有局部最小值-0.056，而當轉速增加至 0.872 後，平衡振動量無實數解；當轉速大於自然頻率後， $\lambda_{Rmax}$ 於轉速 $\Omega$ 為 1.408 時發生轉折，其後隨著轉速增加而遞增，於轉速 $\Omega$ 為 1.605 時具有局部最大值-0.157，之後即隨轉速的增加而減少，系統相對穩定性越高。

#### 4.2 強度趨勢分析

藉由改變系統的主要設計參數之數值可以進行穩定強度趨勢分析，今以主軸轉速 ( $\omega$ ) 與軌道阻尼係數 ( $c_b$ ) 為例，參數的變動範圍列示於表 2 中。在設計參數與系統穩定強度趨勢變化的立體關係圖

中，平面上的  $X$  軸及  $Y$  軸分別表示主要設計參數的變化區間，而  $Z$  軸為系統之相對穩定性指標  $\lambda_{Rmax}$ 。為了有助於觀察系統之變化趨勢，在  $\lambda_{Rmax}$  等於零的位置加入一個半透明的參考平面。由於在軌道阻尼係數為零時，系統將會處於不穩定的狀態，為求圖面的簡潔，將不繪出此區域之圖形，以下亦針對  $2mR < M_2\varepsilon$ 、 $2mR = M_2\varepsilon$  及  $2mR > M_2\varepsilon$  等三種狀況進行討論：

(1)當  $2mR < M_2\varepsilon$  時

圖 3(a)為此時軌道阻尼值-主軸轉速與相對穩定性指標  $\lambda_{Rmax}$  之變化關係，由圖中可知，主軸轉速的增加將可有助於系統的穩定，而當軌道阻尼值越小時，系統的相對穩定性也會提升。

(2)當  $2mR = M_2\varepsilon$  時

由圖 3(b)之觀察可知，當主軸轉速小於自然頻率時， $\lambda_{Rmax}$ 會隨轉速之增加而小幅遞減，而後再逐漸遞增至零，系統的相對穩定性在主軸轉速小於自然頻率時的變化不大。而當主軸轉速大於自然頻率時，系統的  $\lambda_{Rmax}$ 則皆趨近於零。

(3)當  $2mR > M_2\varepsilon$  時

由圖 3(c)可知，當主軸轉速小於自然頻率時，除了在自然頻率附近無實數解的區域為不穩定，故未繪出之外，其餘區間皆為穩定。而當主軸轉速高於系統自然頻率時，降低軌道阻尼值也能提高系統之穩定強度，且主軸的轉速越高，系統的相對穩定性也會越高。

## 五、系統暫態穩定強度分析

### 5.1 暫態行為與分析指標

為了分析系統於穩定狀態下受到微小擾動之後的暫態行為表現，此裝置將先以 1000rad/sec 之定轉速到達穩態之後，以半正弦函數 (half sine function) 之方式降低至 900rad/sec，以模擬系統經歷到讀取速度的改變，此微擾函數之型式如下：

$$\omega(t) = 1000 - \omega_c \{0.5 \cdot \sin[\pi(t - t_b)/t_r - \pi/2] + 0.5\} \quad (25)$$

其中  $\omega_c$  為轉速的變動量，在一般光碟機之 Z-CLV 模式下的轉速變化值約為 100rad/sec[18]； $t$  為時間；而  $t_b$  為轉速擾動的起始時間，設定為第 10 秒； $t_r$  為轉速擾動之作用時間，根據廠商之資料估計轉速

變動100rad/sec所需的時間約為0.11秒，圖4為轉速擾動函數之示意圖。

本研究所研擬的系統暫態性能分析指標為系統最大振幅及回復穩態所需的收斂時間，其定義如下：

### (1)最大振幅

假設系統在受到擾動之後，徑向振動量的暫態響應於時間 $t_0$ 時達到最大值，此最大的振動響應值即為系統的最大振幅 $r_p$ 。

### (2)收斂時間

當系統的徑向振動量於時間 $t_1$ 之後皆落於其穩態值的 $\pm 10^{-6}$  mm範圍內時，即判定此系統已到達穩定狀態，其所需的時間 $t_c = t_1 - t_0$ 即定義為收斂時間。

## 5.2 時域指標之關係與軌道阻尼值的最佳化

圖5為系統最大振幅與收斂時間隨著軌道阻尼值之變化關係圖，由圖可知，隨著軌道阻尼值的增加，系統在受到干擾之後的最大振幅會越小，而其收斂時間則會越長，這是由於當軌道阻尼值越大時，滾珠在軌道中，所受到的黏滯阻尼力就會越大，因此當轉速擾動之後，偏移平衡位置的距離也會越小，故而系統的最大振幅會較小。然而，也因為軌道黏滯阻尼力較大，造成滾珠在回復的過程中所受到的阻力較大，因此系統的收斂時間也會較長。由於滾珠式自動平衡裝置之最大振幅與收斂時間的趨勢相互矛盾，因此在設計上必須在此二個指標之間進行取捨，以求得最佳的軌道阻尼值。

由於此二個指標的數量級並不相同，在計算最佳軌道阻尼值時，需將最大振幅的數值乘上一個適當的倍率，以使指標的數量級相同。此倍率即定為收斂時間的平均值除以最大振幅的平均值，將乘上放大倍率的最大振幅值與收斂時間相加，可繪出其與軌道阻尼值之間的變化關係，如圖6所示。由圖中可見，三種不同滾珠質量條件下的軌道阻尼最佳值為位於綜合指標最小值的區域，綜合此三種條件估算其最佳值大約介於0.2至0.3N-sec/m之間，此結果將可供作軌道阻尼值設定時的參考，以兼顧系統之最大振幅與收斂時間的性能表現。

## 六、穩定強度特性綜合分析與設計

### 6.1 穩態與暫態指標之比較

#### (1)相對穩定性指標與收斂時間

由相對穩定性的理論可知，當 $\lambda_{Rmax}$ 較大時，系統的相對穩定性較弱，受到外界干擾之後的收斂時間應該較長。圖7所示為系統在 $2mR < M_2\varepsilon$ 、 $2mR = M_2\varepsilon$ 與 $2mR > M_2\varepsilon$ 三種狀況下的相對穩定性指標 $\lambda_{Rmax}$ 與收斂時間的關係；由圖可知，當 $2mR < M_2\varepsilon$ 或是 $2mR > M_2\varepsilon$ 時，系統的收斂時間會隨著 $\lambda_{Rmax}$ 的增大而漸漸增長，表示當系統的相對穩定性較低時，需要花費較長的時間才能在干擾之後再度回到平衡位置，與相對穩定性理論的預測相符，因此由本研究的暫態模擬當中可以證明 $\lambda_{Rmax}$ 作為系統相對穩定性指標的可行性。當 $2mR = M_2\varepsilon$ 時，則因為 $\lambda_{Rmax}$ 趨近於零，無法由其判斷系統的穩定程度，但從暫態模擬結果仍可得知，此時系統在受到外界的擾動之後，仍會收斂回到平衡位置，且隨著軌道阻尼值的增加，此收斂時間也將會加長。

由圖7亦可發現，在相同的 $\lambda_{Rmax}$ 下， $2mR < M_2\varepsilon$ 與 $2mR > M_2\varepsilon$ 的收斂時間並不相同。其原因與此二種狀況的平衡位置不同有關：當 $2mR > M_2\varepsilon$ 時，徑向振動量的穩態平衡位置為零，而在收斂的過程中，徑向振動量越小，滾珠因離心力之作用往平衡位置的回復驅動力也會較小，故需要花費較長的時間才能收斂；而當 $2mR < M_2\varepsilon$ 時，穩態的徑向振動量不為零，因此滾珠往平衡位置收斂的驅動力較大，收斂的速度也會較快。此外，若要提高系統的穩定強度，減少收斂時間，可以藉由降低軌道阻尼值之方式來達成，然而 $\lambda_{Rmax}$ 與收斂時間的關係並非線性，當系統的相對穩定性較低時，改變軌道阻尼值對於系統收斂時間的影響才會比較明顯。

為了進一步與實際情況比對，在進行系統暫態模擬時，採用循軌誤差0.05 $\mu$ m[19]作為系統判斷收斂之依據，並與先前的結果作比較。由於在 $2mR < M_2\varepsilon$ 條件下之徑向平衡振動量已遠大於循軌誤差，而 $2mR = M_2\varepsilon$ 條件下兩顆滾珠的平衡位置重疊於轉子偏心質量的對側，在實務上均不實用，故僅針對 $2mR > M_2\varepsilon$ 之條件下進行分析，如圖7中的虛線所示，可見採用循軌

誤差作為判斷收斂依據的系統收斂時間會較短，這是由於原收斂區間之定義較為嚴苛之故，但二者之趨勢仍大致相同。

## (2) 相對穩定性指標與最大振幅

圖8為相對穩定性指標  $\lambda_{R\max}$  與最大振幅之關係，由圖可知，當  $2mR < M_2\varepsilon$  或是  $2mR > M_2\varepsilon$  時，隨著  $\lambda_{R\max}$  的增加，系統受到擾動之後的最大振幅較低。此時  $\lambda_{R\max}$  距離虛軸較近，代表系統的相對穩定性較低，卻反而會有較小的最大振幅，因此在改善系統的相對穩定性時，也需同時考量最大振幅的行為反應。此外，當  $2mR < M_2\varepsilon$  或是  $2mR > M_2\varepsilon$  時， $\lambda_{R\max}$  與最大振幅的關係近似線性，隨著  $\lambda_{R\max}$  的增加，最大振幅會慢慢趨近至徑向振動量的平衡位置。在其中， $2mR < M_2\varepsilon$  時的最大振幅隨著  $\lambda_{R\max}$  的增加，並不會遞減至零，這是由於在此條件下的穩態徑向振動量並不為零。而當  $2mR = M_2\varepsilon$  時，由於  $\lambda_{R\max}$  趨近於零，由時域暫態模擬所得最大振幅之趨勢可知，當軌道阻尼值越大時，最大振幅會越小。

## 6.2 單滾珠與雙滾珠行為之比較

一般滾珠式自動平衡裝置所具有的滾珠數目並不相同，在光碟機的實際應用中，滾珠的數目通常為多顆，為了分析滾珠數目對系統動態行為的影響，本研究也針對單滾珠與雙滾珠之自動平衡裝置進行系統微擾之暫態模擬，再運用收斂時間與最大振幅之時域相對穩定性指標，比較此兩種系統之動態行為，並檢討其優缺點，以供實務設計時之參考。

在以下的分析中，將假設單滾珠與雙滾珠兩者所產生的離心力為相同，因此單滾珠的質量 ( $m_s$ ) 設定成與雙滾珠質量 ( $2m_d$ ) 之總和相同，亦即兩種系統的滾珠質量比為二比一。表 3 為單滾珠與雙滾珠自動平衡裝置在受微擾之後暫態行為的比較，在三組的測試當中，綜合而言雙滾珠自動平衡裝置在受到干擾之後，最大振幅值皆較單滾珠者為小，這是因為滾珠的質量較小，其慣性亦較小，因此在受到外界擾動時的偏移平衡位置較少所致。而在收斂時間方面，雙滾珠系統則因為在受到擾動之後的偏移位置較近，使得滾珠往平衡位置的回復驅動力較小，因此收斂時間較單滾珠者為長。然而，由於單滾珠與雙滾

珠系統的  $\lambda_{R\max}$  差異甚大，因此相對穩定性指標  $\lambda_{R\max}$  不宜在跨系統的情況下相互進行比較。

雙滾珠自動平衡裝置的優點在於系統受到擾動之後，其最大振幅較單滾珠系統者小，但其缺點則是收斂時間較長。然而，從系統穩態徑向振動量之觀點來看，雙滾珠系統另外具有適用範圍較廣的優點，只要在系統的滾珠質量與偏心質量符合  $2m_d R \geq M_2\varepsilon$  的條件下，系統穩定徑向振動量即為零，而單滾珠系統只有當滾珠質量與偏心質量為  $m_s R = M_2\varepsilon$  時，系統的徑向振動量才會為零。

## 七、結論與計畫成果自評

滾珠式自動平衡裝置雖可有大範圍的制振能力，但於實際應用中仍存在當主軸轉速低於系統自然頻率時會加劇振動，以及抑制振動效能表現不一致的缺點。對於前者一般可藉由提高主軸加速度以快速通過自然頻率的方式加以改善，但是系統性能表現的不穩定，則常在實務的操作中造成困擾。

本研究主要針對雙滾珠自動平衡裝置的效能表現進行分析與改良，以系統的賈可比矩陣特徵值中實數部最大者 ( $\lambda_{R\max}$ ) 作為相對穩定性的穩態指標，以執行系統穩定強度趨勢分析，可知藉由提高主軸馬達轉速以及降低軌道的阻尼值，可以提高系統的相對穩定性，減少運轉時抑制振動效果的變異，進而改善系統性能表現不一致的問題。此外，藉由穩態與暫態模型的數值模擬結果之比對，可確認  $\lambda_{R\max}$  在預測系統的穩定強度與收斂時間方面的可行性。然而，在設計上尚須考量最大振幅對系統性能表現的影響，雖然在一定的範圍內，降低軌道阻尼值可以有效提高系統的穩定強度，但在此時反而會有較大的系統最大振幅，而當系統徑向振動量的振幅越大時，光學讀寫頭的循軌的難度也會越大，造成讀寫動作的不穩定。由於這兩個時域指標的趨勢恰好相反，本研究嘗試尋求軌道阻尼的最佳值，約介於 0.2 至 0.3N-sec/m 之間，以同時兼顧二者對系統性能的影響。而雙滾珠自動平衡裝置在系統受到干擾後的最大振幅較小，偏離平衡位置較近，且適用的範圍較為廣泛，但其收



斂時間較長，需要花費較久的時間才能回到平衡位置。

本研究依據計畫之內容，運用動態相對穩定性之理論，針對雙滾珠自動平衡裝置進行穩定強度之分析，並建立暫態與穩態相對穩定性指標之間的關連。藉由本研究之分析，將可提供設計工程師在設定系統參數，以及改良系統特性時較明確的方向，以降低系統效能表現不一致的缺點。其成果可供相對穩定性學理適用範圍之探討，以及滾珠式自動平衡裝置系統特性的深入了解，從而有助於家電業的洗衣機、旋轉手工具、以及光機電產業光碟機相關廠商的技術提升，減少光機電控制的複雜程度，以提升市場的競爭能力。

## 八、參考文獻

- [1] Sneek, H. J., *Machine Dynamics*, Prentice Hall, 1991.
- [2] Chung, J and Ro, D. S., “Dynamic Analysis of an Automatic Dynamic Balancer for Rotating Mechanisms,” *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 228(5), pp.1035-1056, 1999.
- [3] 唐世豪，單滾珠自動平衡裝置之穩定性設計，碩士論文，國立臺灣大學機械工程學研究所，台北，2004。
- [4] Lee, J. and Van Moorhem, W. K., “Analytical and Experimental Analysis of a Self-Compensating Dynamic Balancer in a Rotating Mechanism,” *Transactions of the ASME*, Vol. 118, pp. 468-475, 1996.
- [5] 黃偉煜，創新自動平衡裝置，碩士論文，國立清華大學動力機械工程學系，新竹，1999。
- [6] Jinnouchi, Y., Araki, Y., Inoue, J., Ohtsuka, Y. and Tan, C., “Automatic Balancer (Static Balancing and Transient Response of a Multiball Balancer),” *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Part C*, Vol. 59, No. 557, pp.79-84, 1993.
- [7] 陳志強，單滾珠自動平衡機構的動態特性，碩士論文，國立臺灣大學機械工程學研究所，台北，2003。
- [8] Chung, J., “Effect of Gravity and Angular Velocity on an Automatic Ball Balancer,” *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C, Journal of Mechanical of Mechanical Engineering Science*, Vol. 219, pp. 43-51, 2005.
- [9] Yang, Q., Ong, E. H., Sun, J., Guo, G. and Lim, S.P., “Study on the Influence of Friction in an Automatic Ball Balancing System,” *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 285, pp. 73-99, 2005.
- [10] Sperling, L., Ryzhik, B., Linz, Ch. and Duckstein, H., “Simulation of Two-Plane Automatic Balancing of a Rigid Rotor,” *Mathematics and Computers in Simulation*, Vol. 58, pp. 351-365, 2002.
- [11] O’Neil, P. V., *Advanced Engineering Mathematics*, Brooks/Cole Publishing Company, 2003.
- [12] Phillips, C. L. and Harbor, R. D., *Feedback Control Systems*, Prentice Hall, 2000.
- [13] Kim, W., Lee, D. J. and Chung, J., “Three-dimensional Modelling and Dynamic Analysis of an Automatic Ball Balancer in an Optical Disc Drive,” *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 285, pp. 547-569, 2005.
- [14] Kuo, B. C. and Golnaraghi, F., *Automatic Control Systems*, John Wiley & Sons, Inc, 2003.
- [15] Khalil, H. K., *Nonlinear Systems*, Prentice Hall, 2002.
- [16] 黃耀德，滾珠型自動平衡裝置對轉子非平面運動的改善，碩士論文，國立清華大學動力機械工程學系，新竹，2000。
- [17] 陳宏生，自動平衡裝置之相對穩定性分析，碩士論文，國立臺灣大學機械工程學研究所，台北，2007。
- [18] 許佳興，光碟機轉速與碟片偏擺之控制，博士論文，國立成功大學電機工程學系，台南，2003。
- [19] Lee, S. Y. and Kim, S., “Trends and Mechanical Issues in Optical Disk Drives,” *Proceedings of the 1998 ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition*, 1998.

## 表及圖

表1 系統參數之設定值[3]

系統參數	符號	單位	數值
等效定子質量	$M_1$	g	200
等效轉子質量	$M_2$	g	16
系統自然頻率	$\omega_n$	rad/sec	192.18
碟片質心偏心率	$\varepsilon$	mm	0.625
軌道半徑	$R$	mm	16.5
系統等效剛性係數	$k$	N/m	8000
系統等效阻尼係數	$c$	N-sec/m	25
軌道阻尼係數	$c_b$	N-sec/m	0.2
主軸轉速	$\omega$	rad/sec	0~1000
滾珠質量	$m$		
$2mR < M_2\varepsilon$		g	0.273
$2mR = M_2\varepsilon$		g	0.303
$2mR > M_2\varepsilon$		g	0.333

表2 穩定強度趨勢之參數變化區間

系統參數	符號	單位	數值	
			下界	上界
主軸轉速	$\omega$	rad/sec	9.609	960.9
無因次主軸轉速	$\Omega$	—	0.05	5
軌道阻尼係數	$c_b$	N-sec/m	0.05	1

表3 單滾珠與雙滾珠特性行為之比較

組別	系統狀況	分析指標		
		$\lambda_{Rmax}$	收斂時間 (sec)	最大振幅 (mm)
一	$m_s R < M_2 \varepsilon$	-6.484	1.092	$1.078 \times 10^{-2}$
	$2m_d R < M_2 \varepsilon$	-0.324	2.033	$7.523 \times 10^{-3}$
二	$m_s R = M_2 \varepsilon$	-7.220	1.289	$1.035 \times 10^{-2}$
	$2m_d R = M_2 \varepsilon$	0	2.456	$6.034 \times 10^{-3}$
三	$m_s R > M_2 \varepsilon$	-7.962	0.934	$1.199 \times 10^{-2}$
	$2m_d R > M_2 \varepsilon$	-0.760	7.071	$6.638 \times 10^{-3}$

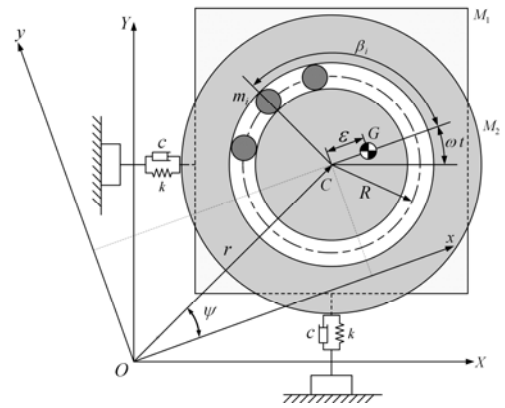
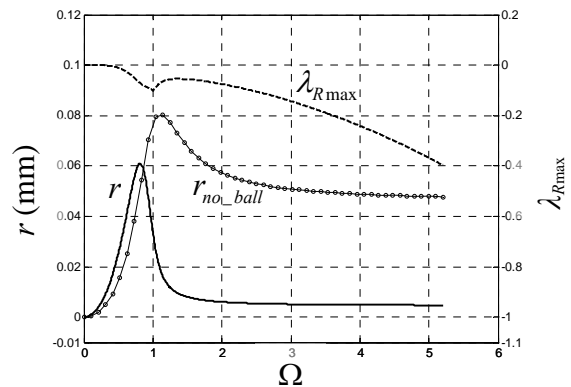
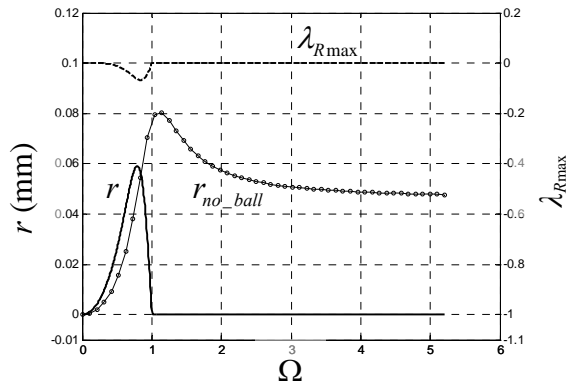


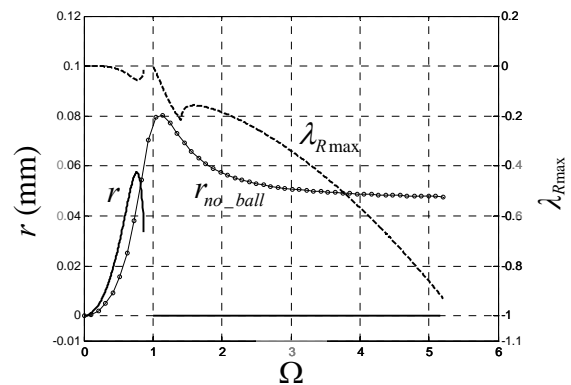
圖1 旋轉直角座標系之系統定義圖



(a) 當  $2mR < M_2\varepsilon$  時

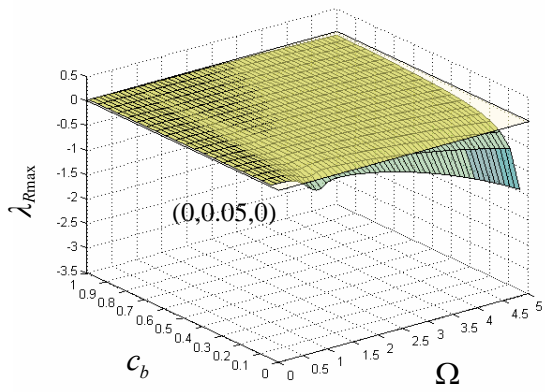


(b) 當  $2mR = M_2\varepsilon$  時

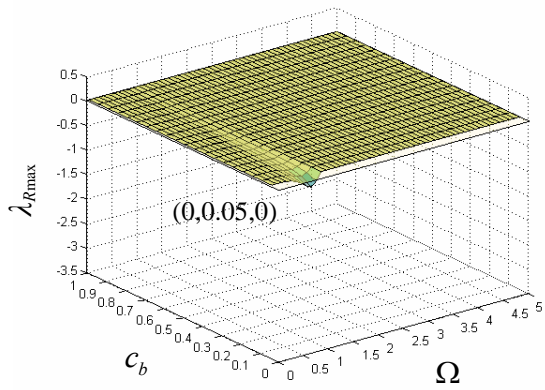


(c) 當  $2mR > M_2\varepsilon$  時

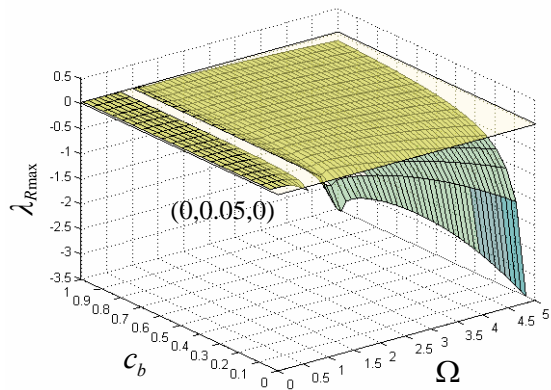
圖2 穩定平衡振動量與無自動平衡裝置之比較



(a) 當  $2mR < M_2\varepsilon$  時



(b) 當  $2mR = M_2\varepsilon$  時



(c) 當  $2mR > M_2\varepsilon$  時

圖3 軌道阻尼值-主軸轉速與  $\lambda_{Rmax}$  關係圖

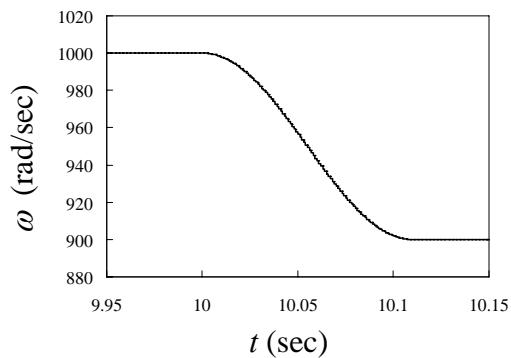


圖4 轉速擾動示意圖

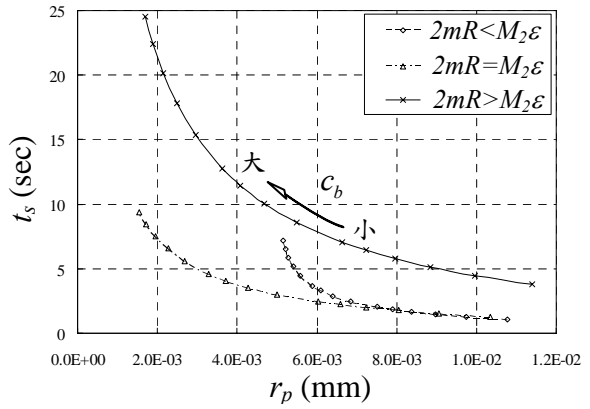


圖5 最大振幅與收斂時間關係圖

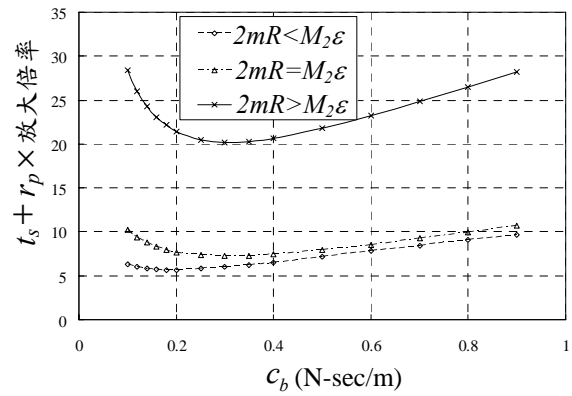


圖6 軌道阻尼值與綜合指標關係圖

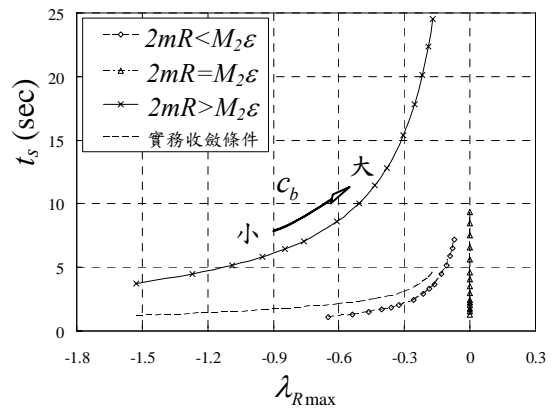


圖7 相對穩定性指標與收斂時間關係圖

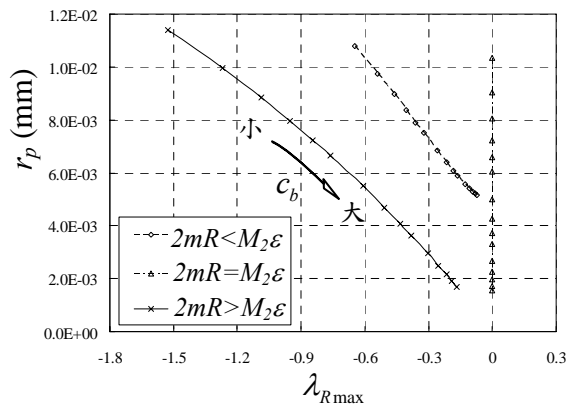


圖8 相對穩定性指標與最大振幅關係圖